Übungen zur Analysis I (WS 1999/2000)

Blatt 9

Aufgabe 33 (4 Punkte) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen und sei H die Menge der Häufungspunkte dieser Folge. Dann definiert man

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} \infty\ , & \text{falls } H \text{ nach oben unbeschränkt,} \\ \sup H, & \text{falls } H \text{ nach oben beschränkt,} \end{cases}$$

und

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} \infty\ , & \text{falls } H \text{ nach unten unbeschränkt,} \\ \inf H, & \text{falls } H \text{ nach unten beschränkt.} \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$ und $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$ der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$x_n := n + \frac{1}{n} - 3\lfloor\frac{n}{3}\rfloor \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

(b) Beweisen Sie: Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann gegen $x_0 \in \mathbb{R}$, wenn gilt

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n = x_0.$$

Aufgabe 34 (4 Punkte)
(a) Sei $f : [a,b] \to [a,b]$ eine *Kontraktion*, d.h. es existiert ein $0 \le q < 1$ mit

$$|f(x) - f(y)| \le q|x-y| \ \text{ für alle } \ x, y \in [a,b].$$

Zeigen Sie, daß f stetig ist.
(b) Sei $f : [a,b] \to [a,b]$ eine Kontraktion und sei $y \in [a,b]$ beliebig. Ferner sei die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ definiert durch

$$\begin{aligned} &x_0 = y \quad \text{und} \\ &x_n = f(x_{n-1}) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass (x_n) eine Cauchy-Folge in $[a,b]$ ist und dass $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ der einzige Fixpunkt von f ist.Beweisen Sie außerdem die Fehlerabschätzung

$$|x - x_n| \le \frac{q^n}{1-q}\,|x_1 - x_0| \ \text{ für alle } \ n \in \mathbb{N}_0.$$

Aufgabe 35 (4 Punkte)
Bestimmen Sie, soweit vorhanden, Suprema, Infima, Maxima und Minima der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$:
(a) $A = \{x \in \mathbb{R} : x = 1 + (-1)^n + (\frac{1}{2})^n,\ n \in \mathbb{N}\}$,
(b) $B = \{x \in \mathbb{Q} : f(x) \le 0\}$, wobei $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ definiert ist durch $f(x) = (x+1)(x^2-2)$.

Aufgabe 36 (4 Punkte)
Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion auf $D \subseteq \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$ ein Berührpunkt von D. Falls für jede Folge (x_n) mit $x_n \in D$, $x_n > a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = c$, $c \in \mathbb{R}$, so schreiben wir

$$\lim_{\substack{x\to a+ \\ x\in D}} f(x) = c.$$

Falls für jede Folge (x_n) mit $x_n \in D$, $x_n < a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = c$, $c \in \mathbb{R}$, so schreiben wir

$$\lim_{\substack{x\to a-\\ x\in D}} f(x) = c.$$

Sei nun $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass f in x_0 stetig ist genau dann, wenn

$$\lim_{\substack{x\to x_0-\\ x\in D}} f(x) = \lim_{\substack{x\to x_0+\\ x\in D}} f(x) = f(x_0).$$

Abgabe: Dienstag, 14.12.1999, 14.00 Uhr im grünen Kasten 116 auf der Ebene D1.

Wichtig: Bitte Name, Vorname, Matrikelnummer und Übungsgruppe angeben!