MA322-007 Apr 14

6.5 Least Squares

Solve 
$$A\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{v}}$$
 using RREF.  $A = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \vec{\mathbf{a}}_1 & \vec{\mathbf{a}}_2 \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 9 & 20 \\ -3 & -27 \\ 1 & -11 \end{bmatrix}$   $\vec{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ 

I don't want excuses, I want solutions. Instead of using A directly, let's switch to an orthonormal frame of reference.

(a) Set  $\vec{\mathbf{g}}_1$  to be a unit length vector in the direction of  $\vec{\mathbf{a}}_1$ . In other words,  $\vec{\mathbf{g}}_1 = \vec{\mathbf{a}}_1 / \|\vec{\mathbf{a}}_1\|$ .

(b) Set  $\vec{\mathbf{g}}_2$  to be the unit length vector in the direction of  $\vec{\mathbf{a}}_2 - \operatorname{proj}_{\vec{\mathbf{g}}_1}(\vec{\mathbf{a}}_2)$ :

(c) Calculate  $y_1$  and  $y_2$  so that  $\vec{\mathbf{v}}$  is as close to  $y_1\vec{\mathbf{g}}_1 + y_2\vec{\mathbf{g}}_2$  as possible.

$$\mathbf{\vec{e}} = \mathbf{\vec{v}} - \mathbf{\vec{e}} = \mathbf{\vec{v}} = \mathbf{\vec{$$

Great, so we found the answer to a problem I didn't ask. So what? (d) Write  $\vec{a}_i$  in terms of  $\vec{g}_i$ 

(e) Find  $x_1$  and  $x_2$  so that  $\vec{\mathbf{v}}$  is as close to  $x_1\vec{\mathbf{a}}_1 + x_2\vec{\mathbf{a}}_2$  as possible.

(f) What is the smallest possible error?

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \downarrow & \downarrow \\ \mathbf{g}_1 & \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_1 & \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_1 & \mathbf{g}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.10 & 0.54 \\ 0.30 & 0.78 \\ \mathbf{g}_1 & \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.72 \\ \mathbf{g}_1 & \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.72 \\ \mathbf{g}_1 & \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.72 \\ \mathbf{g}_1 & \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.72 \\ \mathbf{g}_1 & \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.72 \\ \mathbf{g}_1 & \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.72 \\ \mathbf{g}_1 & \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.72 \\ \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.72 \\ \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.72 \\ \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.72 \\ \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.72 \\ \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.72 \\ \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.72 \\ \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.72 \\ \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.72 \\ \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.72 \\ \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.72 \\ \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.72 \\ \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.72 \\ \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.72 \\ \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.72 \\ \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.72 \\ \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.72 \\ \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.72 \\ \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.72 \\ \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.72 \\ \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.72 \\ \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.72 \\ \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.72 \\ \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.72 \\ \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.72 \\ \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.72 \\ \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.72 \\ \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.72 \\ \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.72 \\ \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.72 \\ \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.72 \\ \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.72 \\ \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.72 \\ \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.72 \\ \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7$$