# Übungsaufgaben zur Vorlesung "Algebra für Informatiker"

Blatt 7

**Aufgabe 25** (4 Punkte) Es sei $R$ ein Ring. Man beweise:
(a) Für alle $a \in R$ gilt $a \cdot 0_R = 0_R \cdot a = 0_R$.
(b) Ein Homomorphismus $\varphi : R \to R'$ von Ringen ist injektiv genau dann, wenn $\ker \varphi = \{0_R\}$.

**Aufgabe 26** (4 Punkte) Man zeige, daß die Ringe $\mathbb{R}[X]/(X^2+1)$ und $\mathbb{C}$ isomorph sind.
(Hinweis: Man betrachte die Abbildung $\varphi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{C}, f \mapsto f(i)$.)

**Aufgabe 27** Es sei $R'$ ein Ring, in dem die Multiplikation kommutativ ist, und es sei $R$ ein Unterring von $R'$. Man beweise:
(a) Für jedes $a \in R'$ ist

$$R[a] := \left\{ \sum_{j=0}^{n} r_j a^j \mid n \in \mathbb{N}_0, r_j \in R \right\}$$

ein Unterring von $R'$.
(b) Ist $S$ ein Unterring von $R'$ mit $R \cup \{a\} \subset S$, so gilt $R[a] \subset S$, d.h., $R[a]$ ist der kleinste Unterring von $R'$, der $R$ und $a$ enthält.
(c) Für den Unterring $\mathbb{Z}[\sqrt[3]{2}]$ von $\mathbb{R}$ gilt

$$\mathbb{Z}[\sqrt[3]{2}] = \left\{ a_2(\sqrt[3]{2})^2 + a_1\sqrt[3]{2} + a_0 \mid a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{Z} \right\}$$

**Aufgabe 28** (4 Punkte) Es sei $f$ das Polynom $(X+1)^2 \in \mathbb{Q}[X]$, und es sei $R := \mathbb{Q}[X]/f$.
(a) Es $\alpha := [X+1]_f, \beta := [X-1]_f \in R$. Man beweise: $\alpha^2 = 0_R, \beta^2 \neq 0_R$.
(b) Man zeige: $R$ ist kein Integritätsring.
(c) Man bestimme ein lineares Polynom $g \in \mathbb{Q}[X]$, so daß gilt $[g]_f = \beta^3$.
(Hinweis: Polynomdivision mit Rest.)

**Abgabe**: Dienstag, den 9. Juni 1998, bis 9.00 Uhr, Fach 109 (Ebene D1)

**Wichtig:** Bitte neben Namen und Matrikelnummer noch den Termin angeben, an dem die eigene Übung statttfindet.

**Klausurtermine:**
Scheinklausur: 4. Juli 1998
Vordiplomsklausur: 24. September 1998