Übungen zur Linearen Algebra II

Blatt 13

Aufgabe 47: Es sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine symmetrische, positiv semidefinite Matrix. Man zeige:

(a) Es gibt eine symmetrische, positiv semidefinite Matrix $C \in \mathbb{R}^{n,n}$ mit $C^2 = A$.

(Hinweis: Man beginne mit dem Fall, in dem A eine Diagonalmatrix ist.)

(b) Ist A positive definit, und ist $C' \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine weitere symmetrische, positiv definite Matrix mit $(C')^2 = A$, so gilt $C = C'$.

(Hinweis: Man zeige zunächst, daß $C + C'$ positiv definit, also insbesondere invertierbar ist.)

(Kommentar: Es soll also gezeigt werden, daß es zu einer symmetrischen, positiv definiten Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine eindeutig bestimmte symmetrische, positiv definite Matrix $C \in \mathbb{R}^{n,n}$ mit $C^2 = A$ gibt. Diese wird auch die Quadratwurzel von A genannt.)

Aufgabe 48: Es sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine symmetrische, positiv semidefinite Matrix. Es sei V_+^A der von allen Eigenvektoren zu positiven Eigenwerten von A erzeugte Unterraum von $\mathbb{R}^n$. Es sei V_-^A der von allen Eigenvektoren zu negativen Eigenwerten von A erzeugte Unterraum von $\mathbb{R}^n$, und es sei V_0^A der von allen Eigenvektoren zum Eigenwert Null von A erzeugte Unterraum von $\mathbb{R}^n$. Man zeige:

(a) Ist $v \in V_+^A$, so gilt $v^t \cdot A \cdot v > 0$. Ist $v \in V_-^A$, so gilt $v^t \cdot A \cdot v < 0$. Ist $v \in V_0^A$, so gilt $v^t \cdot A \cdot v = 0$.

(b) Es gilt: $\mathbb{R}^n = V_+^A \oplus V_-^A \oplus V_0^A$ und $\operatorname{Rg} A = \dim V_+^A + \dim V_-^A$.

(c) Ist $P \in \mathbb{R}^{n,n}$ invertierbar, so ist $C := P^t \cdot A \cdot P$ symmetrisch, und es gilt: $\dim V_+^A = \dim V_+^C$, $V_-^A = \dim V_-^C$, $V_0^A = \dim V_0^C$.

(Kommentar: $\dim V_+^A$ bzw. $\dim V_-^A$ ist die Anzahl der positiven bzw. negativen Eigenwerte von A. Es wird $\dim V_+^A$ der Index von A und $\dim V_-^A - \dim V_+^A$ die Signatur von A genannt.

Es sei β eine Bilinearform auf einem endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraum. Dann folgt aus (c), daß alle Darstellungsmatrizen von β gleichen Index und Rang und die gleiche Singnatur haben. Daher kann man **Index, Signatur, Rang von** β durch die entsprechenden Größen einer beliebigen Darstellungsmatrix von β definieren.

Die Aussage in (c) finden Sie in Lehrbüchern als Trägheitssatz von Sylvester.)

Aufgabe 49: Es sei β eine Bilinearform auf einem endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraum V mit Rang r und Index k. Man beweise, daß es eine Basis B von V gibt, so daß die Darstellungsmatrix von β bzgl. B die Blockmatrix $\begin{pmatrix} E_k & & & & 0 \\ & -E_{r-k} & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}$ ist.

Aufgabe 50: Es sei $Q \in \mathbb{R}^3$ die durch

$$\frac{1}{9}(4\,x_1^2 + 8\,x_1x_2 - 4\,x_1x_3 + 4\,x_2^2 - 4\,x_2x_3 + x_3^2) + \frac{1}{15}(2\,x_1 + 5\,x_2 + 14\,x_3) = 0$$

definierte Quadrik. Zu welcher Quadrik in Hauptachsenlage ist Q kongruent?