Inhalte der Vorlesung „Analysis I“

Im folgenden finden Sie eine Kurzbeschreibung der Inhalte und Ergebnisse der Vorlesung „Analysis I“ von Uwe Nagel im Wintersemester 1999/2000.

1. Vollständige Induktion Um die Gültigkeit einer Aussage $A(n)$ für alle ganzen Zahlen $n \geq n_0$ zu beweisen, reicht es zu zeigen:
(i) Die Aussage $A(n_0)$ ist gültig.
(ii) Aus der Gültigkeit von $A(k)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ mit $n_0 \leq k < n$, folgt die Gültigkeit von $A(n)$.
Mit diesem Beweisprinzip der vollständigen Induktion wurde die Bernoulli-Ungleichung, die Formel für die geometrische Summe und die Binomische Formel bewiesen. Ferner wurde gezeigt, dass sich eine Menge mit $n \in \mathbb{N}_0$ Elementen auf genau $n!$ verschiedene Weisen anordnen lässt und dass man aus ihr genau $\binom{n}{k}$ verschiedene k-elementige Teilmengen auswählen kann.

2. Körper Ein Körper $(K, +, \cdot)$ ist eine Menge K mit einer Addition $+$ und einer Multiplikation $\cdot$, die beide kommutativ und assoziativ sind und für die gilt, dass es ein Null- und ein Einselement gibt, jedes $a \in K$ ein additives Inverses, jedes $a \neq 0$ ein (multiplikatives) Inverses besitzt und sie miteinander verträglich vermöge der Distributivität sind. Beispiele sind der Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen und der Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen.

3. Angeordnete und bewertete Körper Ein Körper K ist angeordnet, wenn er eine Teilmenge K^+ der positiven Elemente besitzt, so dass für jedes $x \in K$ genau eine der Relationen $x \in K^+$, $x = 0$, $-x \in K^+$ gilt und die Summe und das Produkt positiver Elemente wieder positiv sind. Für $x, y \in K$ schreibt man $x > y$, falls $x - y$ positiv ist, und $x \geq y$, falls $x > y$ oder $x = y$ gilt. Daraus ergeben sich die von den reellen Zahlen gewohnten Rechenregeln im Umgang mit Ungleichungen. Insbesondere gilt $x^2 > 0$ für alle $x \neq 0$. Ferner kann man das Maximum und das Minimum von $x, y \in K$ definieren sowie den Betrag von $x \in K$ durch $|x| := \max\{x, -x\}$. Der Betrag hat die Eigenschaften der Positivität, Multiplikativität, und es gilt die Dreiecks-Ungleichung $|x + y| \leq |x| + |y|$. Ein Körper, der eine Abbildung in einen angeordenten Körper besitzt, so dass für diese die obigen Eigenschaften des Betrages gelten, heißt bewerteter Körper. Jeder angeordnete Körper K ist bewertet. Er ist archimedisch angeordnet, wenn es zu jedem $x \in K$ ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $n := n \cdot 1 > x$.

4. Folgen und Grenzwerte Es sei $(K, |\ |)$ ein bewerteter Körper mit der Betragsfunktion $|\ | : K \to \mathbb{R}$. Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ in K ist eine Abbildung von $\mathbb{N}_0$ in den Körper K. Diese Folge heißt konvergent, wenn es ein $a \in K$ gibt, so dass für jedes $\varepsilon > 0$ fast alle Folgenglieder in der ε-Umgebung von a liegen. Die Zahl a wird dann Grenzwert der Folge genannt. Da $\mathbb{R}$ ein archimedisch angeordneter Körper ist, ist die Folge $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge, und für $x \in \mathbb{R}$ gilt: Die Folge $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge, falls $|x| < 1$, aber nicht beschränkt, falls $|x| > 1$.

Konvergente Folgen sind beschränkt, die Umkehrung ist falsch.

Sind $(a_n), (b_n)$ konvergente Folgen, so konvergieren auch die Summe $(a_n + b_n)$ und das Produkt $(a_n b_n)$ und zwar gegen $\lim a_n + \lim b_n$ bzw. $\lim a_n \cdot \lim b_n$. Gilt $\lim b_n \neq 0$, so gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $b_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$, und die Quotientenfolge $(\frac{a_n}{b_n})_{n \geq n_0}$ konvergiert gegen $\frac{\lim a_n}{\lim b_n}$. Ist K angeordnet, und gilt $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so folgt $\lim a_n \leq \lim b_n$.

Die Folge $(|a_n|)$ ist bestimmt divergent genau dann, wenn es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $a_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$, und die Folge $(\frac{1}{n})_{n \geq n_0}$ eine Nullfolge ist.

5. Vollständigkeit Eine Cauchy-Folge ist eine Folge (a_n), für die zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $|a_n - a_m| < \varepsilon$ für alle $n > m \geq N$. Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge. Ein bewerteter Körper heißt vollständig, wenn in ihm jede Cauchy-Folge konvergiert. Man sagt, dass in einem angeordneten Körper K das Intervallschachtelungs-Prinzip gilt, wenn es zu jeder absteigenden Folge von Intervallen in K, deren Längen eine Nullfolge bilden, genau ein $x \in K$ gibt, das in allen Intervallen enthalten ist. Ein archimedisch angeordneter Körper ist vollständig genau dann, wenn in ihm das Intervallschachtelungs-Prinzip gilt. Vollständigkeit erlaubt zwischen $\mathbb{R}$ und $\mathbb{Q}$ zu unterscheiden, denn $\mathbb{R}$ ist vollständig, aber $\mathbb{Q}$ ist nicht vollständig.

6. Reelle Zahlen Die reellen Zahlen sind der vollständige, archimedisch angeordnete Körper, der die rationalen Zahlen enthält. Die Vollständigkeit gestattet es, Konvergenzaussagen über Folgen zu treffen, ohne deren Grenzwert zu kennen. Eine Folge reeller Zahlen ist konvergent genau dann, wenn sie eine Cauchy-Folge ist. Es folgt, dass monotone, beschränkte Folgen reeller Zahlen konvergent sind. Als Anwendungen ergibt sich die Existenz der Quadratwurzel nichtnegativer reeller Zahlen und die Tatsache, dass es zu jeder reellen Zahl x eine Folge rationaler Zahlen gibt, die - aufgefasst als Folge reeller Zahlen - gegen x konvergiert. Insbesondere hat jede reelle Zahl eine eindeutige Darstellung als unendlicher Dezimalbruch. Ein Dezimalbruch stellt eine rationale Zahl dar genau dann, wenn er endlich oder periodisch ist.

Mit der Halbierungsmethode zeigt man den Satz von Bolzano-Weierstraß: Jede beschränkte Folge reeller Zahlen besitzt einen Häufungspunkt.

7. Komplexe Zahlen Die komplexen Zahlen bilden einen Körper $\mathbb{C}$, in dem jedes Element z die Form $a + ib$ hat, wobei $a \in \mathbb{R}$ der Realteil, $b \in \mathbb{R}$ der Imaginärteil von z und $i \in \mathbb{C}$ die imaginäre Einheit ist. Es gilt $i^2 = -1$. Daraus ergibt sich für $a, b, x, y \in \mathbb{R}$: $(a + ib) + (x + iy) = (a + x) + i(b + y)$ und $(a + ib) \cdot (x + iy) = (ax - by) + i(ay + bx)$. Die zu $a + ib$ konjugiert komplexe Zahl ist $a - ib$. Die Konjugation ist additiv und multiplikativ. Der Betrag von $z \in \mathbb{C}$ ist $|z| := \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2} = \sqrt{z\bar{z}}$. Der Betrag ist positiv und multiplikativ, und es gilt die Dreiecks-Ungleichung. Dadurch wird $\mathbb{C}$ zu einem bewerteten Körper, der nicht angeordnet ist. Der Abstand zweier komplexer Zahlen z, w in der Gaußschen Zahlenebene ist $|z - w|$.

Eine Folge (z_n) komplexer Zahlen ist konvergent genau dann, wenn die Folge der Realteile und die Folge der Imaginärteile konvergent sind. Es gilt dann $\lim z_n = \lim(\mathrm{Re}\, z_n) + i \cdot \lim(\mathrm{Im}\, z_n)$. Mit Hilfe dieses Prinzips der Trennung von Real- und Imaginärteil lassen sich Ergebnisse über $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{C}$ verallgemeinern. Es ergibt sich, dass $\mathbb{C}$ ein vollständiger, bewerteter Körper ist. Ferner gilt der Satz von Bolzano-Weierstraß: Jede beschränkte Folge komplexer Zahlen besitzt einen Häufungspunkt.

Jede quadratische Gleichung hat (mindestens) eine Lösung in $\mathbb{C}$. Die analoge Aussage für $\mathbb{R}$ ist falsch.

8. Reihen Ist $(z_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge komplexer Zahlen, so ist die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} z_k$ die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ der Partialsummen, wobei $s_n := \sum\limits_{k=0}^{n} z_k$ die n-te Partialsumme von (z_k) ist. Konvergiert die Folge (s_n), so nennen wir ihren Grenzwert die Summe der Reihe und bezeichnen diese auch mit $\sum\limits_{k=0}^{\infty} z_k$. Die wichtigste Reihe ist die geometrische Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} z^k$ für ein $z \in \mathbb{C}$. Diese ist divergent, falls $|z| \geq 1$, und konvergent mit $\sum\limits_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$, falls

$|z| < 1$. Sind $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} w_k$ konvergente Reihen, so konvergiert für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (\lambda z_k + \mu w_k)$, und es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\lambda z_k + \mu w_k) = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} z_k + \mu \sum_{k=0}^{\infty} w_k.$$

Aus dem Cauchy-Kriterium folgt das notwendige Konvergenzkriterium: Ist $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ konvergent, so gilt $\lim_{k\to\infty} z_k = 0$. Dieses ist nicht hinreichend, denn die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist bestimmt divergent. Nach dem Leibnizschen Konvergenzkriterium konvergiert eine alternierende Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ mit $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, wenn die Folge (a_n) eine monoton fallende Nullfolge ist.

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ heißt absolut konvergent, wenn die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |z_k|$ konvergiert. Aus der absoluten Konvergenz folgt die Konvergenz der Reihe. Die Umkehrung ist falsch, denn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ ist konvergent, aber nicht absolut konvergent. Ein hinreichendes Kriterium für die absolute Konvergenz ist das Majoranten-Kriterium. Aus ihm folgt die Konvergenz der Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ für jedes $k \geq 2$ in $\mathbb{N}$ und das einfacher zu handhabende Quotientenkriterium sowie das Wurzelkriterium.

Anders als bei endlichen Summen folgt aus der Kommutativität der Addition i.a. nicht, dass konvergente Reihen nach Umordnung wieder konvergent mit demselben Grenzwert sind. Für absolut konvergente Reihen gilt aber diese Aussage.

9. Die Exponentialfunktion Die Exponentialreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ ist nach dem Quotientenkriterium für alle $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergent. Dies gestattet die Definition der Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$. Ihre Werte lassen sich näherungsweise gut berechnen, denn es gilt die Restgliedabschätzung

$$\left| \exp(z) - \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \right| \leq 2 \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| \leq 1 + \frac{n}{2}.$$

Die Zahl $e := \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ heißt Eulersche Zahl. Sie ist irrational, und es gilt $e = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$.

Sind $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} w_k$ Reihen, so ist ihr Cauchy-Produkt die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$, wobei $c_n := \sum_{k=0}^{n} z_k w_{n-k}$. Dieses ist absolut konvergent, falls die Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} w_k$ absolut konvergent sind, und es gilt dann, wie man es von einem Produkt erwartet, $\sum_{k=0}^{\infty} c_k =$

$\left(\sum_{k=0}^{\infty} z_k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} w_k\right)$. Als Anwendung ergibt sich die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion

$$\exp(z+w) = \exp(z) \cdot \exp(w) \quad \text{für alle } z, w \in \mathbb{C}.$$

10. Stetigkeit von Funktionen Eine (komplexe) Funktion ist eine Abbildung $f : D \to \mathbb{C}$, wobei der Definitionsbereich D eine Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist. Ihr Graph ist $\Gamma_f := \{(z, y) \in D \times \mathbb{C} \mid y = f(z)\}$. Ein Punkt $c \in \mathbb{C}$ heißt Berührpunkt von D, wenn es eine Folge in D gibt, die gegen c konvergiert. Die Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ hat in c den Grenzwert γ, wenn für jede Folge (z_n) in D, die gegen c konvergiert, gilt, dass die Folge der Funktionswerte $(f(z_n))$ gegen γ konvergiert. Die Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ ist stetig im Punkt $c \in D$, wenn der Grenzwert von f in c existiert und gleich $f(c)$ ist. Sie heißt stetig, wenn sie in allen Punkten $c \in D$ stetig ist.

Die Exponentialfunktion ist auf ganz $\mathbb{C}$ stetig. Die floor-Funktion ist z.B. im Punkt 1 nicht stetig.

Sind $f, g : D \to \mathbb{C}$ stetige Funktionen, so sind auch die Summe $f + g$, das Produkt $f \cdot g$ und das skalare Produkt λf für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ stetig. Ferner ist $\frac{f}{g} : D' \to \mathbb{C}$ stetig, wobei $D' := \{z \in D \mid g(z) \neq 0\}$. Da die identische Abbildung $\mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ stetig ist, ergibt sich, dass jede rationale Funktion stetig ist (in ihrem Definitionsbereich). Ferner folgt aus der Stetigkeit von f in c und der Stetigkeit von g in $f(c)$, dass die Kompositon $g \circ f$ stetig in c ist.

Stetigkeit in einem Punkt ist eine lokale Eigenschaft, da sie nur von den Werten der Funktion in einer ε-Umgebung des Punktes abhängt. Damit ergibt sich z.B., dass die Betragsfunktion $\mathrm{abs}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto |x|$, stetig ist.

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ ist stetig genau dann, wenn ihr Realteil und ihr Imaginärteil stetig sind. Somit folgt aus der Stetigkeit von f auch die ihrer Konjugation.

11. Supremum, Infimum und Kompaktheit Ist D eine Teilmenge von $\mathbb{R}$, so ist das Supremum von D, im Falle seiner Existenz, die kleinste obere Schranke von D. Analog ist das Infimum von D, im Falle seiner Existenz, die größte untere Schranke von D. Jede nichtleere, nach oben (bzw. unten) beschränkte Teilmenge D der reellen Zahlen hat ein Supremum (bzw. Infimum). Dieses ist ein Berührpunkt der Menge. Gehört das Supremum (bzw. Infimum) zur Menge D, so nennt man es Maximum (bzw. Minimum) von D.

Der Abschluß einer Teilmenge $D \subset \mathbb{C}$ ist die Menge der Berührpunkte von D. Die Menge D heißt abgeschlossen, wenn sie mit ihrem Abschluß übereinstimmt. Sie heißt kompakt, wenn jede Folge in D eine konvergente Teilfolge besitzt, deren Grenzwert in D liegt. Als alternative Charakterisierung ergibt sich, dass D kompakt ist genau dann, wenn D abgeschlossen und beschränkt ist. Insbesondere ist das Intervall $[a, b]$ mit $a \leq b$ kompakt.

12. Stetige Funktionen auf kompakten Mengen Es sei K eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{C}$. Ist $f : K \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, so ist ihr Bild wieder kompakt, also insbesondere beschränkt. Stetige Funktionen $f : K \to \mathbb{R}$ mit $K \neq \emptyset$ nehmen ihr Maximum und Minimum an.

Mit Hilfe der Halbierungsmethode ergibt sich der Zwischenwertsatz: Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, so liegt das Intervall $[f(a), f(b)]$ oder das Intervall $[f(b), f(a)]$ im Bild von f. Es folgt insbesondere, dass jede Polynomfunktion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ungeraden Grades eine (reelle) Nullstelle hat und dass das Bild einer auf einem Intervall definierten stetigen, reellen Funktion wieder ein Intervall ist.

Ohne die Hilfe von Folgen läßt sich die Stetigkeit mit Hilfe der sogenanten ε - δ - Definition beschreiben: Eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ mit $D \subset \mathbb{C}$ ist stetig in $c \in D$ genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass gilt

$$|f(z) - f(c)| < \varepsilon \quad \text{für alle } z \in D \text{ mit } |z - c| < \delta.$$

Dabei hängt δ (möglicherweise) von der Wahl von ε und dem Punkt c ab. Ist δ unabhängig vom Punkt c, sagt man, dass f gleichmäßig stetig ist. Gleichmäßige Stetigkeit ist eine globale Eigenschaft. Sie impliziert die Stetigkeit. Die Umkehrung ist i.a. falsch. Sie ist aber richtig für stetige Funktionen, deren Definitionsbereich kompakt ist.

13. Umkehrfunktionen, Logarithmus und allgemeine Potenz Grundlage des Abschnitts ist folgendes Ergebnis: Ist I ein Intervall, und ist $f : I \to \mathbb{R}$ eine streng monotone, stetige Funktion, so bildet f das Intervall I bijektiv auf das Intervall $f(I)$ ab. Die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ ist wieder eine streng monotone, stetige Funktion.

Für $n \in \mathbb{N}$ erhält man als Umkehrfunktion von $f : \mathbb{R}_{\geq 0} := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}, x \mapsto x^n$, die n-te Wurzel $f^{-1} : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt[n]{x}$. Sie ist stetig und streng monoton wachsend. Wegen $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$ ergibt sich insbesondere, dass die Betragsfunktion $\text{abs} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ stetig ist.

Die Umkehrfunktion der reellen Exponentialfunktion ist der natürliche Logarithmus $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$. Er ist stetig und streng monoton wachsend. Es gilt die Funktionalgleichung

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y \quad \text{für alle } x, y > 0.$$

Für $a > 0$ und $x \in \mathbb{R}$ definiert man die allgemeine Potenz $a^x := \exp(x \ln a)$. Für allgemeine Potenzen gelten dieselben Rechenregeln wie für Potenzen mit ganzzahligen Exponenten.

Die Exponentialfunktion wächst für $x \to \infty$ schneller als jede feste Potenz von x. Umgekehrt wächst der natürliche Logarithmus für $x \to \infty$ langsamer als jede feste Potenz von x.

14. Trigonometrische Funktionen Die Cosinus- und Sinusfunktion werden für alle $x \in \mathbb{R}$ mit Hilfe der Exponentialfunktion definiert durch $\cos x := \operatorname{Re}(e^{ix})$ und $\sin x := \operatorname{Im}(e^{ix})$. Aus dieser Definition ergibt sich $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$, $\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$ und die Eulersche Formel $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. Ferner folgen die Additionstheoreme und die Reihendarstellungen der Cosinus- und Sinusfunktion. Die Zahl π wird dadurch definiert, dass $\frac{\pi}{2}$ die kleinste positive Nullstelle der Cosinusfunktion ist. Cosinus- und Sinusfunktion sind periodische Funktionen mit Periode 2π. Mit Hilfe dieser Funktionen definiert man die Tangens- und Cotangensfunktion sowie die Umkehrfunktionen $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$, $\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\arctan : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ und $\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \to]0, \pi[$.

Zu jeder komplexen Zahl $z \neq 0$ existieren eindeutig bestimmte reelle Zahlen $\varphi \in [0, 2\pi[$ und $r > 0$ mit $z = re^{i\varphi}$. Das Paar (r, φ) nennt man die Polarkoordinaten von z, φ das Argument von z. Es ist $r = |z|$. Polarkoordinaten gestatten eine geometrische Deutung der Multiplikation komplexer Zahlen. Insbesondere ergibt sich, dass die Gleichung $z^n = w$ für jedes $w \neq 0$ genau n verschiedene Lösungen hat.

15. Differentiation Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt differenzierbar im Punkt $a \in D$, wenn a ein Berührpunkt von $D \setminus \{a\}$ ist und wenn der Grenzwert $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existiert. In diesem Fall wird der Grenzwert mit $f'(a)$ bezeichnet und Ableitung von f in a genannt. Diese ist die Steigung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $(a, f(a))$. Die Forderung nach der Existenz des Grenzwerts des Differenzenquotienten ist äquivalent zur guten Approximierbarkeit von f durch eine affin-lineare Funktion L in der Umgebung von a. Der Graph von L ist dann die Tangente an den Graphen von f im Punkt $(a, f(a))$. Daraus ergibt sich: Ist f in a differenzierbar, so ist f in a auch stetig. Die Umkehrung ist falsch, denn die Betragsfunktion ist stetig, aber in 0 nicht differenzierbar.

Wichtige Ableitungen sind (ohne Angabe der Definitionsbereiche): $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, $(e^x)' = e^x$, $\sin' x = \cos x$, $\cos' x = -\sin x$, $\ln x = \frac{1}{x}$.

Viele Ableitungen kann man mit Hilfe der Ableitungsregeln für Summe, Produkt, Quotient, Komposition und die Umkehrfunktion bestimmen.

Höhere Ableitungen von f werden induktiv definiert. Ist f in einer ε-Umgebung von a $(k-1)$-mal differenzierbar, so nennt man (im Falle ihrer Existenz) die erste Ableitung der $(k-1)$-ten Ableitung von f in a die k-te Ableitung von f in a.

16. Mittelwertsätze und ihre Anwendungen Es seien $a < b$ reelle Zahlen. Hat die differenzierbare Funktion $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ in $c \in]a, b[$ ein lokales Extremum, so ist $f'(c) = 0$. Da stetige Funktionen auf kompakten Mengen ihr Maximum und Minimum annehmen, folgt daraus der Satz von Rolle. Mit seiner Hilfe erhält man als Verallgemeinerung den Mittelwertsatz: Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige, in $]a, b[$ differenzierbare Funktion, so gibt es einen Punkt $c \in]a, b[$, so dass die Tangente an den Graphen von f in $(c, f(c))$ parallel zur Sekante durch $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ ist. Als Anwendungen erhält man, dass bei überall verschwindender Ableitung f eine konstante Funktion sein muss sowie dass sich das Monotonieverhalten von f an Hand des Vorzeichens der Ableitung feststellen lässt. Für einen Punkt $c \in]a, b[$ im Inneren des Intervalls ergeben sich als hinreichende Kriterien für die Existenz eines lokalen Extremums in c, dass gilt: (i) $f'(c) = 0$, und (ii) f' hat in c einen Vorzeichenwechsel oder $f''(c) \neq 0$.

Die Konvexität bzw. Konkavität einer auf einem offenen Intervall 2-mal differenzierbaren Funktion kann man an Hand des Vorzeichens der zweiten Ableitung feststellen.

Wieder mit Hilfe des Satzes von Rolle ergibt sich der verallgemeinerte Mittelwertsatz. Aus ihm folgen die Regeln von de l'Hospital, die bei manchen Grenzwertberechnungen hilfreich sind.

Die (reelle) Exponentialfunktion lässt sich auch mit Hilfe ihrer Ableitung charakterisieren: Sie ist die einzige differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, für die $f' = f$ und $f(0) = 1$ gilt.

17. Das Riemann-Integral Es seien $a < b$ reelle Zahlen, und es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann ist jede Obersumme von f mindestens so groß wie jede Untersumme von f. Die Funktion f heißt Riemann-integrierbar, wenn das Infimum der Obersummen von f gleich dem Supremum der Untersummen von f ist. Der gemeinsame Wert wird bestimmtes Riemann-Integral von f auf $[a, b]$ genannt und mit $\int_a^b f(x)dx$ bezeichnet. Ist $f \geq 0$, so gibt er den Flächeninhalt der Fläche A im Streifen über $[a, b]$ zwischen dem Graphen von f und der reellen Achse an. Jede Obersumme gleich der Summe der Flächeninhalte von Rechtecken, die A überdecken, und jede Untersumme gleich der Summe der Flächeninhalte von Rechtecken, die in A überlappungsfrei einbeschrieben sind.

Nicht jede beschränkte Funktion ist integrierbar, aber stetige und monotone Funktionen sind immer integrierbar. Sind $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbare Funktionen, so sind auch $f+g$, fg und $|f|$ integrierbar. Ferner gilt: $\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)$, $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ (d.h., Integrieren ist linear), die Dreiecks-Ungleichung $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$ sowie $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$, falls $f \leq g$.

Man definiert $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$ und $\int_a^a f(x)dx = 0$. Dann ergibt sich für $a, b, c \in \mathbb{R}$: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, falls jedes dieser Integrale existiert.

Die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar genau dann, wenn jede Folge Riemannscher Summen, bei denen die Feinheit der Zerlegungen eine Nullfolge bilden, gegen den gleichen Wert konvergiert. Dieser Wert ist dann $\int_a^b f(x)dx$.

18. Der Hauptsatz der Differential und Integralrechnung Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion, so liefert das unbestimmte Integral $F(x) := \int_a^x f(t)dt$ eine stetige

Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, die aber nicht differenzierbar sein muss. Ist aber f sogar stetig, so liefert das unbestimmte Integral (nach dem Hauptsatz) eine Stammfunktion von f, d.h., F ist differenzierbar und $F' = f$. Ferner gilt dann $\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$ für jede Stammfunktion G von f.

Somit ist für auf einem Intervall stetige Funktionen die Integration die Umkehroperation zur Differentiation. Die Grundintegrale ergeben sich damit aus der Kenntnis der Ableitungen der Exponential-, der Logarithmusfunktion, der trigonometrischen Funktionen und deren Umkehrfunktionen. Weitere Integrale lassen sich mit Hilfe der Substitutionsregel und der partiellen Integration bestimmen. Integrale von rationalen Funktionen berechnet man mit der Partialbruchzerlegung.