Übungen zur Analysis I (WS 1999/2000)

Blatt 8

Aufgabe 29 (4 Punkte) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n := (1+\frac{1}{n})^n$ und $b_n := (1+\frac{1}{n})^{n+1}$. Zeigen Sie:
(a) Die Folgen (a_n) und (b_n) sind konvergent.
(Hinweis: Für die Monotonieuntersuchungen ist die Bernoulli-Ungleichung nützlich.)
(b) Es gilt $a_n < e$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+1} = e$, wobei e die Eulersche Zahl bezeichnet.
(Hinweis: Überlegen Sie sich, dass für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt $\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{k!}$ und $\lim\limits_{n\to\infty}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!}$.)
(Kommentar: Es folgt insbesondere, dass

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.)$$

Aufgabe 30 (4 Punkte) Untersuchen Sie, in welchen Punkten die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} x\ , & \text{falls } x \text{ rational}, \\ 1-x, & \text{falls } x \text{ irrational}, \end{cases}$$

stetig ist.

Aufgabe 31 (4 Punkte) Es seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, so dass für alle $x \in \mathbb{Q}$ gilt $f(x) = g(x)$. Zeigen Sie, dass dann die beiden Funktionen schon gleich sein müssen, d.h., für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $f(x) = g(x)$.

Aufgabe 32 (4 Punkte) Es seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ auf einer Teilmenge $D \subset \mathbb{C}$ definierte Funktionen. Die Funktionen $\varphi, \psi : D \to \mathbb{R}$ seien definiert durch

$$\begin{aligned} \varphi(x) &:= \max\{f(x), g(x)\} \quad \text{und} \\ \psi(x) &:= \min\{f(x), g(x)\}. \end{aligned}$$

Beweisen Sie: Sind f und g stetig auf D, so auch φ und ψ. (Man bezeichnet üblicherweise φ mit $\max\{f, g\}$ und ψ mit $\min\{f, g\}$.)

Abgabe: Dienstag, 7.12.1999, 14.00 Uhr im grünen Kasten 116 auf der Ebene D1.

Wichtig: Bitte Name, Vorname, Matrikelnummer und Übungsgruppe angeben!

Klausurtermin: Samstag, den 12.2.2000, von 9.00 - 12.00 Uhr im AM.