Übungen zur Algebraischen Geometrie (SoSe 2001)

Blatt 6

Aufgabe 16 (4 Punkte) Zwei Matrizen $A, B \in R^{p,q}$ über dem Ring R heißen *äquivalent*, wenn es invertierbare Matrizen $P \in R^{p,p}$, $Q \in R^{q,q}$ gibt, so dass gilt $A = P \cdot B \cdot Q$. Zeigen Sie, dass die Matrizen A, B äquivalent sind genau dann, wenn gilt: $\operatorname{coker} A \cong \operatorname{coker} B$.

Aufgabe 17 (4 Punkte) Es seien M, N Untermoduln eines R-Moduls. Zeigen Sie, dass die Sequenz von R-Moduln

$$0 \to M \cap N \xrightarrow{\varphi} M \oplus N \xrightarrow{\psi} M + N \to 0,$$

wobei $\varphi(y) := (y, y)$ und $\psi(m, n) := m - n$, exakt ist. (Diese Sequenz wird Mayer-Vietoris-Sequenz genannt.)

Aufgabe 18 (4 Punkte)
(a) Es sei

$$0 \to V' \to V \to V'' \to 0$$

eine exakte Sequenz von K-Vektorräumen. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\dim_K V = \dim_K V' + \dim_K V''.$$

(b) Es seien $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2 \subset R := K[x_0, \ldots, x_n]$ homogene Primärideale derart, dass gilt: $\operatorname{Rad} \mathfrak{q}_1 \neq \operatorname{Rad} \mathfrak{q}_2$ und $\dim R/\mathfrak{q}_1 = \dim R/\mathfrak{q}_2$. Beweisen Sie, dass daraus folgt

$$\deg(\mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2) = \deg \mathfrak{q}_1 + \deg \mathfrak{q}_2.$$

(Hinweis: Benutzen Sie eine Mayer-Vietoris-Sequenz.)

Abgabe: Freitag, 1.6.2001, 11.00 Uhr im grünen Kasten 129 auf der Ebene D1.

Wichtig: Bitte Name, Vorname und Matrikelnummer angeben!