Übungen zur Analysis II (SoSe 2000)

Blatt 9

Aufgabe 33 (6 Punkte) Es bezeichne $\| \; \|$ die euklidische Norm.
(a) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x \mapsto \|x\|$, in allen Punkten $x \neq 0$ differenzierbar ist und die Ableitung $f'(x) = \frac{x}{\|x\|}$ hat. Ist f im Punkt 0 differenzierbar?
(b) Skizieren Sie den Graphen der Funktion $f : [-2,2] \times [-2,2] \to \mathbb{R}, x \mapsto \|x\|$, und die Normale im Punkt $P := (\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, f(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}))$, d.h. die Gerade durch diesen Punkt, die senkrecht zum Tangentialraum an den Graphen von f in P ist. Enthält die Normale den Punkt $(0,0,0)$?

Aufgabe 34 (4 Punkte) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) := \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

zweimal partiell differenzierbar ist, dass aber im Punkt $(0,0)$ gilt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0).$$

Aufgabe 35 (2 Punkte) Es bezeichne $\| \; \|$ die euklidische Norm. Zeigen Sie, dass für die Funktion $f : \mathbb{R}^n \times]0,\infty[\to \mathbb{R}, (x,t) \mapsto f(x,t) := t^{-\frac{n}{2}} \exp(-\frac{\|x\|^2}{4t})$, gilt: $\frac{\partial f}{\partial t} = \Delta f$, wobei Δ den sogenannten Laplace-Operator $\Delta f := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$ bezeichnet. (Die Gleichung $\frac{\partial f}{\partial t} = \Delta f$ wird Wärmeleitungsgleichung genannt.)

Aufgabe 36 (4 Punkte) (a) Es sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine symmetrische Matrix. Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x \mapsto x^t A x$, zweimal differenzierbar ist und für alle $x \in \mathbb{R}^n$ $f''(x) = 2A$ gilt.
(b) Skizzieren Sie die Graphen der folgenden Funktionen $e, h, p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und berechnen Sie die Hesse-Matrizen im Punkt $(0,0)$, wobei

$$e(x,y) := 2x^2 + 3y^2, \quad h(x,y) := 2x^2 - 3y^2, \quad p(x,y) = 2x^2.$$

Abgabe: Dienstag, 13.6.2000, 9.00 Uhr im grünen Kasten 116 auf der Ebene D1 oder in den Übungen.

Wichtig: Bitte Name, Vorname, Matrikelnummer und Übungsgruppe angeben!