Übungen zur Angewandten Analysis (WiSe 2000)

Blatt 5

Aufgabe 17 (4 Punkte) Skizzieren Sie $\Delta^2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geq 0 \text{ und } x + y \leq 1\}$, und berechnen Sie für $m, n \in \mathbb{N}$ das Integral $\int_{\Delta^2} x^m y^n d(x, y)$.

Aufgabe 18 (4 Punkte) Skizzieren Sie $\Delta^3 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z \geq 0 \text{ und } x + y + z \leq 1\}$, und berechnen Sie für $m, n, p \in \mathbb{N}$ das Integral $\int_{\Delta^3} x^{m-1} y^{n-1} z^{p-1} d(x, y, z)$.

Aufgabe 19 (4 Punkte) (Verhalten des Integrals bei Streckungen) Es seien $s_1, \ldots, s_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, und es sei $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die durch $S(x_1, \ldots, x_n) = (\frac{x_1}{s_1}, \ldots, \frac{x_n}{s_n})$ definierte Streckung. Zeigen Sie:
(a) Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ integrierbar, so auch $f \circ S$, und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\frac{x_1}{s_1}, \ldots, \frac{x_n}{s_n}) d^n x = |s_1 \ldots s_n| \cdot \int_{\mathbb{R}^n} f(x) d^n x.$$

(b) Ist X eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, so dass $\mathbf{1}_X$ integrierbar ist, so ist auch $\mathbf{1}_{S^{-1}(X)}$ integrierbar, und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{S^{-1}(X)}\, d^n x = |s_1 \ldots s_n| \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_X\, d^n x.$$

Aufgabe 20 (4 Punkte) Beweisen Sie die in der Vorlesung angegebenen Rechenregeln 5.16 für das Lebesgue-Integral.
(Hinweis: Es ist $f_+ = \frac{1}{2}(f + |f|)$ und $f_- = \frac{1}{2}(f - |f|)$.)

Abgabe: Donnerstag, 23.11.2000, 7.25 Uhr im grünen Kasten 129 auf der Ebene D1.

Wichtig: Bitte Name, Vorname und Matrikelnummer angeben!