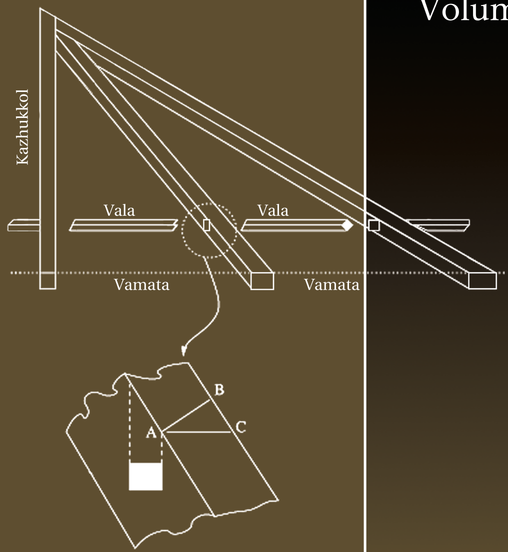
cover 3.psd

Culture and History of Mathematics 4



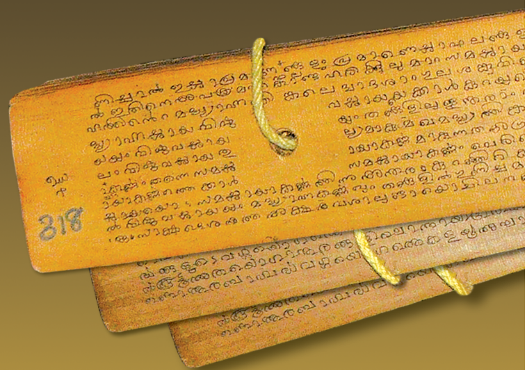
GAṆITA-YUKTI-BHĀṢĀ

(RATIONALES IN MATHEMATICAL ASTRONOMY)

of

JYEṢṬHADEVA

Volume I : MATHEMATICS



Malayalam Text
Critically Edited with
English Translation

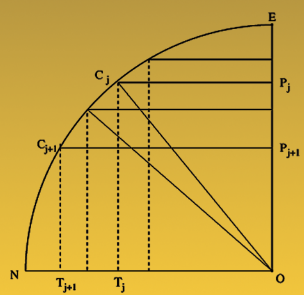
by

K. V. Sarma

With Explanatory Notes

by

K. Ramasubramanian
M. D. Srinivas
M. S. Sriram



Introduction

1 *Gaṇita-yukti-bhāṣā*

Gaṇita-yukti-bhāṣā (Rationales in Mathematical Astronomy), popularly known as *Yukti-bhāṣā* by which term it is referred to below, is a highly instructive treatise which elucidates lucidly the rationale of mathematics and astronomy as it was understood and explained in South India during the middle ages. Jyeṣṭhadeva (c. A.D. 1500-1610), the author, has couched the work in Malayālam, the language of Kerala, and the work has been popular in the land for more than 400 years as attested by a number of palm-leaf manuscripts thereof available today, besides references to the work in later texts and a later Sanskritization of *Yukti-bhāṣā* itself.

2 Astronomy in Kerala

From early times there had been, in Kerala, substantial academic activities, as evidenced by centres of learning, reference to scholars, and profuse writings produced and preserved in the form of mansucripts. It is also worth noting that apart from the religious and scholarly outlook of the elite in society, the factors which additionally facilitated scholars to pursue their studies in peace and tranquility included the geographical situation of the narrow strip of land that formed Kerala, as sequestered between the Arabian Sea and the Sahya range of mountains, at the extreme south of India, unaffected by foreign invasions and political turmoils that disturbed most of the other parts of India. Secondly, the characteristically simple and unostentatious life led by the people of the land, right from royalty to the common man, aided uninterrupted application to one's professional pursuits. This trait permeated technical studies, as well, especially in the fields of architecture, medicine, astronomy and astrology. In astronomy, Kerala followed the school of Āryabhaṭa (b. A.D. 476), and in astrology the school of Varāhamihira (6th cent.).

An index to the profuse writings in the disciplines of astronomy and astrology in the land is provided by the notices of authors and documentation of works available in the form of manuscripts, through two recent publications, *A History of the Kerala School of Hindu Astronomy* and the *Bibliography of Kerala and Kerala-based Astronomy and Astrology.*[1] See also *Science Texts in Sanskrit in the Manuscripts Repositories of Kerala and Tamilnadu* (K. V. Sarma, Rashtriya Sanskrit Sansthan, New Delhi, 2002). These volumes, though not exhaustive, record about 2000 texts on Astrology and Astronomy. There again, the works pertain to all types of texts, including *Gaṇita, Tantra, Karaṇa, Grahaṇa, Chāyā-gaṇita, Veṇvāroha-gaṇita, Vyatīpāta-gaṇita, Jātaka, Muhūrta, Prāṇa, Pañcāṅga, Nimitta, Rekhā-śāstra*, *Saṃhitā* and several miscellaneous topics, couched both in Sanskrit and in the local language, Malayālam.

3 Tradition of astronomical rationale in India

Academic traditon in India preferred precision and brevity in the presentation of basic texts. This characterised not only the disciplines like *Yoga, Vedānta* and *Vyākaraṇa*, but also technical subjects like Astronomy. Here, the rules were couched in the form of aphorisms (*sūtra*-s) or in aphoristic verses, primarily for ease in memorisation. But this aspect of enunciation required elaborate explanation for proper and full understanding and application, which was supplied by teachers instructing disciples, or through commentaries.

In the case of technical subjects, the explanation gradually reduced itself, as teacher-pupil and father-son-traditions waned, to giving merely the mean-

[1] Both by K. V. Sarma, Vishveshvaranand Institute, Sadhu Ashram, Hoshiarpur, (Punjab), 1972.

ing of the words in the texts through commentaries, which failed to give the inner significance or the detailed derivation of rules and procedures from fundamentals which tended to be forgotten. This situation ultimately had the effect of doubts being cast about the originality of the rules themselves, especially by Western scholars who were conversant only with the deductional method requiring the full setting out of the argument for each deduction. This has caused even jaded pronouncements like the one by Morris Kline in his book, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*,[2] where the author says:

> With the Hindus, there is much good procedure and technical facility, but no evidence that they considered proof at all. It is fairly certain that the Hindus did not appreciate the significance of their own contributions. The few good ideas they had, such as symbols for the numbers, were introduced casually with no realisation that they were valuable innovations. They were not sensitive to mathematical values. Along with the ideas they themselves advanced, they accepted and incorporated the crude ideas of the Egyptians and Babylonians.

4 Proof in Indian tradition

The crude ignorance of the above-mentioned historian of mathematics, Morris Kline, has been shared by some other Western historians as well, though not by all. A proper reading of mathematical texts of Indian origin would enable this statement to be corrected. Against the view – that the Hindu mathematicians "had rules, but apparently no logical scruples" and that there is "no evidence that they considered proof at all" – might be cited the statement of the well-known scholiast of Indian Mathematics, Gaṇeśa Daivajña (fl. 1507) when he says, towards the beginning of his commentary *Buddhivilāsinī* on the *Līlāvatī* of Bhāskara II (born 1114):

[2] Oxford, 1972, p.190.

vyaktevāvyaktasaṃjñe yad uditamakhilaṃ nopapattiṃ vinā tān-
nirbhrānto vā ṛte tāṃ sugaṇakasadasi prauḍhatāṃ naiti cāyam |
pratyakṣaṃ dṛśyate sā karatalakalitādarśavat suprasannā
tasmād agryopapattiṃ nigaditumakhilam utsahe buddhivṛddhyai ||

(Introduction, verse 4)

Gaṇeśa Daivajña asserts here that whatever be stated in the *vyakta* or *avyakta* branches, viz., Arithmetic and Algebra, would not be doubt-free nor hailed in the midst of mathematicians without *upapatti* or proof. And so, he intends to supply proofs for the enunciations of theorems, etc. occurring in the original. In the same vein, Mallāri, the astronomer (fl. 1578), says in his commentry on the *Grahalāghava* of Gaṇeśa Daivajña:

upapattivicāraṇāvidhau gaṇakā mandadhiyo vimohitāḥ |
tasmād vacmyupapattim asya vimalāṃ tanmohanāśāya tām ||

(Introduction, verses 4-5)

Mallāri says that dull-witted astronomers are confused over astronomical proofs and so he was providing proofs for the elucidation thereof. On the untenability of certain other points made by Kline, the attention of interested scholars is directed to a well-documented paper by M.D. Srinivas.[3]

5 Sources of proof

The potential sources of information on traditional proofs, rationales, derivations and demonstrations in Indian mathematics and astronomy are commentaries on the basic texts. But, as observed earlier, most commentaries

[3] *The Methodology of Indian Mathematicians and its Contemporary Relevance*, PPST Bulletin, Madras, No.12, Sept. 1987, 1-35. We have included some material from this article in the Epilogue to this Volume.

restrict themselves to the explanation of the words of the texts and do not go further. But still, there are a certain number of commentaries, like the ones noticed above, which elucidate rationales also, partly or fully. Then, there are works which, though based on earlier siddhāntic texts, introduce revisions, innovations and methodologies, all aimed at arriving at better and more accurate results. Often these texts give the rationale as well. Still another source of information on proof are works wholly devoted to the elucidation of mathematical and astronomical rationale, as also short independent texts which take up for elucidation some topic or other. Sometimes marginalia and post-colophonic statements in manuscripts give valuable information. Then, there is the large number of short tracts which demonstrate the rationale of minor points or specific topics. It has to be remembered here that in technical literature, as a rule, rationale, including innovations and inventions, generally form part of the intimate instruction from the teacher to the pupil and so are not always put on record in commentaries or in manuscripts. Therefore, whatever is available in written form is rather the exception than the rule, and so is to be welcomed with greater interest, for that helps us in reconstructing the working of the mind of the early and medieval Indian mathematician and astronomer.

6 The case of Kerala

It is well known that from the 7th century onwards, if not earlier, Kerala has remained the bastion of the Āryabhaṭan School of astronomy. There the discipline flourished under royal patronage and was assiduously followed by the Nampūtiri Brahmins of Kerala. It is interesting that among the works composed here, alongside other texts, a number of texts on mathematical and astronomical rationale, belonging to all the categories, also came to be composed. Herein below, a mention is made of the rich crop of literature on rationale produced in Kerala. Most of the texts are anonymous, but the dates of several of them can be ascertained from the epoch or cut off dates mentioned in these, or from other indications. In this set up, it is to be hoped that, besides being informative and instructive in the matter of probing the mental make-up, intellectual interests and assiduity of the mathematicians and astronomers of the land, especially during the medieval times, the present work would encourage the texts being culled out individually or in groups for analytical study and interpretation in terms of modern mathematics, and, eventually, for a better appraisal of the development of mathematical ideas and procedures in the land.

7 Keralite commentaries presenting rationale

From among the commentaries on basic texts which, apart from explaining the text, offer also the rationale of formulae and procedures, fully or partly, might be mentioned the following: (For the documentation of manuscripts of these works, see the *Bibliography of Kerala and Kerala-based Astronomy and Astrology* and *Science Texts in Sanskrit in the Manuscripts Repositories in Kerala and Tamilnadu* (op.cit)).

1. *Āryabhaṭīya-vyākhyā*, *Bhaṭadīpikā*, by Parameśvara (1360-1460).
2. *Āryabhaṭīya-bhāṣya* by Nīlakaṇṭha Somayājī (1443-1560).
3. *Āryabhaṭīya-vyākhyā* by Ghaṭīgopa (fl.1800).
4. *Āryabhaṭīya-vyākhyā* by Kṛṣṇadāsa (Malayālam), (1756-1812).
5. Com. on Ābh. III.17-21: *Kakśyāpratimaṇḍalādi-śloka-vyākhyā*, Anon. (135 *grantha*-s).
6. *Tantrasaṅgraha-vyākhyā*, *Yuktidīpikā*, by Śaṅkara Vāriyar (1500-60). Ed. by K. V. Sarma, Hoshiarpur, 1977.
7. *Laghubhāskarīya-vyākhyā*, *Vivaraṇa*, by Śaṅkaranārāyaṇa (825-900).
8. *Laghubhāskarīya-vyākhyā* by Parameśvara (1360-1460).
9. *Laghubhāskarīya-vyākhyā* (Old Malayālam), Anon.
10. *Laghumānasa-vyākhyā* by Parameśvara (1360-1460).
11. *Līlāvatī-vyākhyā*, *Kriyākramakarī*, by Śaṅkara Vāriyar (1500-60) Ed. by K. V. Sarma, Hoshiarpur, 1975.

8 Full-fledged works on rationale

12-38. *Gaṇita-yuktayaḥ* (27 rationalistic tracts culled from Mss. and edited under the above common title, by K. V. Sarma, Hoshiarpur, 1979).

39. *Gaṇita-yukti-bhāṣā*, a Sanskrit version of the Malayālam work *Yukti-bhāṣā*, Ed. K. V. Sarma, Shimla, 2004.
40. *Grahaparīkṣākrama* by Nīlakaṇṭha Somayājī (1443-1560).
41. *Jyotirmīmāṃsā* by Nīlakaṇṭha Somayājī (1443-1560), Ed. K. V. Sarma, Hoshiarpur, 1977.
42. *Yukti-bhāṣā* by Jyeṣṭhadeva (1500-1610). Ed. Tr. herein.

9 Innovative texts

A number of full-fledged texts based on earlier *Siddhānta*-s, but incorporating and involving major revisions, innovations, and methodologies, peculiar to Kerala have been produced down the ages. These are of two types, viz., those which take up for treatment the entire range of the subject, and those which take up only one or more topics therein. Some of these explain the rationales adopted therein, while, in the others, they have to be identified by the rationale employed elsewhere and by modern analysis.

43. *Agaṇitagrahacāra* of Mādhava of Saṅgamagrāma (1340-1425).
44. *Uparāgakriyākrama*, according to Nīlakaṇṭha Somayājī, Anon.
45. *Uparāgakriyākrama* by Acyuta Piṣāraṭi (1500-1621).
46. *Uparāgakriyākrama-yukti* of verses III.28-30, Anon.,
47. *Uparāgakriyākrama* by Nārāyaṇa (1500-75).
48. *Uparāgaviṃśāti* by Acyuta Piṣāraṭi (1550-1621).
49. *Uparāgāṣṭaka*, Epoch 1563, Anon.
50. *Karaṇadarpaṇa*, Epoch 1703, and Commentaries.
51. *Karaṇapaddhati* by Putumana Somayājī (1660-1740).
52. *Karaṇasāra* by Śaṅkara Vāriyar (1500-60) with auto-com.
53. *Karaṇāmṛta* by Citrabhānu (fl. 1550).

54. *Karaṇottama* by Acyuta Piṣāraṭi (1550-1621) with auto-com.
55. *Gaṇitagrantha* by Putumana Somayājī (1660-1740).
56. *Gurūpadeśa*, Anon.
57. *Govindakṛti* by Govindasvāmin (800-850).
58. *Grahacāranibandhana* by Haridatta (650-700) Ed. K. V. Sarma.
59. *Grahacāranibandhana-saṅgraha*, Anon. Ed. K. V. Sarma.
60. *Grahaṇamaṇḍana* by Parameśvara (1360-1460) Ed. K. V. Sarma.
61. *Grahaṇanyāyadīpikā* by Parameśvara (1360-1460) Ed. K. V. Sarma.
62. *Grahaṇāṣṭaka* by Parameśvara (1360-1460) Ed. K. V. Sarma.
63. *Grahaṇāṣṭaka* and Com. in Mal. Anon.
64. *Grahaṇāṣṭaka* by Putumana Somayājī (1660-1740).
65. *Grahaṇopadeśa* in 8 verses, Anon. and Com.
66. *Grahamadhyama-yuktayaḥ* by Puradahanapura-dvija Parameśvara (1775-1830).
67. *Candragaṇitakramaḥ* by Śaṅkara of Mahiṣamaṅgalam (1494-1570).
68. *Candracchāyā-gaṇita* by Parameśvara (1360-1460) Ed. K. V. Sarma.
69. *Candracchāyā-gaṇita* by Nīlakaṇṭha Somayājī (1443-1560) with auto-commentary.
70. *Dṛkkaraṇa* by Jyeṣṭhadeva (1500-1610).
71. *Dṛggaṇita* by Parameśvara (1360-1460).

72-73. *Nyāyaratna* I and II by Putumana Somayājī (1660-1740).

74-84. *Pañcabodha* I-XI and Coms.

85. *Pañcabodhakriyā-saṅgraha* by Puradahanapura-dvija Parameśvara (1775-1839).
86. *Pañcabodhāṣṭaka* by Putumana Somayājī (1660-1740).
87. *Rāśigola-sphuṭānīti* according to Acyuta Piṣāraṭi Ed. K. V. Sarma.
88. *Lagnaprakaraṇa* by Mādhava of Saṅgamagrāma (1340-1425).
89. *Vākyakaraṇa* by Parameśvara (1360-1460).
90. *Veṇvāroha* by Putumana Somayājī (1660-1740).
91. *Veṇvāroha* by Mādhava of Saṅgamagrāma (1340-1425) Ed. K. V. Sarma.
92. *Veṇvārohānusāri-grantha* in 18 verses.
93. *Vaidhṛtāṣṭaka*, Anon.
94. *Vyatīpātāṣṭaka-vyākhyā* by Parameśvara (1360-1460).

95. *Sadratnamālā* by Śaṅkaravarman (1800-39) Ed. K. V. Sarma, New Delhi, 2001.
96. *Siddhāntadarpaṇa-vyākhyā* by Nīlakaṇṭha Somayājī (1443-1560) Ed. K. V. Sarma.
97. *Sūkṣmagrahaṇa-gaṇita* according to Nīlakaṇṭha Somayājī's method, Anon.
98. *Sphuṭacandrāpti* by Mādhava of Saṅgamagrāma (1340-1425) Ed. with Trans., K. V. Sarma, Vishveshvaranand Inst., Hoshiarpur, 1973.
99. *Sphuṭanirṇaya-tantra* by Acyuta Piṣāraṭi (1550-1621) and Autocom., Ed: K. V. Sarma, Hoshiarpur, 1974.
100. *Sphuṭanirṇaya-saṅgraha*, Anon. Ed. K. V. Sarma.

10 Texts presenting innovations and rationale

The tracts mentioned below occur at the end of astronomical manuscripts or are found collected together in Mss. codices. Being not full-fledged texts, they are mostly anonymous and do not carry any specific titles. The titles shall have to be given editorially on the basis of the subjects dealt with or the topics discussed in the tracts. In several cases, since a number of topics are dealt with, a general tentative title is construed from the first topic dealt with, with the suffix *ādi* ('etc.'), e.g. *Ahargaṇādigaṇitam*:

101. *Apamakriyā* in 20 verses. 102.
102. *Ayutadināt ādityacandramadhyamāḥ* 103.
103. *Aśvatthagrāma-mahājyāḥ*, in 12 verses. 104.
104. *Aśvatthagrāma-mahājyāḥ* in 9 verses.

105-107. *Ahargaṇādi-gaṇita*, I-III (Mal.).

108-110. *Aharmānādi-gaṇita*, I-III and Coms.

111. *Uccanīcādigranthaḥ*.
112. *Ekaviṃśatipraśnakramaḥ* (Mal.).
113. *Kakṣyādisphuṭa-gaṇita* (Mal.).
114. *Kalidinādigaṇitam* (Mal.) (140 granthas).

115. *Kuṭṭākārādigaṇita* (350 verses).
116. *Kriyāsaṅgrahaḥ* I (6 sections, 300 gr.)
117. *Kriyāsaṅgrahaḥ* II.
118. *Khaṇḍadhruvāḥ*, Epoch Kali Day 1755000.
119. *Khaṇḍadhruvāḥ*, Epoch Kali Day 1862000.
120. *Khaṇḍadhruvāḥ*, Epoch Kali Day 1790000.
121. *Khaṇḍadhruvādi*, in 6 verses, Epoch Kali day 1797000.
122. *Khaṇḍadhruvādyānayana* (70 gr.).

123-124. *Khaṇḍadhruvādyānayana* I-II.

125. *Gaṇanakriyādi* (Mal.).

126-127. *Gaṇita* I (200 gr.), II (200 granthas).

128. *Gaṇitakriyā*, Epoch 1527, with com.

129-40. *Gaṇitam Bhāṣā*, I-XII (in Mal.).

141-50. *Grahagaṇita*, I-X.

151-61. *Grahaṇagaṇita*, I-XI, with coms.

162. *Grahamadhyamayuktayaḥ*, *Sahasradinānām*, in 8 verses, by Puradahana-puradvija Parameśvara.

163-164. *Grahasphuṭaḥ*, I-II.

165. *Grahasphuṭaparilekhaḥ*, in 6 verses.

166-67. *Grahasphuṭavākyāni*, I (100 gr.), II (100 gr.).

168. *Grahasphuṭavṛtta*, in 7 verses, Trip. Jy. 768-I.

169-70. *Grahasphuṭānayana*, I-II.

171. *Grahāṇām apavartanaparyayāḥ*.

172. *Candragrahaṇavidhi* (Mal.).

173-75. *Candracchāyā-gaṇita*, III-V.

176. *Candravikṣepacalana*, in 10 verses.

177. *Candrasphuṭagaṇanavākya* and com.

178-79. *Candrasphuṭādigaṇana*, I-II.

180-81. *Candrasphuṭādigaṇita*, I-II.

182. *Candrasphuṭādyānayana*.

183. *Chāyākriyā* with com.

184-85. *Chāyāgaṇita*, I-II.

186. *Jīvādyānayana*.

187. *Jīvānayana.*
188. *Jyākriyā*, Trip. Jy. 568-Z-19.
189. *Jyākhaṇḍādyānayana* (1910 gr.).
190. *Jyānayanādi* (Mal.), 1.
191-92. *Jyotiṣasaṅgraha*, I-II.
193. *Tithijyāḥ.*
194. *Tithinirṇaya* I, in 30 verses.
195. *Tithinirṇaya* II, in 11 verses.
196. *Daśapraśnottara* in 12 verses.
197. *Dṛggaṇitakriyā.*
198. *Dṛgveṇvārohakriyā.*
199. *Dhruvānayanaprakāraḥ* with com.
200. *Parahitagaṇita.*
201. *Mahājyāḥ susūkṣmāḥ*, in 8 verses.
202. *Mahājyāḥ susūkṣmāḥ*, in 11 verses.
203. *Mahājyādyānayana* and com.
204. *Mahājyānayanaprakāraḥ* by Mādhava of Saṅgamagrāma (1340-1425).
205. *Mauḍhyagaṇana*, in 6 verses. Trip. Jy. 568-Y.
206. *Ravicandra-sphuṭa-gaṇita, Uparāgkriyākramānusāri.*
207. *Ravisaṅkramaṇādigaṇita* (200 gr.).
208. *Ravisphuṭaḥ*, in 4 verses.
209. *Laghumānasakriyā.*
210-211. *Lāṭavaidhṛtādigaṇita*, I-II.
212. *Vakramauḍhyādigaṇita*, 80 gr. Epoch A.D. 1857 V.
213. *Vṛttakṣetrakriyā.*
214. *Veṇvārohakriyā*, *Dṛggaṇitānusāri*, in 14 verses.
215. *Veṇvārohānusāri Candrasūkṣmasphuṭānayana* and com. (Mal.).
216. *Vaidhṛtānayana.*
217. *Vyatīpāta-gaṇita.*
218-219. *Vyatīpāta-gaṇita*, I-II.
220. *Śṛṅgonnatyānayana.*
221. *Sūryasiddhāntānusāri Paryayajyādayaḥ.*
222. *Sphuṭakriyā*, in 3 verses.

223. *Sphuṭacandrānayana*, in 7 verses.
224. *Sphuṭacandrānayanam*, in 24 *vākya*-s.
225. *Sphuṭacandrānayanam*, in 32 *vākya*-s.
226. *Sphuṭanirṇaya-Tantrasaṅgrahatulya-grahamadhyamānayanam.*
227. *Sphuṭanirṇayatulya-madhyamānayanāya guṇakārahārakāḥ.*
228. *Sphuṭanirṇayādhāritāḥ (khaṇḍadhruvāḥ)*, in 4 verses.
229. *Sphuṭaravyānayanam*, in 24 *vākya*-s.

11 The *Yukti-bhāṣā* or *Gaṇita-yukti-bhāṣā*

An important work among the said texts is the *Yukti-bhāṣā*,[4] whose main aim is to present the rationale of the theories involved in the constants and computations occurring in the *Tantrasaṅgraha*,[5] an important astronomical work of Nīlakaṇṭha Somayājī (A.D. 1443-1560). Thus, after the benedictory verses, the work commences with the statement:

> *aviṭe naṭe tantrasaṅgrahatte anusariccu grahagatiyiṅkal*
> *upayogamuḷḷa gaṇitaṅṅaḷe muzhuvanāyi colluvān*
> *tuṭaṅṅunneṭattu...*

> Here, commencing an elucidation in full of the rationale of planetary computations according to the *Tantrasaṅgraha*...

[4]Pt. I ed. by Rāma Varma Maru Thampuran and A. R. Akhileswarayyar, Mangalodayam Ltd, Trissur, 1948.

[5]*Tantrasaṅgraha* of Nīlakaṇṭha Somayājī, Ed. with two commentaries, *Yuktidīpikā* and *Laghuvivṛti*, both by *Śaṅkara*, by K. V. Sarma, Visveshvaranand Institute, Hoshiarpur, 1977. The attention of scholars is drawn also to the undermentioned publications:

1. Sarma, K.V. and Narasimhan, V.S. : Text and Translation of *Tantrasaṅgraha* of Nīlakaṇṭha Somayājī, Supplement to the Indian Journal of History of Science, (INSA, New Delhi), 33 (1998), pp.148.
2. M. S. Sriram, K. Ramasubramanian and M. D. Srinivas, Eds., *500 years of* Tantrasaṅgraha*: A Landmark in the History of Astronomy*, IIAS, Shimla, 2002.

The work finds its first reference in modern writings in an article by C. M. Whish[6] in 1834, where it is referred to towards verifying the date of the author of *Tantrasaṅgraha*.[7] Whish had stated that 'a farther (sic) account of the Yukti-Bhasha...' will be given in a separate paper,[8] which, however, does not appear to have been written or published. *Yukti-bhāṣā* has been a popular text in Kerala for more than four hundred years since its composition towards A.D. 1530. Several manuscripts of the work are known.[9] However, since the work is couched in the Malayālam language, which is spoken only in Kerala, it has remained, practically, beyond the purview of scholars who did not know the language, in spite of its having partly been published.[10] And the few articles on this important work relate to only certain individual

[6]C. M. Whish, 'On the Hindu quadrature of the circle and the infinite series of the proportion of the circumference to the diameter exhibited in the four *śāstras*, the *Tantrasaṅgraham*, *Yukti-Bhāsha*, *Caraṇa Padhati* (sic) and *Sadratnamālā*', Transactions of the Royal Asiatic Society of Great Britain and Ireland, III.iii (1834), 509-23. The year of publication of Whish's paper has been variously cited as 1830 or 1835. In a communication to Dr. Ramasubramanian, Ms. Kathy Lazenbatt, Librarian of the Royal Asiatic Society, has clarified that the year of publication is actually 1834. Ms. Lazenbatt notes that: "The reference for the article by Whish is Transactions of the Royal Asiatic Society, Vol. III, Part III, 1834, pp. 509-523. The confusion over the date may have arisen in various ways. The first part of Vol. III was published in 1831, and unless you look through the volume and find the title pages for Parts II and III, you might think the date for the whole volume was 1831. Also the paper was read at a meeting of the Society on 15 December 1832, but was not published till 1834." We are grateful to Ms. Lazenbatt for clarifying this point.

[7]Cf. the statement: "The testimonies as to the author (of *Tantrasaṅgraha*) and the period in which he lived, are the following... the mention made of him... by his commentator, the author of the *Yukti-Bhāshā*, *Cellallūra Nambūtiri*", p. 522. However, it has to be noted, incidentally, that Whish has made wrong identifications when he states here: (i) that the author of *Tantrasaṅgraha* is "*Talaculattūra Nambūtiri*" (p. 522), for it is correctly *Gārgya* Kerala Nīlakaṇṭha Somayājī; (ii) that *Yukti-bhāṣā* is a commentary on the *Tantrasaṅgraha*, which it is not; and (iii) that the author of *Yukti-bhāṣā* is *Cellalūra* (i.e. *Kelallūr) Nambūtiri* (p. 522), for it is actually *Paraṅṅoṭṭu Nampūtiri*, as would be shown below.

[8]See op. cit., p. 523.

[9]Several manuscipts of the work are preserved under the two titles in the Kerala University Mss. Library, Trivandrum, the Sanskrit College Library, Tripunithura, and in private possession.

[10]There is a fine edition of Pt. I of the work, now out of print, by Rāma Varma Maru Thampuran and A. R. Akhileswarayyar, Mangalodayam Press, Trichur, 1948, and an extremely unsatisfactory and error-ridden edition of the whole work issued by the Govt. Oriental Mss. Library, Madras, 1953.

topics treated therein.[11] It is therefore necessary that a critical appraisal of the nature and contents of this work, as a whole, is made, so as to enable scholars take up the work for further study.

12 Authorship of *Yukti-bhāṣā*

The introductory verses of the *Yukti-bhāṣā* do not mention the name of its author, nor do its manuscripts indicate his name at their closing colophons. However, one of its manuscripts preserved in the Sanskrit College Library, Tripunithura, which had been used by Rāma Varma Maru Thampuran for his edition of the work, had at its close the verse:

> *alekhi yuktibhāṣā vipreṇa brahmadattasaṃjñena* |
> *ye golapathasthāḥ syuḥ kalirahitāḥ śodhayantaste* ||

Taking the word *alekhi* in the verse to mean 'composed' instead of its natural meaning 'written, copied', the Introduction to the said edition took Brahmadatta mentioned in the verse as the author, and the date given by the Kali chronogram *ye golapathasthāssyuḥ*, corresponding to A.D. 1750, as the date of its composition.[12] There are, however, evidences which point to the correct name of the author of *Yukti-bhāṣā* as Jyeṣṭhadeva and his date to be A.D. 1500-1610. Thus, an old palm-leaf manuscript, No.755, of the Kerala University Manuscripts Library, entitled *Gaṇitayuktayaḥ* contains many astronomical tracts, in one of which, dealing with the precession of the equinoxes (*ayanacalana*), occurs the statement:

> *atha vikṣiptacalanasyānītau pūrvasūribhiḥ* |
> *proktā ye matabhedāstān vakṣye tattvabubhutsayā* ||

[11] Cf., S. N. Sen, A Bibliography of Sanskrit Works on Astronomy and Mathematics, INSA, New Delhi, 1966, p. 74; C. T. Rajagopal and M. S. Rangachari, 'On an untapped source of medieval Keralese mathematics', Archive for History of Exact Science, 18 (1978) 89-101: C. T. Rajagopal and M. S. Rangachari, 'On mediaeval Kerala Mathematics', *ibid*, 35 (1986) 91-99.

[12] See P. Sridhara Menon in his Introduction, (p.5) to the edition of Pt. I of the work by Rāma Varma Maru Thampuram and Akhileswarayyar.

> *jūkakriyādike pāte svarṇaṃ tatsādhane vidhau |*
> *ityuktā kṣepacalanasyānītistantrasaṅgrahe ||*
> *jyeṣṭhadevo'pi bhāṣāyāṃ nādhikaṃ kiñciduktavān |*

The *Tantrasaṅgraha* referred to here is, obviously, the work of Nīlakaṇṭha Somayājī, and the *Bhāṣā* specified as the work of Jyeṣṭhadeva is the *Yukti-bhāṣā*, which, as indicated above, seeks to set out and elucidate the theories and practices involved in the *Tantrasaṅgraha*. There are more clear evidences which point to the correct name of the author of *Yukti-bhāṣā* as Jyeṣṭhadeva, and his date to be A.D. 1500-1610. Thus, an astronomical chronology (*granthavāri*) in the Malayālam language found as a post-colophonic statement in an old palm-leaf manuscript of a Malayālam commentary on *Sūryasiddhānta* preserved in the Oriental Institute, Baroda, Ms. No.9886, contains in it the statement:

> *parameśvaran vaṭaśśeri nampūri nilāyāḥ saumyatīrasthaḥ parameśvaraḥ... asya tanayo dāmodaraḥ, asya śiṣyo nīlakaṇṭha somayājī, iddeham tantrasaṅgraham āryabhaṭīyabhāṣyam mutalāya granthaṅṅaḷkku karttāvākunnu |*
> '*lakṣmīśanihitadhyānaiḥ*' *iti asya kalinā kālanirṇayaḥ, pūrvokta-dāmodarasya śiṣyaḥ jyeṣṭhadevaḥ iddeham paraṅṅoṭṭu nampūriyākunnu. yukti-bhāṣāgranthatte uṇḍākiyatum iddeham tanne | jyeṣṭhadevaṇḍe śiṣyan tṛkkaṇṭiyūru acyuta-piṣāraṭi, iddeham sphuṭanirṇayam, goladīpikā mutalāya grantha(ṅṅaḷkku) karttāvākunnu. acyuta-piṣāraṭiyuṭe śiṣyan melputtūru nārāyaṇa bhaṭṭatiri. iddeham nārāyaṇīyam, prakriyā-sarvasvam mutalāya granthaṅṅaḷkku kartā*, '*āyurārogyasaukhyam*' *ityādi-kalinā kālanirṇayaḥ...*"
>
> Parameśvara was a *Nampūri* from *Vaṭaśśeri* (family). He resided on the northern bank of the *Niḷā* (river)... His son was Dāmodara. Nīlakaṇṭha Somayājī was his pupil. He, (the latter), is the author of *Tantrasaṅgraha*, *Āryabhaṭīyabhāṣya* and other works.
>
> His date is determined by the Kali days, 16,80,553 (A.D. 1500).

> Jyeṣṭhadeva was the pupil of the above Dāmodara. He was a *Nampūri* from *Paraṅṅoṭṭu* (family).[13] He is also the author of the work *Yukti-bhāṣā*.
>
> Acyuta Piṣāraṭi of *Tṛkkaṇṭiyūr* was the pupil of Jyeṣṭhadeva. He is the author of *Sphuṭanirṇaya*, *Goladīpikā* and other works. Melputtūr Nārāyaṇa Bhaṭṭatiri was the pupil of Acyuta Piṣāraṭi. He is the author of the *Nārāyaṇīya*, *Prakriyā-sarvasva* and other works. His date is determined by the Kali days 17,12,210 (A.D. 1587).

Here it is specifically stated that Jyeṣṭhadeva is the author of *Yukti-bhāṣā* and the teacher-pupil succession is : Parameśvara (A.D. 1360-1455) ⇒ son, Dāmodara ⇒ pupil, Nīlakaṇṭha Somayājī (1443-1560) ⇒ Jyeṣṭhadeva (1500-1610) ⇒ pupil, Acyuta *Piṣāraṭi* (1550-1621) ⇒ pupil, Nārāyaṇa Bhaṭṭatiri (fl.A.D. 1587). That Jyeṣṭhadeva was the teacher of Acyuta Piṣāraṭi is stated by Piṣāraṭi himself in the concluding verse of his work on the computation of eclipses, entitled *Uparāga-kriyākrama*:[14]

> *proktaḥ pravayaso dhyānāt jyeṣṭhadevasya sadguroḥ* |
> *vicyutāśeṣadoṣeṇetyacyutena kriyākramaḥ* ||

> Thus has been stated the *Uparāga-kriyākrama* by Acyuta of clear thought through his contemplation of (the teachings of) his aged benign teacher Jyeṣṭhadeva.

The Malayālam commentary to *Uparāgakriyākrama* explains that the expression *proktaḥ pravayasodhyānāt* serves also as a chronogram to give the date of the completion of the work. This chronogram works out to A.D. 1592, when Acyuta Piṣāraṭi, pupil of Jyeṣṭhadeva, composed the work. Whish,

[13]For an independent tradition that the author of the *Yukti-bhāṣā* belonged to the *Paraṅṅoṭṭu* family (Sanskritised as *Parakroḍa*), situated in the *Ālattūr* village in Malabar, see *Nampūtirimār* (Mal.), by Parayil Raman Namputiri, Trichur, Kollam era 1093, (A.D. 1918), p. 55.

[14]See Ms. C. 628-B, end, of the Kerala Uni. Mss. Library.

in his article referred to above, records a tradition that the author of the *Yukti-bhāṣā* wrote also a work called *Dṛkkaraṇa*.[15] *Dṛkkaraṇa* in question, an astronomical manual in Malayālam verse, is available in manuscript form (No.c.7-C of the Kerala University Mss. Library) but does not give anywhere the name of its author. However, it gives the date of its composition in its final verse through the Kali chronogram *Koḷambe barhisūnau* (Kollam year 783) which is A.D. 1608.

In view of the tradition recorded by Whish and this date being not far from 1592 mentioned by Acyuta Piṣāraṭi, we might take the *Dṛkkaraṇa* to be a work of Jyeṣṭhadeva and that he lived up to about 1610. In view of the fact that *Dāmodara* (c. 1410-1520) was a teacher both of Nīlakaṇṭha Somayājī and Jyeṣṭhadeva, and that Jyeṣṭhadeva wrote his *Yukti-bhāṣā* in the wake of Nīlakaṇṭha's *Tantrasaṅgraha*, he must be a younger contemporary of Nīlakaṇṭha. He is remembered in 1592 by his pupil Acyuta Piṣāraṭi as *pravayas* ('very old'). His *Dṛkkaraṇa* is dated 1608. Jyeṣṭhadeva should therefore, have been long-lived, his date being 1500-1610. His family house *Paraṅṅoṭṭu* (*Parakroḍa* in Sanskrit) still exists in the vicinity of *Ālattūr* and *Tṛkkaṇṭiyūr* where well-known astronomers like Parameśvara, Nīlakaṇṭha and Acyuta Piṣāraṭi flourished about those times.

13 Scope and extent of *Yukti-bhāṣā*

The entire text of *Yukti-bhāṣā* occurs as one continuum, without any internal or closing colophons to mark off the subjects treated in the work. However, towards the middle of the work, where the treatment of mathematics ends and that of astronomy commences, occurs a general benedictory statement which reads: "*Śrīrastu*, *hariḥ śrī-gaṇapataye namaḥ*, *avighnamastu*". This would naturally mean that the author had conceived his work as consisting of two parts, devoted respectively to mathematics and astronomy. Since the work deals with several main subjects and a number of topics under each, the needed subject and topic divisions shall have to be made editorially with suitable indication. Demarcating the work thus, the main subjects treated in Part I, Mathematics, are: I. *Parikarma* (Logistics), II. *Daśapraśna* (Ten

[15]Whish, Loc. cit., p. 523.

problems involving logistics), III. *Bhinnagaṇita* (Fractions), IV. *Trairāśika* (Rule of three), V. *Kuṭṭākāra* (Pulverisation), VI. *Paridhi-vyāsa* (Relation between circumference and diameter) and VII. *Jyānayana* (Derivation of Rsines).

The subjects treated in Part II, Astronomy, are: VIII. *Grahagati* (Planetary motion), *Bhagola* (Sphere of the zodiac), *Madhyagraha* (Mean Planets), *Sūryasphuṭa* (True Sun), *Grahasphuṭa* (True Planets), IX. *Bhū-Vāyu-Bhagola* (Spheres of the Earth, Atmosphere and Asterisms), *Ayanacalana* (Precession of the Equinoxes), X. *Pañcadaśapraśna* (Fifteen problems relating to spherical triangles), XI. *Dig-jñāna* (Orientation), *Chāyāgaṇita* (Shadow computations), *Lagna* (Rising point of the Ecliptic), *Nati-Laṃbana* (Parallaxes of Latitude and Longitude), XII. *Grahaṇa* (Eclipse), XIII. *Vyatīpāta*, XIV. Visibility Correction of Planets, and XV. Moon's Cusps and Phases of the Moon.

14 *Kriyākramakarī*, *Yuktidīpikā* and *Yukti-bhāṣā*

There are two extensive commentaries, both by Śaṅkara Vāriyar of *Tṛkkuṭaveli* family (A.D. 1500-1560), being *Kriyākramakarī* and *Yuktidīpikā*, the former on the *Līlāvatī* of Bhāskara II,[16] and the latter on the *Tantrasaṅgraha* of Nīlakaṇṭha Somayājī.[17] Interestingly, there is a close affinity between the *Yukti-bhāṣā* and the above-said two commentaries. Even more, there is the same sequence of arguments and verbal correspondences between them in the treatment of identical topics. From this similitude it has been suggested that the *Yukti-bhāṣā* is just a rendering into *Malayālam* of certain passages from the Sanskrit. It is further suggested that, for this reason, there is not much that is original in the *Yukti-bhāṣā*.[18] But it is just the other way round, namely that the Sanskrit versions are adaptations and paraphrases of the relevant passages from the *Yukti-bhāṣā*. This is confirmed by *Śaṅkara*, the

[16] Cr. edn. with Introduction by K. V. Sarma, Vishveshvaranand Institute, Hoshiarpur, 1975.

[17] Cr. edn. with detailed Introduction by K. V. Sarma, Vishveshvaranand Institute, Hoshiarpur, 1977. The identity of the authorship of the two commentaries has been dealt with in detail herein, Intro., pp. li-vi.

[18] See, P. Sridhara Menon, Introduction to Maru Thampuran's edn. of the work, p.6.

author of both the commentaries, when he states specifically in the colophonic verses of his commentary *Yuktidīpikā*, on the *Tantrasaṅgraha*, that what he had done in that commentary was only 'the setting out of the material elucidated in the work of the *Brāhmaṇa* of *Parakroḍa* (viz., *Jyeṣṭhadeva*) (author of the *Yukti-bhāṣā*). Cf., for instance, one such colophonic verse:[19]

> *ityeṣa parakroḍāvāsa-dvijavarasamīrito yo'rthaḥ* |
> *sa tu tantrasaṅgrahasya prathame'dhyāye mayā kathitaḥ* ||

15 *Yukti-bhāṣā* in Malayālam and Sanskrit

There is a work entitled *Gaṇita-yukti-bhāṣā* (Ms. No.R.4382 of the Govt. Or. Mss. Library, Madras) in Sanskrit and it has been suggested that it might be the source of the Malayālam *Yukti-bhāṣā*.[20] However, a detailed comparison of the two shows that the *Gaṇita-yukti-bhāṣā* is but a rough and ready translation into Sanskrit of the Malayālam original by one who lacked not only the ability of writing idiomatic Sanskrit but also an adequate knowledge of the subject. Moreover, at places, there occur haplographical omissions, in the Sanskrit version, of passages available in the Malayālam work, which fact too confirms that the Sanskrit version is the derived form.

16 Presentation of rationale

The mathematical and astronomical rationale presented in the *Yukti-bhāṣā* relate to several aspects, to wit, concepts, theories, constants, computations, demonstration by diagrammatic representation and the like. The treatment is logical, going step by step, first presenting the fundamentals and gradually building up the argument. It is, if one might say so, 'intimate' in that it inculcates the rationale and elucidates the steps even as a teacher does to a student. The work aims at understanding and conviction by the reader.

[19] Edn., p.77.
[20] Loc. cit., pp.5-6.

17 Analytic contents of the *Yukti-bhāṣā*

As mentioned earlier, Pt. I of the *Yukti-bhāṣā*, dealing with Mathematics, can be divided into seven chapters.

Ch. I on Logistics (*Parikarma*) deals with the Nature of numbers, Multiplication as explained from several standpoints including the use of diagrams, Multiplication by easy methods, Division, Squaring through several methods and Roots of sums of squares and Difference of squares.

Ch. II *Daśapraśnottara* (Ten algebraic problems and their solutions) relates to the finding of the numbers when two, from among the five, viz., their sum, difference, product, sum of squares and difference of squares, are given.

Ch. III deals with Fractions. Highly analytical in presentation, the topics dealt with are: Nature of fractions, their addition, subtraction, multiplication and division.

Ch. IV is entirely devoted to the Rule of Three, where both the general and inverse rules are set out.

In Ch. V the importance of the Rule of three in mathematical and astronomical computations is indicated with the computation of the current Kali day.

The Mean Planets are derived therefrom. *Apavartana* (Reduction) and *Kuṭṭākāra* (Pulverisation) are introduced here and their purpose specified. An elaborate rationalisation of the principles involved in it and the practices followed in both Reduction and Pulverisation are presented and explained with examples. It is also indicated how the process helps in arriving at the *Bhājya-s* (Divisors) and *Bhājaka-s* (Multiplicands) in Pulverisation by means of the *Vallī* (Series of divisions), and its application towards computing the planets more and more accurately.

In Ch. VI, the *Yukti-bhāṣā* gives several formulae for determining the circumference of a circle of a given diameter. Some of the methods involve the properties of right angled triangles, towards which the properties of right angled triangles are demonstrated graphically. For the methods which involve different summations of series, the derivation of those series is also demonstrated. Among the latter are the summations of consecutive numbers, the summation of squares, the summation of cubes and higher powers, and the summation of summations. In the case of certain formulae, *Yukti-bhāṣā* enunciates further rules towards making the derived results more and more accurate. Attention of scholars might be drawn here to a series of papers wherein Prof. C. T. Rajagopal, former Director, Ramanujan Institute of Mathematics, University of Madras, and his associates who have worked out, in terms of modern mathematics, the above-said series and the different formulae enunciated in the *Yukti-bhāṣā*. They have also shown that these are much prior to the discoveries made more than a century later by the Western scientists, James Gregory (1671), G.W. Leibnitz (1673) and Isaac Newton (1670).[21]

Ch. VII forms a long disquisition of rationale relating to Rsines, their modifications and allied subjects. The chapter commences with an elaborate exposition of the geometrical derivation of the 24 Rsines for $3°45'$ each and explanations of allied terms like Rcosine, Rversed sine, arc, *bhujā-khaṇḍa*, *koṭi-khaṇḍa*, *jīva-khaṇḍa* and *khaṇḍa-jyā* and their mutual relationship. Some of the other topics elucidated herein are: Accurate determination of the Rsines, Computation of the Rsine of any given arc, Computation of the arc of any given Rsine, Summation of Rsine differences and of Rversed sine differences. Accurate determination of the circumference of a circle making use of the said summations, Rsine of the sum of two angles, Cyclic quadrilaterals and their properties, Square of the area of a circle, Derivation of Rversed sines, Derivation of Rsine shadow, Surface area of a sphere and Volume of a sphere. The author of the *Yukti-bhāṣā* elucidates the rationale of the several items

[21](i) K. Mukunda Marar and C. T. Rajagopal, 'On the Hindu quadrature of the circle', J. Bombay Branch of the Royal Asiatic Soc., NS 20. 65-82 (1944). (ii) C. T. Rajagopal and A. Venkataraman, 'The Sine and Cosine power series in Hindu mathematics', J. Royal Asiatic Soc. of Bengal, Sc., 15. 1-13 (1949). (iii) C. T. Rajagopal and M. S. Rangachari, 'On an untapped source of medieval Keralese mathematics', Archive for Hist. of Exact Science, 18, 89-91 (1978). (iv) C. T. Rajagopal and M. S. Rangachari, 'On medieval Keralese mathematics', Archive for Hist. of Exact Science, 35, 91-99 (1986).

either geometrically or algebraically or using both means as the occasion demands.

Ch. VIII deals with the Planetary Theory and the computation of Mean and True Planets. At the outset, the concepts of the Mean Sun, Moon and other planets, their linear velocities and angular motions are described. As in all other Hindu astronomical treatises the assumption is made that the linear velocity of all the planets is the same but the angular motion varies depending on the dimension of their circular orbits. The Epicyclic Theory for the Sun and Moon and for the other planets involving the manda and *śīghra* epicycles is explained.

In a nut-shell the planetary theory broadly is like this. The Earth is the centre and the Sun and the Moon go round the Earth. As for other planets, with Earth as centre, the *śīghra* goes round the Earth with the mean motion of the Sun. The mean planet moves on a circle with the *śīghra* as centre. The true planet is on the *mandocca* circle with the mean planet as its centre. Alternatively, the last two circles can be interchanged. This theory is advocated by Nīlakaṇṭha in his commentary on *Āryabhaṭīya*, and practically all later Kerala authors have followed suit. In fact Nīlakaṇṭha tries to say that it was the view of Āryabhaṭa also. If *śīghra* is identified with the Sun itself, then this agrees broadly with the modern theory with the positions of Earth and Sun reversed.[22]

The rationale for adopting three or four stages of operations to find the geocentric longitude of a planet is also explained. This particular aspect has been baffling the scholars. It is generally held that the Hindu astronomers were not aware that the true geocentric longitude is to be obtained in two steps by first applying the *manda* correction and, using the corrected planet, the *śīghra* equation is to be obtained and applied to the once corrected planet; therefore they adopted different methods involving three or four stages in different ways.[23] However, later Kerala works like *Sphuṭanirṇaya* have clearly

[22] On this, see K. Ramasubramanian, M. D. Srinivas and M. S. Sriram, 'Modification of the earlier Indian planetary theory by Kerala astronomers (c.1500 AD) and the implied heliocentric picture of planetary motion', Current Science, 66 (May 1994) 784-90.

[23] See, for instance, E. Burgess, Translation of the *Sūryasiddhānta*, p.86, lines 3ff.;

explained the procedure in two stages correctly. This is not surprising if the longitude is arrived at on the basis of the planetary theory described above. Nīlakaṇṭha also, in his commentary on *Āryabhaṭīya*, has given a similar method.

Then how and why have these three or four stages-method get in ? Some explanation has been given in some papers.[24] But in the *Yukti-bhāṣā*, the rationale has been expounded beautifully. In short, it is like this. In arriving at the *śīghra* correction the 'mean' *mandakarṇa* is taken instead of the 'true' *mandakarṇa*. This is because the tables of *śīghra-jyās* can be constructed only on the basis of 'mean' *mandakarṇa*. Hence a correction becomes necessary for the *śīghra-phala*. To achieve this, a correction is effected in the 'true' *manda* planet in such a way that this correction together with its effect on the tabular *śīghra-phala* will compensate for the error in *śīghra-phala* due to the difference in *mandakarṇa*. The longer commentary on *Tantrasaṅgraha* also gives this rationale as also the planetary theory. There are many small tracts[25] in Kerala wherein various alternate methods are advocated to give effect to this correction. It is a moot point whether Āryabhaṭa and other astronomers were aware of this rationale or they just hit at these methods by trial and error. The treatment of latitude with regard to the planets in the *Yukti-bhāṣā* is also satisfactory. The theory is that the *śīghra* circle is always on the ecliptic plane and only the plane of the planet's path gets deflected. This accords with facts and therefore, the resulting helio and geocentric latitudes also represent the correct position as also the distance between the Earth and the planet making allowance for the latitude.

Chapter IX deals with the celestial sphere and the related great circles such as meridian, horizon, equator, ecliptic and their secondaries and the small circles such as day parallels etc. The poles of great circles and their relation with mutually perpendicular great circles, the equinoctial and solstitial points are explained. First the celestial sphere for an observer on the terres-

P. C. Sengupta, *Khaṇḍakhādyaka*, p.58, last para.

[24] O. Neugebauer, 'The Transmission of planetary theories in ancient and medieval astronomy', Scripta Mathematica, New York, 1956, App. 'Hindu planetary theory', p. 12ff.

[25] See for instance, K. V. Sarma, Rationales of Hindu astronomy, Pt.I, Hoshiarpur, 1979, Tracts 24, 25 and 26.

trial equator is described and then the changes are explained as the observer moves to a northern latitude. Then the effects of *Ayanacalana* or the backward motion of the first point of Aries on the equator, ecliptic etc., are considered. Lastly the procedure for the construction of an armillary sphere is described.

In continuation are dealt with Declination, Right Ascension and related problems. In the first place the declination (*Krānti*) of the Sun (an object on the ecliptic) is considered. The formula for this, viz.,

$$\sin(\text{declination}) = \sin(\text{longitude}) \times \sin(\text{obliquity}),$$

is got by using the properties of similar triangles and by the rule of proportion. In addition, two more concepts which are not found in other works are introduced. These are: Draw a secondary to the equator through the First point of Aries and a secondary to this circle passing through the Sun. The arcs between their point of intersection and the Sun and the First point of Aries are called *krānti-koṭi* and *nata*, respectively. (*Krānti-koṭi* is not cosine of *krānti* which is known as *Dyujyā*). We may call them 'Inverse declination' and 'Inverse R.A.'. These concepts are used to determine various other formulae which are described in the next chapter. Then the method of arriving at the R.A. or *Kālajyā* is described.

But the most interesting derivations in this chapter are the exact formulae for declination and R.A. of a star which is not on the ecliptic and therefore has a latitude, not necessarily of a small magnitude. This problem has not been satisfactorily solved by Indian astronomers till then and only approximate solutions had been given which are valid only if the latitude is small.[26] The formulae derived here accord with the modern formulae.

Chapter X tackles fifteen types of astronomical problems. Taking the Sun and the *krānti* triangle and the *krānti-koṭi* triangle there are six elements, viz., longitude, R.A., declination, obliquity of the ecliptic, *nata* and *krānti-koṭi*. The problem is: Given two of these six, the other four are to be found out. There will be in all 15 cases which will arise. All these cases are

[26] See P.C. Sengupta, *Khaṇḍakhādyaka*, pp.189-91, Problem viii.

examined and the methods for finding the other four elements are discussed exhaustively from fundamentals. It is a very interesting and instructive exercise to understand how the ancient astronomers' mind worked in solving problems on spherical trigonometry.

Chapter XI deals with Direction and Gnomonic Shadow. This Chapter starts with the method for finding accurately the east-west and north-south lines or directions. The method adopted is the familiar one, marking off the points where the shadow of the gnomon touches the circumference of a circle with centre at the foot of the gnomon, forenoon and afternoon, and joining them to get the east-west line. Since there will be a change in the declination of the Sun between the forenoon and afternoon this line will not accurately depict the east-west line and a correction is provided to rectify the error. Then *Kujyā* and *Carajyā* are defined and the formulae derived. The method for arriving at the shadow for the given time is next considered and the standard method is adopted. But in this two corrections that are to be applied are discussed in *Tantrasaṅgraha*.[27] The Sun is not a point but a sphere, and the umbra is to be taken as the shadow, and correction is needed for this. Secondly the correction due to the parallax of the Sun is also explained. The converse problem of finding time from shadow is tackled by the standard method after giving effect to the above two corrections. Then the problems connected with noon shadow, *Samaśaṅku*, corner shadow etc., are dealt with in the usual manner.

There is again an interesting section concerned with Ten Shadow Problems. We have five elements of the spherical triangle joining the Sun, zenith and the north pole. The five elements are the three sides and two angles of the triangle. That is, zenith distance, co-declination, co-latitude, which are the three sides and, the azimuth and the hour angle, the two angles. (Actually the text would use either these elements or their complements). Out of these five, if any three are known the problem is to find the other two. There will be ten cases to be solved. All these cases are taken up and the solutions are derived methodically on the basis of the properties of spherical triangles.

[27]K. Ramasubramanian and M. S. Sriram, 'Correction of the terrestrial latitude in *Tantrasaṅgraha*', Indian Jl. of History of Science, 38. 129-144 (2003).

This subject is dealt with in *Tantrasaṅgraha* also, as it should be, and, based on this, R. C. Gupta has presented a detailed paper.[28] He has however, remarked that the rationales of the rules are not given in the work (*Tantrasaṅgraha*) and his paper verifies the rules by the modern formulae. However, the rationales are fully documented here in *Yukti-bhāṣā*. Essentially they involve the application of several declination type formulae to solve a particular problem. In fact the rationales are also given in the longer commentary on *Tantrasaṅgraha*, *Yuktidīpikā*. After all, *Yukti-bhāṣā* and *Yuktidīpikā* have the same origin.

Lagna and *Kālalagna* are treated in continuation. The equator cuts the horizon of any place at two fixed points, east and west. The ecliptic also cuts the horizon at two points but since the position of the ecliptic varies every moment these points also vary moment to moment oscillating on either side of the east and west points. These two points at east and west are called *Udayalagna* and *Astalagna* or the rising and setting points of the ecliptic. The distance from the First point of Aries to the east point and *Udayalagna* are called the *Kālalagna* and *Lagna*, respectively. This chapter deals with the method of calculating these two longitudes. Arriving at the *lagna* is a standard problem in all texts. The procedure followed generally is to find the rising times of the twelve signs for the local place and, from the longitude of the Sun, obtain by interpolation the longitude of the rising point or *lagna* for the desired time. This is bound to be approximate. However, in *Yukti-bhāṣā* a direct method is adopted. First the zenith distance of nonagesimal (*Dṛkkṣepa*) is obtained and from that the *lagna* is arrived at. This method again owes its origin to *Tantrasaṅgraha*.

Chapter XII deals with Eclipses and parallax correction. In the treatment of the circumstances of an eclipse there is not much to comment. However, we deal with two matters, one the second correction for the Moon and the other the effect of parallax in longitude and latitude. The second correction for the Moon which takes the place of the modern Evection plus the deficit in the equation of centre of the Moon was known in India at least from the

[28] R. C. Gupta, 'Solution of the astronomical triangle as found in *Tantrasaṅgraha* (1500)', Indian Jl. of Hist. of Science, 9. 86-99 (1974).

10 century. There is a detailed paper by K. S. Shukla on this subject[29] wherein he has dealt with this subject as contained in *Tantrasaṅgraha* also. As can be expected, *Yukti-bhāṣā* follows *Tantrasaṅgraha* more or less and, in addition, gives the basis for this correction. This basis or theory is the same as explained in Shukla's paper. However, a refinement has been made in this work and that is when the Moon has a latitude, its distance from Earth should be calculated taking the latitude also into account.

Now, coming to parallax, the idea is to calculate the effect of parallax in the longitude and the latitude known as *lambana* and *nati*, respectively. The usual formulae for these, as is in vogue in Kerala texts, are derived on the basis that the object is on the ecliptic, that is, there is no latitude. While other texts deal with this problem differently giving, in some cases, only approximate results, the method followed here is exact. Further, other texts do not take into account the latitude on the plea that during an eclipse the latitude of the Moon is negligible. But here necessary formulae are derived taking into account the latitude also.

Then to determine the angle of the Sun's or the Moon's disc at which the eclipse starts or ends and to graphically depict an eclipse, the *valana*-s or deflections are required to be calculated. Generally the texts deal with two deflections, *ayanavalana* and *akṣavalana*, being the deflections due to obliquity of the ecliptic and the latitude of the place, respectively. In *Yukti-bhāṣā*, in addition, a deflection due to latitude of the Moon is also derived. This deflection is generally found in other Kerala works also.

Chapter XIII is on *Vyatīpāta*. *Vyatīpāta* occurs when the Sun and the Moon have equal declination and they are in the same *ayanabhāga* but in different quadrants or in different *ayana*-s but in the same type of quadrant, odd or even. This is considered very inauspicious, particularly in Kerala, and the days on which *vyatīpāta* falls are discarded for the performance of good *karma*-s. All Kerala works on astronomy devote a chapter for determining *vyatīpāta*. Not only this, there are full-fledged works which deal exclusively

[29] K. S. Shukla, 'The evection and the deficit of the equation of the centre of the Moon in Hindu astronomy', Proceedings of the Banaras Mathematical Society, NS, 7.ii (Dec.1945), 9-28.

with *vyatīpāta* and, as in the case of eclipses, the beginning, middle and ending of *vyatīpāta* are defined and the methods to arrive at these moments are also explained. From the definition it will be seen that the declinations of the Sun and the Moon are required to be calculated for this purpose. The declination of the Sun presents no difficulty. In the case of the Moon allowance has to be made for the latitude. The method of arriving at the exact declination of the Moon has already been explained in Chapter IX.

In this chapter an alternate method is given with its rationale. The method adopted is like this. The angle between the Moon's path and equator is not constant but varies between 19.5 to 28.5 degs. depending upon the position of its node. The exact figure for the moment is first obtained. Then the distance between the point of intersection of the Moon's path and the equator, and the Moon is got by making a correction to the node's longitude.

This correction is called *Vikṣepa-calana*. The method of arriving at these two elements, with rationale, is explained. With these two elements, the declination of the Moon is obtained in the same way as for the Sun. This is a very interesting procedure and appears to be peculiar to Kerala.

In Chs.XIV and XV, *Dṛkkarma* or Reduction to observation is explained with rationale as also *Candraśṛṅgonnati* relating to the phases of the Moon.

18 Manuscript material

18.1 Malayālam version of *Yukti-bhāṣā*

The present critical edition of *Yukti-bhāṣā* has been prepared on the basis of eight exemplars in palm-leaf, paper and print, designated A to H, procured from different sources.

A. The edition of Part I alone of the work covering general mathematics, issued under the title *Yukti-bhāṣā* : *Onnāmbhāgam*: *Sāmānyagaṇitam*, edited by Rāma Varma Maru Thampuran and A. R. Akhileswarayyar, (Mangalodayam Ltd., Trissur, M.E. 1123 : A.D. 1948, pp. 394), now out of print. The copious Notes and Appendices provided to the edition greatly enhance the value of this publication.

B. Ms. No. 486 of the Sree Sarada Education Society Research Centre, containing both Parts I and II of the work. It has been scrupulously copied in pencil from a palm-leaf manuscript, possibly towards 1940, in a quarter size notebook. Though closely written, the writing is legible and the text contained is generally pure. Following *Yukti-bhāṣā*, written on pages 1-105, the notebook contains four more works, all on *Jyotiṣa*, being: *Sadratnamālā* of Śaṅkara Varman with Malayālam commentary by the author himself (pp.105-132), *Bhūgola-ñāyam* (pp. 133-35), *Sādhanakriyā* (pp. 136-140) and *Horāsāra* (pp. 147-180). In continuation, pages 181 to 218 carry miscellaneous matters including some mathematical calculations. This manuscript had been presented to the present editor by H. H. Rāma Varma Maru Thampuran several years back.

C. A well-preserved palm-leaf manuscript belonging to the Sree Sarada Education Society Research Centre, in 199 folios. The manuscript carries the whole work, Parts I and II. The text preserved here is generally pure. It carries, at the end, the undermentioned postcolophonic statement.

> *karakṛtamaparādham kṣantumarhanti santaḥ, śrī gurubhyo namaḥ, śrī sarasvatyai namaḥ, vedavyāsāya namaḥ, ente caṅṅamkunnattu bhagavati śaraṇamāyirikkaṇam.*

Here, the scribe, who does not name himself, refers to his personal deity, being Goddess *Bhagavatī* of *Caṅṅamkunnu* which should be his native village.

D. Ms. No. 12513 of the Oriental Research Institute and Manuscripts Library of the Kerala University, Trivandrum. This palm-leaf manuscript, though written in legible characters, is britle and very much worm-eaten which often makes it unreadable. The collation was done from a xerox copy of the manuscript supplied by the Library. At the close it carries the following post-colophonic verse.

vyalekhi yuktibhāṣā vipreṇa brahmadatta-saṃjñena |
ye golapathasthāḥ syuḥ kalirahitāḥ śodhayantaste ||

Here the scribe names himself as Brahmadatta and the date of the completion of writing the manuscript by the chronogram *ye golapathasthāḥ syuḥ* in the *Kaṭapayādi* word-numerals, viz., 1771931, falling in A.D. 1639.

E. Ms. No. T. 90 of the Malayālam Section of the Oriental Research Institute and Manuscripts Library of the Kerala University, Trivandrum. This is a very readable copy made in M.E.1100 (A.D.1925) from a palm-leaf manuscript carrying only Pt. II of the work. The text contained herein is generally pure.

F. Ms. No. D. 332 of the Malayālam Section of the Madras Govt. Oriental Manuscripts Library, as printed by the Library issued under the title *Gaṇita-yukti-bhāṣā* by T. Chandrasekharan (Madras, 1953). The manuscript carries the whole work but is highly erroneous and the edition has added its own share of errors.

G. A paper transcript of Part II of the work preserved in the Sree Sarada Education Society Research Centre, Madras. It is written in shapely script in 351 pages. The text preserved herein is pure.

H. A copy of Ch. VIII alone of the work written in pencil on foolscap paper presented to the present Editor by H. H. Rāma Varma Maru Thampuran of the Cochin royal family. The text contained herein is pure.

18.2 Sanskrit version of *Yukti-bhāṣā*

While the author of *Yukti-bhāṣā* has obviously composed the work only in Malayālam, there is available a Sanskrit version as well of the work. It exists in Paper transcript No. R. 4382 of the Madras Govt. Oriental Manuscripts Library. It had been copied from a palm-leaf manuscript with the Raja of Chirakkal (Malabar) in 1923-24 by N. Parthasarathi Acharya. The writing herein in Devanāgarī lacks space between words and leaves no stops after sentences. It is mostly a literal word to word translation, with even the placement of the words as in the Malayālam original, which makes quaint reading since the word order in Malayālam sentences, quite often, differs from that in Sanskrit. Malayālam words are often used with Sanskrit terminations. Gender division between adjectives and the nouns that they qualify is not maintained, following the practice in Malayālam. Compound words are often formed putting Malayālam and Sanskrit words together. Malayālam verbs are used with Sanskrit suffixes. The nominal and verbal suffixes are also used quite often erroneously. Indeed, the Malayālamised Sanskrit in this version of the work can be properly understood only by one knowing well the Malayālam language.

It would seem that the Sanskrit version has been prepared by a Malayālam scholar whose knowledge of idiomatic Sanskrit was limited. Possibly this work had been taken up at the instance of a member of royal family of Chirakkal, with the view that this great work should appear also in Sanskrit.

Despite the above-said limitations, the Sanskrit version has been found helpful in identifying correct readings where the manuscripts of Malayālam version exhibited doubtful readings, and also in filling the haplographical gaps whenever they occurred in the Malayālam manuscripts.

19 Editorial presentation

The aim of this edition of *Yukti-bhāṣā* is to present a critical text of the work based on the available manuscripts. The mediaeval Malayālam prose found in the manuscripts has been recorded as such in the edition, and the variant readings found therein are recorded as footnotes. The quaintness of medieval Malayālam prose and the absence of punctuation marks in the manuscripts did not really pose a problem in editing the work for two reasons. First, the subject treated belongs to the discipline of science which is definitive in nature, and, secondly, the treatment of the subject is methodical, analytical and elucidatory. The correct deciphering of even obscure words was not difficult though numerous subjects are dealt with.

20 Appendices

The following appendices have been included in Volume II of this publication.

I. Glossary of technical terms: Malayalam-English

A full Glossary of the Technical terms used in the *Yukti-bhāṣā* has been provided. For most of these English equivalents are available which have been duly noted against the respective terms. Wherever necessary, short explanations have also been provided towards making their meaning explicit. When a term has varying meanings, that has also been pointed out. It might be noted that the Malayālam and the Sanskrit terms are always meaningful, with the result that the meanings of simple or compound technical terms are identified and understood through a knowledge of basic Sanskrit.

Characteristically enough the *Yukti-bhāṣā* 'describes' and 'defines' every technical term on its first occurrence in the work. In order to direct the attention of the reader to the said description and definition their relevant places of occurrence in the text have been indicated with the chapter number and section number where it occurs, against the term in the Glossary. It is to be expected that this would, to a great extent, serve also as a Subject Index to the Volume in view of the mass of documented information given herein.

II Citations of authors and texts

Appendix II collects together the authors and texts cited in the *Yukti-bhāṣā*.

Acknowledgements

In the task of preparing the present critical edition of the rather extensive work *Yukti-bhāṣā* in its Malayālam and Sanskrit versions, running to several hundred pages, and also the Translation of the work in English, I am grateful for the help rendered by several scholar-friends and the cooperation extended

by Manuscripts Libraries. First and foremost I am grateful to H. H. Rāma Varma Maru Thampuran of the Cochin royal family who had himself brought out an edition of Part I of the work. Besides a copy of the book, he also favoured me with several of his notebooks containing other astronomical works as well.

I also wish to express my gratitude to P. K. Koru of Pavaratty (South Malabar), a pioneer investigator of Kerala astronomy and author of several books on the subject. He had also introduced me to the guardians of several manuscripts repositories in Malabar in my quest for manuscripts. To S. Hariharan, Director, Life Insurance Corporation of India, and Prof. M. D. Srinivas, formerly Professor in the Department of Theoretical Physics of the University of Madras, who had consistently cooperated with me in the present and earlier studies on the subject of Indian mathematics and astronomy, I am very much beholden. My thanks are due also to Dr. Navjyoti Singh of NISTADS, New Delhi, in this connection.

To Volumes I and II of the present edition of *Gaṇita-yukti-bhāṣa*, containing its Malayālam Text and Translation into English, have been added detailed Notes explaining the numerous enunciations and rationale occurring in the work. Thanks are due to Dr. K. Ramasubramanian, Prof. M. D. Srinivas and Prof. M. S. Sriram, for providing highly elucidatory Explanatory Notes, involving the explanation of novel mathematical and astronomical methods evolved by Kerala Astronomers.

I am beholden also to Prof. T. Bhaskaran, formerly Curator, Govt. Oriental Mss. Library, Madras, and Dr. P. Visalakshi, Director of the Kerala University Or. Res. Inst. and Mss. Library for making available copies of the manuscripts of *Yukti-bhāṣā* in their Libraries. While my two grandsons, Dr. S. A. S. Sarma and S. S. R. Sarma, helped me in various ways in my work, the collation of the manuscripts was done scrupulously by Dr. T. Narayanan Kutty, Ramani, M. J., Meena Kannan and Jameel Ahmed. Dr. Kutty has assisted me in various other ways and in the preparation of the Appendices, as well. I also wish to thank Sri G. Girish and Sri I. P. Muralidharan (Korel Graphics) for help in typesetting of this work.

Last but not least, I am beholden to the Indian Institute of Advanced Study, Shimla, for sponsoring this work as a Research Project of theirs and giving me the opportunity to prepare the critical edition of *Yukti-bhāṣā* in Malayālam and Sanskrit with an English Translation.

S.S.E.S. Research Centre **K. V. Sarma**
32/2, II Main Road
Gandhi Nagar, Adyar
Chennai - 600 020

Empty page – Introduced deliberately

Gaṇita-Yukti-Bhāṣā
(Rationales in Mathematical Astronomy)

of

JYEṢṬHADEVA

Malayalam Text Critically Edited with English Translation

by

K. V. SARMA

With Explanatory Notes in English

by

K. RAMASUBRAMANIAN
M. D. SRINIVAS
M. S. SRIRAM

Volume One
Chapters I – VII : Mathematics

Hindustan Book Agency

2008

To be treated as – Blank page (introduced deliberately)

Foreword

One of the most significant events in the history of mathematics has been the development of infinitesimal calculus, achieved independently by Leibniz and Newton in the 17th century. It is remarkable that the work of the Kerala school of mathematics during 14th-16th centuries already anticipates this development.

These contributions of the Kerala mathematicians during the medieval period might well have remained an unwritten chapter in the history of Indian mathematics had it not been for Charles Whish, a civilian employee of the East India Company, who published in 1830s a paper highlighting their achievements. Since the middle of the 20th century, Indian scholars have worked on these contributions and now the work of the Kerala school during the medieval period is well recognised. Mādhava (c. 14th cent) and Nīlakaṇṭha Somayājī (c. 1444-1545) were the leading personalities of this school. Jyeṣṭhadeva, a junior contemporary of Nīlakaṇṭha authored an important work called *Gaṇita-Yuktibhāṣā* which is based on the work of the Mādhava school. There are at least two unique aspects of this work. First, unlike the usual texts in mathematics and astronomy which are written in Sanskrit, *Yuktibhāṣā* is written in the local language Malayalam, besides, it is in the form of an expository text which includes detailed explanations and proofs of various results.

Though, there have been earlier editions of *Yuktibhāṣā*, a truly critical edition with English translation is indeed very desirable and this in fact has been achieved by late Prof. K. V. Sarma, an eminent scholar and indologist, who began to collect manuscripts of the text from 1950s. An earlier draft of the text with English translation, prepared by him, has been in circulation among a few scholars since nineties. However, from 2000 onwards, he re-worked on these with the help of some fresh manuscript material and revised both the text and the translation thoroughly. He was very particular that the English translation of *Yuktibhāṣā* should be supplemented by detailed explanatory material. He requested Professors K. Ramasubramanian, M. D. Srinivas and M. S. Sriram to take up this work which they did. Unfortunately, Prof. K. V. Sarma passed away three years ago just when the work was nearly complete. After some delay in publication, the present two volumes, one of which contains the Malayalam text of the mathematics part of *Yuktibhāṣā* and its English translation and the other the astronomy part of the text with its English translation, are now being published along with explanatory notes. I am very happy that Prof. K. V. Sarma's wish has been fulfilled. As one associated with the Hindustan Book Agency, I am also glad that the Agency is publishing these volumes, which I believe will be of great value to the academic community.

C. S. Seshadri
Director
Chennai Mathematical Institute

Preface

We are writing this preface with a deep sense of grief as our senior colleague Prof. K. V. Sarma is no more with us to celebrate the completion of a work that was so dear to him and occupied much of his time during the last years of his life. Professor Sarma passed away on the *Makara-saṅkrānti* day, January 14, 2005, barely a few days after we had completed the final draft of Volume I of *Gaṇita-Yuktibhāṣā* containing the Malayalam Text, English Translation and Explanatory Notes of the Mathematics Section of this great work. A few months earlier he had finalised the editing of a Sanskrit version of *Gaṇita-Yuktibhāṣā*, which has been published by the Indian Institute of Advanced Study, Shimla, in 2004. He had also completed the editing of the Malayalam Text of Volume II on Astronomy and was also more or less through with marking final corrections to his English Translation.

Publication of a critically edited text of *Gaṇita-Yuktibhāṣā* together with English Translation and Notes has been a long cherished project of Professor Sarma. Even though the importance of *Gaṇita-Yuktibhāṣā* was brought to the notice of modern scholarship by C. M. Whish in 1830s, an edition of the Mathematics part of the text (along with notes in Malayalam) was published only in 1948 by Ramavarma Maru Thampuran and Akhileswarayyar. In 1953, the Government Oriental Manuscripts Library of Madras issued a rather unsatisfactory edition of the whole work. Prof. Sarma's efforts to bring out a critical edition of the whole work began around the same time. With the encouragement of Ramavarma Thampuran, he collected several manuscripts of the text. Some of his earlier drafts of the critical edition of the text and its English translation have been in circulation amongst a few scholars since the early nineties. From around 2000, he reworked on the critical edition after he got access to some fresh manuscript material. He also revised his translation thoroughly in the light of recent investigations on the contributions of the Kerala School of Astronomy.

Prof. Sarma was very particular that the English Translation of *Gaṇita-Yuktibhāṣā* should be supplemented by detailed Explanatory Notes elucidating the theories and processes expounded in the text by means of equations, diagrams and notations currently employed in mathematics and astronomy. He was kind enough to invite us to take up this work. It was only his relentless enthusiasm and active involvement which made this work possible.

We sincerely hope that these volumes will take their due place in the long series of illustrious works of the Kerala School of Astronomy that have been edited and published by Prof. Sarma.

We would like to record our deep sense of indebtedness to late Prof. Sarma, for all the kind encouragement and guidance we have received from him during the course of this work. We are very much obliged to Mr. Jameel Ahmed, Research Scholar, Department of Malayalam, University of Madras, who spent countless hours reading the Malayalam Text with us. Without his enthusiastic help it would not have been possible for us to carefully edit the English Translation and prepare the Explanatory Notes. We would also like to thank Sri I. P. Muralidharan of Korel Graphics for the personal attention and care that he bestowed in typesetting the final Malayalam Text.

We are grateful to Prof. C. S. Seshadri, Director, Chennai Mathematical Institute, for kindly contributing a Foreword to this Volume. We are deeply indebted to him and his colleague Prof. R. Sridharan and also to Prof. J. V. Narlikar of IUCAA, Pune, for their valuable advice, encouragement and support, which have immensely helped us in seeing this work through to publication.

We would like to acknowledge the support provided by the Indian Institute of Advanced Study, Shimla, towards the preparation of this work by the award of a Research Project to Prof. K. V. Sarma and Research Associateship to Dr. K. Ramasubramanian. We are especially grateful to Prof. G. C. Pande, then Chairman of the Institute, for the keen interest that he took in this work all through. We also express our gratitude to Sri Jainendra Jain and Sri Devendra Jain of the Hindustan Book Agency for publishing this work as a part of their series on Culture and History of Mathematics.

K Ramasubramanian
Cell for Indian Science and Technology in Sanskrit
IIT Bombay

M D Srinivas
Centre for Policy Studies
Chennai

M S Sriram
Department of Theoretical Physics
University of Madras

Table of Contents

ENGLISH TRANSLATION 1–145

Gaṇita-Yukti-Bhāṣā

English Translation

Chapters 1 – 7

To be treated as – Blank page (introduced deliberately)

Chapter 1

The Eight Mathematical Operations

1.1 Benediction

pratyūhavyūhavihatikārakaṃ paramaṃ mahaḥ |
antaḥkaraṇaśuddhiṃ me vidadhātu sanātanam ||

May the Supreme Effulgence which sweeps off assailing masses of obstacles confer on me eternal purity of mind.

gurupādāmbujaṃ natvā namaskāryatamaṃ mayā |
likhyate gaṇitaṃ kṛtsnaṃ grahagatyupayogi yat ||

Having bowed at the most venerable feet of the teacher, the entire calculation, whatever is needed for the computation of the motions of the planets, is being set out by me.

1.2 Nature of numbers

Here, at the outset, with a view to expound, following the *Tantrasaṅgraha*, all the calculations as are needed for the computation of the motion of the planets, first the elementary calculations (*gaṇita*), such as addition (*saṅkalita*) etc., are being set out. Now, *gaṇita* is a special analysis (*parāmarśa-viśeṣa*) involving numbers or digits (*saṃkhyā*) in relation to objects amenable to being counted (*saṃkhyeya*). The numbers are firstly, the numerals from one up to ten, which are the 'basic (digits)' (*prakṛti*). Each of these, multiplied (in order) by ten, extending up to hundred, function like their 'extensions' (*vikṛti*). The place of the (extensions) which result by multiplying the (bases) by ten (i.e., the numbers 10 up to 100) would be higher by one place from that of the basic digits. These 'extensions' themselves will, (in their turn), function like 'bases' for their 'extensions' formed by multiplying them by ten, resulting in numbers up to thousand. Thus, numbers multiplied by ten would result in their next 'extensions'; they would also be higher by one place. The nomenclature of the numbers up to eighteen places formed in this manner is:

> *ekadaśaśatasahasrāyutalakṣaprayutakoṭayaḥ kramaśaḥ* |
> *arbudamabjaṃ kharvanikharvamahāpadmaśaṅkavastasmāt* ||
> *jaladhiścāntyaṃ madhyaṃ parārdhamiti daśaguṇottarāḥ saṃjñāḥ* |
> *saṃkhyāyāḥ sthānānāṃ vyavahārārthaṃ kṛtāḥ pūrvaiḥ* ||
>
> *Eka, daśa, śata, sahasra, ayuta, lakṣa, prayuta, koṭi, arbuda, abja, kharva, nikharva, mahāpadma, śaṅku, jaladhi, antya, madhya* and *parārdha*: These are the names of the place-values, each ten-fold of the previous, as designated by the ancient (scholars).
>
> (*Līlāvatī*, 10-11)

Here, if the above principle of multiplication (by ten) and (corresponding) change of place (as we place them higher) are not assigned to the digits, then there will be no limit to the way in which numbers may be designated, and it would be impossible to recognise the numbers and their order. Hence, the conception as above is made for practical purposes. The digits from one to nine occupy the first place. When multiplied by ten they occupy the second place and are put one place to the left (and so on). These (several places) are designated as 'unit's place', 'ten's place' and so on. Thus is the nature of numbers.

1.3 Mathematical operations

Now, are indicated the different computations (*gaṇita-bheda*) employing (numbers). Computations are twofold, (resulting, respectively in) an increase (*vṛddhi*) or a decrease (*kṣaya*). Computations resulting in increase are the 'addition' (*yoga*), 'multiplication' (*guṇa*), 'squaring' (*varga*) and 'cubing' (*ghana*). Then, those resulting in decrease are the 'subtraction' (*viyoga*), 'division' (*haraṇa*), 'square-root' (*varga-mūla*) and 'cube-root' (*ghana-mūla*). Here, 'addition' is operative in 'multiplication', 'multiplication' in 'squaring' and 'squaring' in 'cubing'. Similarly, 'subtraction' is operative in 'division', 'division' in 'square-root', and 'square-root' in 'cube-root'. Thus the preceding (operation) is involved in the succeeding one.

1.4 Addition and subtraction

The process of these operations is now indicated. Here, when unity is added to a number, the result would be, in order, the next higher number in the ascending order, and so on endlessly. Similarly, when unity is subtracted from a higher number, the result would be, in order, the next lower number in the descending order. This is the nature of all numbers. There, given any number, when higher numbers are conceived of, they will be the result of the addition, in order, of unity (to the preceding numbers). Similarly, given any number, when lower numbers are conceived of, they would be the result of the subtraction, in order, of unity (from the preceding numbers). Thus, when the nature of the numbers in the ascending and descending order is conceived, the results would be the addition and subtraction of unity (to or from preceding numbers). Suppose it was intended to add, to any number, unity a certain number of times. Then, if the same number of units is added together separately and the result obtained is added to the desired number, then, too, the total will be the same. Thus, addition can be conceived in this manner. In the same manner, if it was intended to subtract, from any number, unity a certain number of times, the result obtained will be got also by subtracting the whole at one stretch. Thus, if the higher and lower numbers are to be known, addition and subtraction need to be effected. Addition and subtraction are known by the terms *saṅkalita* and *vyavakalita*. Unity is designated by *rūpa* and *vyakti*. Thus (have been set out) addition and subtraction.

1.5 Multiplication: In general

1.5.1 Methods of multiplication

Then, multiplication: Really speaking, it is only addition. There, when something is multiplied by another, what is multiplied is called 'multiplicand' (*guṇya*) and that with which multiplication is done is called 'multiplier' (*guṇakāra*). Here, the multiplicand is being added to and it may be noted that the multiplicand itself is the additive. The multiplicand is added as many times as there are unities in the multiplier. Addition, as per this procedure, is multiplication. It is explained herein below.

1.5.2 First method of multiplication

Here, to start with, the last (i.e., the highest) digit of the multiplicand may be multiplied by the multiplier, the advantage being that there is no confusion and the digits, by which multiplication has been done and those by which multiplication is yet to be done, do not get overlapped. Let the last digit of the multiplicand be unity and suppose it has to be multiplied by 100. Unity has then to be repeated 100 times. When it is repeated ten times, there will be a rise of unity in the ten's place, as per the rule stated earlier. When unity is again repeated ten times, there will result two in the ten's place. When it is repeated a hundred times, that will result in unity in the hundredth place.

Therefore, if there was unity in the hundredth place of the multiplier, move the last digit of the multiplicand to the hundredth place as counted there from. It would then have been multiplied by hundred. At this juncture, the occurrence of digits below the last digit of the multiplicand may be ignored since they are not of any utility here. The above being the case, place the multiplier above the multiplicand in such a manner that its first place is above the last place of the multiplicand. Now, if the last digit of the multiplier is 1, place the last digit of the multiplicand below the last place (*antya*) of the multiplier. If it is 2, place twice the last digit of the multiplicand. This would mean that it has been multiplied by the last digit of the multiplier. Now, the place next (lower) to the last is called penultimate (*upāntya*). Multiply the last digit of the multiplicand as many times as the penultimate digit of the multiplier and place it (below the said penultimate digit). This would mean that the multiplication by the penultimate has been done. Continue, in this manner, multiplying the last digit of the multiplicand with all the digits of the multiplier up to its first place and place the results below the respective place of the multiplier. This would mean that the last digit of the multiplicand has been multiplied by all the digits of the multiplier. If any place in the multiplier has no digit (*saṃkhyā*) and is zero (*śūnya*), the multiplicand need not be placed below it. That place might get filled by numbers raised from other (lower) places. Now, place the multiplier in such a manner that its unit's place is against the penultimate digit of the multiplicand. Multiply that (penultimate) digit also as before. Follow this procedure till the first place of the multiplicand is reached. Then the entire multiplicand would have been multiplied (by the multiplier).

1.5.3 Second method of multiplication

The method of multiplication could be in the following manner, as well. Multiply the multiplier separately by the different digits of the multiplicand and add the results with due reference to places. Here, it is not essential to start with the last place, as there is no possibility for confusion between the digits. Again, multiplication might be done by different parts (digits) of the multiplier instead of those of the multiplicand. Let the multiplier be in three digits, the number being 234. Take it in three parts. That is, suppose there are three multipliers, the first being 200, the second 30 and the third 4. There, assume the multipliers to be three in number, place the multiplicand at three places and multiply by each of these three (parts). Add without interchanging the places. This will also give the result of the abovesaid multiplication. Here, at one place (the multiplicand) would have been repeated 200 times, at another 30 times and at the third 4 times. When all these are added, the result of the multiplication by 234 would be obtained.

1.5.4 Third method of multiplication

Multiplication can be done also in another manner without reference to place values. For this, split (the said multiplier into) two parts, the first being 110 and the other 124. The multiplicand might also be taken in parts in a similar manner. Thus, the partitioning might be made with reference, either to the value of the number, or to the places. Thus, the method of multiplication by parts is effected in the same way as (general) multiplication.

1.5.5 Representation of the product as an area

The product of multiplication can be conceived also as the area of a plane figure (*kṣetra*). There will then be ease (in understanding). By plane figure is meant (here) a plane quadrilateral (*caturaśra*). This could be a rectangle or a square. When the multiplicand is larger and the multiplier smaller, think of a rectangle whose length is the same as the multiplicand in units of *daṇḍa* (*kol*) or *aṅgula* (*viral*), and whose breadth is the same as the multiplier, in the same units. Then, if the unit taken is the *daṇḍa*, draw across this figure, breadth-wise and lengthwise, lines at interstices of one *daṇḍa*. The figure will then be filled with squares (*sama-caturaśra*) whose side is of the measure of one *daṇḍa*. These squares will also be set in rows. Along the length will be squares equal in number to the multiplicand and the number of rows formed will be that of the multiplier. If, however, the columns (or breadth-wise rows) are taken, in each column there will be squares equal in number to the multiplier, the number of columns being that of the multiplicand. These squares are termed 'units of area' (*khaṇḍa-kṣetraphala*). When conceived in this manner, there will be as many unit squares of area as when the length and breadth of the figure are multiplied together. Clearly, it is also the multiplier repeated as many times as the multiplicand and the multiplicand repeated as many times as the multiplier.

Besides being the product of multiplication, the figure will have equal diagonals. The (straight) line drawn from one corner of a quadrilateral to the opposite corner through the centre of the figure is called the diagonal (*karṇa*). The figure obtained is called a 'product-area', (rectangle, *ghātakṣetra*). *Ghāta* and *saṃvarga* are synonyms of *guṇana* (multiplication). Further, a *varga* (square) can also be conceived as a plane figure. Here, a *varga-kṣetra* will always be a square (*sama-caturaśra*). The above is multiplication in general.

1.6 Multiplication: Special methods

1.6.1 First special method

Now, for a method to know by how much more or less a product would be when the multiplicand or the multiplier is increased or decreased by any desired number (*iṣṭa*) and then multiplied. Here, when the multiplier or the multiplicand, whichever is smaller, is decreased by the desired number, and the result is multiplied, the figure will be smaller in area; the number of rows will be less by the number decreased. Hence, in order to fill the rows (and reach the size of the original figure), (to the present figure) should be added (the figure) obtained by multiplying the longer side by the desired number. When (the multiplier or the multiplicand) has been increased by a certain desired number, the number of rows would also have increased by that number. Here, (the area) should be reduced by the longer side multiplied by the desired number in order to get the (original) number of rows, since the number of rows has increased by the desired number. Similarly, it is obvious that when the multiplication is done by decreasing or increasing the larger number by acertain desired number, the product thereof should be increased or decreased by the product of the smaller number by the desired number, in order to obtain the original product.

1.6.2 Second special method

Now, to the smaller of the multiplier and the multiplicand, add a big arbitrary number (*iṣṭa*); and from the bigger, subtract a small arbitrary number (*iṣṭa*). Now, when these two are multiplied, the resultant figure will have as many rows increased as the number added, and as many unit squares in each row decreased as the number subtracted; the resultant will be such a figure. There, when it is conceived that a small number is subtracted from a large multiplicand and a large number added to a small multiplier, the figure will have an increased number of rows, each as long as the multiplicand minus the *iṣṭa* (smaller number). There, the increased number of rows is equal to the *iṣṭa* (larger number) of the multiplier. Hence, the product of the chosen number that is added to the multiplier and the multiplicand, minus the number subtracted from it, should be subtracted from the figure (which has resulted). Now, to be added are the number of columns (breadth-wise rows) equal to the *iṣṭa* of the multiplicand. Hence, it would be enough if the multiplier is multiplied by the *iṣṭa* of the multiplicand and added. This would be the desired product. It might be noted that this is the procedure when some desired number is added to or subtracted from both the multiplier and the multiplicand.

1.6.3 Third special method

Now, to the procedure to find what is to be subtracted when the multiplier is divided by a number and the quotient added to the multiplier itself and with the sum thereof, the multiplicand is multiplied. Here, let the multiplier be 12. Let the quotient 1, obtained by dividing the multiplier by itself, be added to it. Then multiply the multiplicand by it. The result will be 13 rows each of the length of the multiplicand. To remove one row there from, the (figure) will have to be reduced, not by itself divided by 12, but by itself divided by 13. This (reduction) will be one-thirteenth of the original to which its one-twelfth had been added. Since this is clear, it follows that the 1 added to the divisor of the first division would be the divisor for the next (division to get the desired subtractand). In a figure having 13 rows, one row to be removed would be its one-thirteenth, since one added to the original twelve would be thirteen, and when one-thirteenth of it is removed, the result is twelve. In the same manner if one-twelfth is reduced from twelve, one-eleventh of the remainder added to it will make it twelve. Hence, when the multiplier is divided by a number and the quotient is subtracted from the multiplier and the result is multiplied by the multiplicand, in order to get the correct result, add the quotient of this product, obtained by a divisor which is less by one than the original divisor. Thus, (in order to get at the result), according as the circumstance warrants, add to or subtract from the said product, the quotient obtained by the said divisor. Or, before multiplication, this relevant part either of the multiplier or the multiplicand, might be calculated and added to or subtracted from it (viz., the multiplier or the multiplicand, as the case may be and the multiplication done): then also the correct result will be obtained. Here, the divisor is the same as said above. It has been stated that the first divisor to which one is added to or subtracted from, acts as the subsequent divisor (to get the correction term). Just as the correct result is reached by reducing the multiplier by the part which has been added to it, the same result will be obtained also by reducing the multiplicand by that part. When the reduction is effected in the multiplier, there will be the reduction of actual rows; while, when the reduction is effected in the multiplicand, there will be reduction in the number of unit squares in each row. That is, compared to the true figure, there has been an increase in breadth and a decrease in length. The area, however, remains the same.

1.6.4 Fourth special method

Now, in the instance where, from among the multiplier and the multiplicand, the multiplier was assumed as 12, the special situation where the quotient obtained when it was divided by 12 is itself multiplied by any number and added to (the multiplier) 12, is set out here. Let the quotient obtained by dividing (the multiplier 12) by 12 be multiplied by 5 and the result be added to the multiplier 12. In the figure which involves the said (revised) multiplier, there will be 17 rows. Here, in order to obtain the number of unit squares in one row, the area will have to be divided by 17. And, to get the true area, the area got as above will have to be reduced by that due to the quotient multiplied by 5. There, the subsequent divisor is formed by adding the selected number, which is multiplying the quotient, to the original divisor. In the case, when the result is subtracted (from the multiplier), the figure would have seven rows. In that case, the number of unit squares in a row will have to be obtained by dividing it by 7. Therefore, the multiplier of the quotient, viz., 5, will have to be subtracted from 12. And, that will be the subsequent divisor. The multiplier of the quotient at both places is the self-same 5. Thus, the conception of products is easier in each of these cases, if it is conceived in the above manner as an area.

1.6.5 Fifth special method

Then, when 12 is the multiplier, that 12 divided by 4 gives a quotient 3. Multiply the multiplicand by that 3. Multiply the product also by 4 which had been taken as the divisor. The result will be the same as that for multiplication by 12. There, when multiplied by 3, the multiplicand will be in three rows. When that is multiplied by 4, there will be four sets of three rows. Thus, there will be 12 rows in all. Therefore, where there is a divisor, which can divide either the multiplier or the multiplicand completely (i.e., without remainder), with this divisor, multiply the other of the two, viz., multiplier and multiplicand. Multiply the product again by the quotient got above. Then too, the multiplier and the multiplicand would have been multiplied. Thus have been set out, the different methods of multiplication.

1.7 Division

Next, division: There, that which is divided is the dividend (*hārya*). That by which division is done is the divisor (*hāraka*). Now, conceive the dividend as a rectangle (*ghāta-kṣetra*), and the divisor as equal to the length of one of its sides. Now, the number of times the divisor can be subtracted from the dividend would be equal to the number of unit squares in each divisor-long row of this rectangle. Thus, the dividend is a rectangle formed by the multiplication of the divisor and the quotient. There, when the divisor is being subtracted from the 100th place of the dividend, in effect, it would have been subtracted a hundred times. Then, the quotient will be 100. When the digit 1 is placed in the 100th place, that will give (the value of) 100. Therefore, the quotient should be placed at that place of the dividend from which, to start with, the divisor is subtracted. The digit (of the quotient) to be placed there would be given by the number of times the divisor has been subtracted. Continue this procedure till the first place (of the dividend) is reached. Thus has been set out, (the procedure of) division.

1.8 Square

1.8.1 First method of squaring

Next, the square (*varga*): Now, squaring is, indeed, multiplication, the speciality herein being that the multiplier and the multiplicand are equal numbers. Therefore, the corresponding figure (*varga-kṣetra*) will be a square (*sama-caturaśra*). Therefore, here, the units in both the rows and columns will be equal. Earlier, when multiplication was expounded, it had been instructed that the multiplier is to be placed with its first place above the last place of the multiplicand, then multiply the multiplicand's last place with the different places of the multiplier and keep the result below the respective places. This would mean that the product (at each step) would be placed at a place which is less by one than the sum of the corresponding places of the multiplier and the multiplicand. In the present case, since the number of places in the multiplier and the multiplicand are equal, the place where the square of a digit appears is twice the place to be multiplied less one, and thus would be an odd place. Therefore, the result of the last place multiplied by the last place would come in an odd place. The last place multiplied by the penultimate would come in the even place below; the penultimate multiplied by the last, would also occur there. Then the penultimate multiplied by the penultimate would occur in the odd place, below. Thus, the products of like places are to be placed at odd places and the products of unlike places are to be placed at even places. Hence, to start with, put the square of the last places at one spot. In squaring, since all places of the number to be squared have to be multiplied by all its places, let the products of similar places be termed *varga* and that of dissimilar places as *ghāta*. Again, it is said, that odd place is termed *oja* and even *yugma*. Sum of all numbers is called *rāśi*. Here, deposit (at its place) the square of the last digit. Now, the product of the last digit of the multiplicand and the penultimate of the multiplier and the product of the penultimate of the multiplier and the last of the multiplicand are equal both in their value and in the place where they ought to occur. Hence, double the last digit, multiply it by the penultimate and put it below the penultimate place. This will be the next below the square of the last digit. Then place in subsequent places, appropriately, all the numbers got by multiplying, by twice the last digit, all the digits below the penultimate. The last digit can now be discarded, since the multiplications to be done by the last digit of the multiplier and by that of the multiplicand have already been done. Now, move the penultimate and lower digits lower by one place. They will then be just one place lower than the place lower than the square of the last digit. Add to the number at that place the square of the penultimate. Then double the penultimate and multiply with it the next lower digits and add them to the numbers in the subsequent places appropriately. Now, discard the penultimate. Then move (the digits) by one place lower, and add the square of the digit next to the penultimate. Then double it, (i.e., the digit next to the penultimate), multiply with it the lower digits and add them to the numbers in subsequent places appropriately. Then lower the digits by one place and square. Continue this process till all the digits are done. Thus, squaring is in effect multiplication. It has already been observed that multiplication is in effect addition. Therefore, this, (i.e., squaring), is a special type of addition. Thus has been stated one type of squaring.

1.8.2 Second method of squaring

Now, the above is demonstrated in a plane figure. The *varga* (square) is here (conceived as) a plane square figure. When the square of its last digit is depicted, there will be a corresponding square. And that will be at one corner. Now, the squaring of the number to be squared is considered here by breaking it into two components. There, its last digit makes one component. All the lower digits together make up the other component. Partition both the multiplier and the multiplicand, (both being the same number), in this manner. Now, take as the first (portion) the product of the last component of the multiplier, with the last component of the multiplicand; as the second (portion), the product of the last component of the multiplier with the first component of the multiplicand; as the third (portion), the product of the first component of the multiplier with the last component of the multiplicand; and as the fourth (portion) the product of the first component of the multiplier with the first component of the multiplicand. Thus the square figure will be in four portions. There, the first and the last portions will be squares. Thus these two are square figures (*varga-kṣetra*) while the second and the third are rectangles (*ghāta-kṣetra*).

There, if the square of 123 is required, the 1 of the hundredth place would be one component and the two lower places, making 23, would be the second component. When the square of 100 is depicted, there would be a square figure with 100 rows and in each row there would be 100 unit squares. Suppose this is (situated) in the north-eastern corner. Then place the rectangles alongside it, on the southern and western sides. These two would be rectangles with the longer side 100 and shorter side 23. Then the square of 23 would come in the south-western corner. Now, even this 23 could be divided by places and squared. Here conceive the square figure of side 20 as situated in the north-east corner; then two rectangles of length 20 and breadth 3, towards the south and the west; then the square of 3 in the south-western corner. Continue thus, till the places are exhausted. Thus, we have a method of squaring. In this method, when a number is to be squared, it is to be divided into two components, these are multiplied together, doubled and to this is added the squares of both the components, the result being the square of the sum of the two components.

1.8.3 Third method of squaring

Then, take the product of the components, multiply that by four; add to it the square of their difference. In this manner, too, the total square would result. This is as follows: Here, a rectangle would be formed with the longer component as the length and the shorter side as breadth. Draw also its diagonal. Thus, we have a method to construct the square figure using four of these rectangles. Place one of these rectangles with its length along the south, alongside the (full) square, from the north-east corner. Another rectangle is placed at the south-east of this, towards the west; then, from the south-west, towards the north; then, from the north-west, towards the east. When (they are) placed in this manner, there will be found a deficient area at the centre of the figure, equal to the square of the difference of the components. If this is also supplied, the square will be full. This is because, the smaller component occurs at both ends (of the entire line), the remainder will be the difference of the components. Therefore, four times the product (of the components) and the square of their difference, when added together, will give the square of the sum of the components. Now, from what has been set out here, it follows that the sum of the squares of the components would be the sum of twice their product and the square of their difference, since the square of the whole had previously been derived by adding to it twice the product of the components.

1.8.4 *Bhujā-koṭi-karṇa-nyāya*

Now, when the sum of the squares of the components is taken as an area, the diagonal of the product rectangle (*ghāta-kṣetra*) will be the side of a square with the same area. The method for this: Draw the four rectangles as stated above and mark those hypotenuses whose extremities do not fall at the corners of the square but touch the other corners (of the rectangles). From this figure, cut along the hypotenuses and remove the four outer triangles. What remains there would be a square with its sides equal to the hypotenuse. Then, if two each of the (four outer) triangles that have been removed are joined together, two rectangles will result. This being the case, it means that the sum of the squares (of the components) would be the square of the hypotenuse. And twice the sum of the squares of components when decreased by the square of their difference gives the square of their sum. Hence in all the three cases, viz., (i) when double the product of the components is subtracted from the sum of their squares, or (ii) when four times the product is subtracted from the square of the sum, or (iii) the square of the sum is subtracted from twice the sum of the squares, what results would be the square of the difference.

1.8.5 Fourth method of squaring

Now, place the number to be squared at two places, consider one as the multiplier and the other as the multiplicand, and from one of them subtract any (arbitrarily) desired number; add the same number to the other. And multiply the two. The figure formed would be a rectangle with breadth equal to the reduced-multiplier and with its length equal to the added-multiplicand. Then cut off the portion corresponding to enhanced length and place it along the deficient breadth (of the rectangle). The result will be deficient (from the desired square) in one corner by an amount equal to the square of the added number. If this is also added, the square, as before, will result.

1.8.6 Difference of squares of two numbers is the product of their sum and difference

Then, by following the same reasoning as in the method of squares of components: Square a desired number and place it at two places. Take another desired number. Then, find the product of the two desired numbers, double the product and add the same at one place and subtract from the other. Then, add the square of the second desired number in both the places. The two results got would be the square of the sum of the two desired numbers and the square of the difference between the two desired numbers. And, if the square roots of the two results are calculated the same will be the roots of the squares of the sum (of the two desired numbers) and of the difference (of the two desired numbers).

Now, the figure which was referred to earlier for obtaining the square of the sum of the two components, i.e., the figure with the square of the larger component at the north-east, the square of the smaller component at the south-west and, at the other two corners, the rectangles formed by the product of the two components. These four together form the figure of the square of the sum of the two components. Again, in the same figure, at the south-west is the square of a desired number and at the north-east is the square of another desired number. Now, given the square on the north-east, the three other portions form the rest of the square of the undivided full number. Hence, the total area of these three figures is equal to the difference between the squares of the undivided full number and the chosen number.

Now, the method to obtain this difference of squares: Here, at the north-east corner of the square, there will be a rectangle each towards the south and the west; these two will have (an area equal to) the product of the smaller number and the difference between the two numbers. The square lying on the south-west is equal to the square of the difference between the two numbers. So, (to get the difference between the two squares), twice the smaller number, together with the difference between the two numbers, should be multiplied by the difference. This way, it will be equal to the product of the sum and difference of the two numbers. For, the difference added to the smaller number gives the larger number. Hence the product of the sum and the difference of two numbers is equal to the difference of their squares.

1.8.7 Sum of the progression of odd numbers is a square

From this it follows: The square of 1 is 1; subtracting from this the square of zero, the remainder is 1. When 3, being the sum of 1 and 2, is multiplied by their difference, which is 1, their product 3, is the product of the sum and difference (of 1 and 2). Hence, the difference between the squares of 1 and 2 is 3. When this 3 is added to 1, which is the square of 1, the sum will be 4, being the square of 2. In the same manner, the sum of 2 and 3, being 5, is the difference between the squares of 2 and 3. Again, the difference between the squares of 3 and 4, is, 7. The difference between the squares of 4 and 5, is 9. Thus, commencing from 1, the difference between the squares of two consecutive numbers will be greater at each step by 2. Thus, this will be the *śreḍhī-kṣetra*, figure of an (arithmetic) progression, starting with 1, with a common increase of 2. And this will be the figure of the squares of the numbers commencing from 1. The above being the case, the figure of a square can be considered also as *ekādi-dvicaya-śreḍhī-kṣetra*, the figure associated with an arithmetic progression of numbers starting with 1, increasing at each step by 2. Here, the side of the square is equal to the (number of terms or) the number of rows (in the *śreḍhī-kṣetra*). In the first row, there is one component, in the next row, there will be three components; in the next row, there will be five. In this manner, the number of components in each row increases by 2. This is the nature of the *śreḍhī-kṣetra* or a progression. This aspect will be elaborated in the section on Rsines. Thus has been stated the logistics of Squaring.

1.9 Square-root

Next, the square-root: This process is the reverse of the process of multiplication. There too, the calculation of the square root is the reverse of the process of squaring which commences from the first digit to the last digit (of the number). For instance, the method of squaring 123 from the first place (is as follows): Place the square of the first digit, i.e., 9, below the first digit; this is the first step. Then double 3, i.e., 6, and multiply with it the 2 of the second place and the 1 of the third place, and place the results below the respective places in the same line as (9 of) the first step. This is the second step. Then, shift one place higher the 2 of the second place and 1 of the third place. Square the 2 of the second place, i.e., 4, and place it in the hundred's place. This is the third step. Then, double the 2 of the second place, with this 4 multiply the 1, being the third digit which has been shifted to the fourth place, and place the resulting 4 (i.e., 4×1), in the thousand's place. This is the fourth step. Then shift the 1, which is the third digit and which has been shifted to the fourth place, and place its square, 1, in the fifth place. This is the fifth step. Thus is the method for (squaring) numbers having three places.

The method for the square root of the (resulting) number, (i.e., 15129), is the reverse of the above method of squaring. In the above the last step was the placement of the square of 1 in the fifth place. Subtract the square of 1 from it; this is the first step. Then, double this and divide the fourth place by it. Keep this 4, in front. Then, subtract the square of the quotient (i.e., $2 \times 2 = 4$) from the next (i.e., third) place. Then, divide the next place by (twice the number formed) by these two places. Then, subtract the square of the quotient from the next place. This is the method for the reverse process. (That is), the last step (of squaring) is the first step (here), the first step is the last step; subtraction in place of addition, addition in place of subtraction, and lowering the place where it is raised. Square-rooting is thus the reverse of squaring.

1.10 Root of sum and difference of squares

Following the above reasoning, the square root of the sum of two squares (can be obtained as follows): Divide the square of the smaller number by twice the larger number. Then (from the remainder), subtract the square of the quotient. Add twice this quotient to the divisor (i.e., twice the first number). Continue this process. What is to be noted is that the addition of twice the quotient should be made to that place in the divisor, which is the place which was divided in the dividend. Then half the divisor obtained at the last step would be the root of the sum of the squares. If, however, the division is made (and the quotient known) by mental calculation and that quotient is added, without doubling it, to the divisor and then division is made, then the square of the quotient need not be subtracted, since that too would have gone (i.e., accounted for). Then, even if the division is made, add the result to the divisor. It would then be as if it had been doubled and added. Then, when the division is made from a lower place, conjure the result, add it to the corresponding lower place in the divisor and then divide. Again add the result. Continue this (processes) till all (the places of) the dividend are exhausted. Then half the divisor would be the root of the sum of the squares.

Here, we can also conceive of the divisor to be double the root of the number got by subtracting the square of the larger number from the sum of the squares. The difference between this and the earlier process of square-rooting is that this process is not according to the division of place (*sthāna-vibhāga*) (which was employed earlier) where we remove the first square, but according to the division of numbers (*saṃkhyā-vibhāga*). Thus (has been stated) the rooting of sum of squares.

Now, for calculating the root of the difference of two squares: While dividing the dividend with the divisor, the division should be done after subtracting the quotient from the divisor, and after the division the quotient is again subtracted. Then, while conjecturing the quotient that would result by dividing at a lower place, subtract the quotient from the result at the earlier place and then divide. Subtract the quotient from the divisor. This is continued till the dividend is exhausted. Half of the last divisor will be the root of the difference of the squares. Thus (has been stated) the rooting of difference of squares.

[Thus ends Chapter One entitled The Eight Mathematical Operations]

Chapter 2

The Ten Questions and Answers

Now, the method to ascertain two numbers if any two of the following five, viz., the sum, difference, product, sum of squares, and difference of squares of the two numbers, are known.

Qn. l. Here, if the difference of two numbers is added to their sum, the result obtained will be twice the bigger number. Then, if the difference is subtracted from the sum, the result obtained will be twice the smaller number. Then, when the two results, as obtained above, are halved, the two numbers, respectively, will result.

Qn. 2. Now, to ascertain the numbers when their sum and product are known: Here, in accordance with the rationale explained earlier, if four times the product is subtracted from the square of the sum, and the root of the result found, it will be the difference between the numbers. Using this (and the sum of the numbers), the two numbers can be got as explained above.

Qn. 3. Now, (given) the sum and the sum of the squares (of the numbers): There, when the square of the sum is subtracted from twice the sum of the squares and the root of the result found, it will be the difference between the numbers.

Qn.4. Then, when the difference between the squares is divided by the sum (of the numbers), the result will be the difference between the numbers, as per the rationale explained earlier.

Qn. 5. Then, (given) the difference and the product of the numbers: There, if the product is multiplied by four and the square of the difference added and the root of the result found, it will be the sum of the numbers.

Qn. 6. Then, given the difference and the sum of squares: When the square of the difference is subtracted from double the sum of the squares, and the root of the result found, it will be the sum of the numbers.

Qn. 7. Then, when the difference of the squares is divided by the difference (of the numbers), the result will be the sum of the numbers.

Qn. 8. Then, (given) the product and the sum of the squares (of the numbers): Here, subtract twice the product from the sum of the squares, and find the root of the result. This will be the difference (between the numbers). When the product is multiplied by 4 and the square of the difference added, the root of the result is the sum (of the numbers).

Qn. 9. Then, (given) the product and the difference of the squares (of the numbers): Now, we obtain the squares of the two numbers. Here, the calculations done using the numbers can be done using the squares of the numbers. The distinction here would be that the results will also be in terms of squares. There, when the product is squared, it will be the product of the squares, (since) there is no difference in the result of multiplication when the sequence (of the steps) is altered. Hence, taking that the product and the difference of the squares are known, the sum of the squares can be derived by the same method used for calculating the sum (of two numbers) given their product and difference. Here, when the square of the product is multiplied by four and added to the square of the difference in the squares, the root of the result will be the sum of the squares. Then placing this sum of the squares in two places, add to one the difference of the squares and subtract it from the other. Then divide both by 2. The results will be the squares of the two numbers.

Qn. 10. Then, the tenth (question) is when the sum of the squares and the difference of the squares are known. This too has been answered above.

These are the ten questions. These have been stated here since they are made use of in several places. Cube roots have no use in planetary computation. Hence they are not stated here. Thus (have been explained) a way of computation.

[Thus ends the Chapter Two entitled The Ten Questions and Answers]

Chapter 3

Arithmetics of Fractions

3.1 Nature of fractions

Now, the addition etc. of numbers which form, in different ways, parts (*avayava*-s) of numbers: There, the full number l, is called *rūpa*. Here, when to this full 1 is added another full 1, the result is 2. If to this is added another full 1, it will be 3. When, from this 3, a full 1 is subtracted, it will be 2. If from this 1 is reduced it will be 1. Thus, by the addition of numbers which are similar, there will result higher and higher numbers.

Similarly, the subtraction of similar numbers will result in lower and lower numbers. Addition of half, or quarter (and the like) to 1 will be addition of dissimilar numbers; but the result will not be 2. Similarly by reducing half, quarter etc. from 2, the result will not be 1. Hence there will be true fullness only by the addition or reduction of similar (full) numbers. And, as a result, the numbers would increase or decrease. Only they will be truly full addition and subtraction. In such cases as two minus one and a quarter, direct addition and subtraction do not take place and the two will remain separate. Hence, when parts of different measures, or a full and a part, have to be added to or subtracted from, they have to be converted to the same denomination (*savarṇa*).

3.2 Conversion to the same denomination

Now, to the method of conversion to the same denomination (*savarṇī-karaṇa*): Suppose one-fifth and one-fourth have to be added. There, if one is partitioned into four equal parts, each part will be a quarter. If each of these is divided in to five, there will be twenty parts, each (quarter) having five divisions. Now, one-fifth will be one section of 1 divided by five as done earlier. If each of these is divided into 4, each will be one-twentieths. In such a situation, since the fifth divisions of one fourths and the fourth divisions of one-fifths are of the same denomination, addition and subtraction between them are possible. Since each part in both is one-twentieth of 1, their denomination is the same. Here, in order to indicate that one-fourths added four times produce full unity (1), place 4 below as denominator (*cheda*) and 1 above as numerator (*aṃśa*). In the case of the fifths, place 5 below as denominator and 1 above as numerator. Now, multiply by 4, which is the denominator of one-fourths, both 5 which is the denominator of one-fifths and 1 its numerator. Then, multiply by 5, the denominator of one-fifth, both 4 which is the denominator of the quarter and 1 its numerator. Then, in both cases, the denominator will be the same, being 20. And, the numerator will be 5 in the case of one-fourth and 4 in the case of one-fifth. Here, there is nothing special about one-fourth and one-fifth. What is significant is that, presently, there are a number of small divisions. In such cases, multiply by the denominator of one, the denominator and numerator of the other. Then, multiply both the denominator and numerator of the first by the denominator of the other. Then, the two will have the same denominator and will be of the same denomination. Hence, they will be amenable for addition and subtraction. Hence, (in the case under consideration), in addition, there will be 9 (units of the same denomination) and in subtraction, there will be 1. These are in units of one-twentieths of the full number 1.

In this manner, common denomination can be found even if there be several terms. There, multiply by a denominator all the numerators and denominators, excluding the given denominator and its corresponding numerator. As a result of this, all of them will be having a common denominator and so are amenable for addition and subtraction. If, to these fractions, any full number has to be added, multiply that full number by the (common) denominator. Then that full number will also be converted to the same denomination as those parts. Thus (has been stated) conversion to the same denomination (*savarṇana*).

3.3 Multiplication of fractions

Now, multiplication of fractions: When one-fourth is the multiplicand and certain full numbers are the multipliers, place the multiplicand in as many places as there are multipliers. Then add these (fractions) amongst themselves. Then it will be as if the multiplicand has been multiplied (by the multiplier) according to the principle of 'multiplication by parts' (*khaṇḍa-guṇana*). Suppose there are ten 1's in the multiplier, (i.e., the multiplier is 10). Then place the one-fourths in ten places. Their sum will be the product. They will be ten numerators with the same denominator. Thus, there will be no difference (in the result), if 10 is multiplied by onefourths; it will only be ten one-fourths. It has already been stated that a multiplicand repeatedly added as many times as the multiplier and the multiplier repeatedly added as many times as the multiplicand lead to the same result. That being the case, the only difference here is that in the result, since there is a denominator, the whole number product has to be divided by the denominator. This is the case, when there is a denominator in only one, either in the multiplicand or the multiplier. When, however, there are denominators in both the multiplicand and the multiplier, division has to be made by both the denominators. Hence, the division has to be made by the product of the denominators amongst themselves. Therefore, in the matter of multiplying fractions, multiply all the numerators and multiply all the denominators, amongst themselves. Thus will result, the product of such multiplicand and multiplier. For instance, if one-fourth and one-fifth are multiplied, the result will be one-twentieth. Thus (has been stated) the multiplication of fractions.

3.4 Division of fractions

Next, the division of fractions: Here also the underlying principle is the same as has been stated earlier, viz., to find out how many times, in full numbers, can the divisor be deducted from the dividend. Now, when a fourth of unity is multiplied by 10 units, the result will be 10 one-fourths. This is generally termed as 10 by 4. If this product is divided by the multiplier, the multiplicand will be the result. If it is divided by the multiplicand, the multiplier will be the result. Here the multiplier, namely 1 by 4, can be deducted 10 times. And, as a result, 10 full numbers will be obtained. This will be the quotient according to the principle stated above. Now, when the ten full numbers have to be deducted from the product, the dividend is after all ten one-fourths. Hence, 40 one-fourths are required to deduct once the full number 10. Then alone the quotient will be 1. Hence, it results that in the case of this dividend the quotient is only one-fourth. This being the case, the method (for division) would be to reduce the divisor and increase the dividend. Here, when 10 by 4 is divided by 1 by 4, 4 is the divisor of the divisor 1. Multiply 10, the dividend, by that divisor 4. Then divide by 1 and by the original denominator (4) of the dividend. Here the product of 1 and 4 is 4. 40 divided by this is 10. Thus, multiply the numerator of the dividend by the denominator of the divisor. That (result) will be the numerator. Then multiply the denominator of the dividend by the numerator of the divisor; that will be the denominator. The division would be done in this manner. If it is desired to know the full numbers in the quotient, the division should be made by the denominator. Thus, multiplying one-fourth and one-fifth and taking the product, viz., one-twentieth as the dividend, if it is divided by one-fifth, the result will be 5 by 20. Then, if both the denominator and the numerator are divided by 5, the result will be 1 by 4. If the dividend (one-twentieth) is divided by 1 by 4, the result will be 1 by 5.

In this way, both multiplication and division are more or less the same. Multiplying the denominators of the multiplicand and the multiplier, and their numerators, amongst themselves, is multiplication. And, it is division when the denominator of the divisor is taken as the numerator and the numerator (of the divisor) as denominator, and multiplication is done. This is all the distinction (between the two). Thus (have been stated) the multiplication and division (of fractions).

3.5 Squares and square-roots of fractions

Now, when a fraction has to be squared, both the denominator and the numerator have to be squared. These two will be the denominator and the numerator of the square. Then, when the root of a fraction has to be found, the roots of both the denominator and the numerator have to be found. These will be the denominator and the numerator of the root. Thus (have been stated) the calculation of the root of fractions.

[Thus ends Chapter Three entitled Arithmetics of Fractions]

Chapter 4

Rule of Three

4.1 Nature of the rule of three

Next is (dealt with) the 'rule of three'. Suppose a composite thing has two parts. Suppose also that there is a relationship between the parts to the effect that if one part is of a certain measure, the other would be of a fixed corresponding measure. Suppose also that this relationship is known. In such a situation the method of inferring, in another composite elsewhere, the measure of one part (when the other is known), is termed as the 'rule of three'. (To cite) an example: When it is known that 5 measures of paddy will yield 2 measures of rice, it can be presumed that this relationship in measures between paddy and rice persists everywhere. Hence, if it is desired to know how many measures of rice would be got from 12 measures of paddy, this 'rule of three' procedure is made use of. Here, in the calculation of rice for 12 measures of paddy, the known measure, 5, is termed *pramāṇa* (antecedent or argument). The corresponding rice, 2 measures, is termed *pramāṇa-phala* (consequent or fruit). 12 measures of paddy is termed *icchā*, and the corresponding measure of rice, which is to be found out, is termed *icchā-phala* (resultant or required fruit).

Here, from the knowledge of (the measure of rice) for 5 (measures of paddy), if we ascertain the (corresponding measure of rice) for one (measure) of (paddy), then it would be easy to find out the result for any desired measure. Here is the method (thereof): Now, for the 5 units of the *pramāṇa*, the *phala*-units are 2. When that 2 is divided into 5 parts, one part thereof will be the *phala* corresponding to one *pramāṇa*-unit. If this is multiplied by the units in the *icchā-rāśi*, we will get the *icchā-phala* corresponding to all the *icchā*-units. When 2 is divided into 5 parts, it is tantamount to dividing by 5 and two-fifths will be the quotient. In this division, 5 will be the denominator. Hence, the two one-fifths, (i.e., two-fifths), will be the result. This being the case, the *pramāṇa* will be the denominator of the *pramāṇa-phala*. This is the multiplicand. The *icchā-rāśi* will be the multiplier. Hence, the *pramāṇa-phala* is multiplied by *icchā* and the product is divided by the *pramāṇa* which is the denominator (as said before). The result will be the *icchā-phala*. Here, a fifth part and the quotient obtained by dividing by 5 are the same. This is just like what happens if the number of units of area of a rectangle is divided by the number of parts in a row, to give the number of parts in a column. Thus (has been stated) the 'rule of three'.

Here, paddy is the composite unit. Husk, rice and bran are its parts. The invariable relation (*vyāpti*) between them is that 2 measures of rice correspond to 3 measures of husk; it can also be conceived in the form that 3 measures of husk correspond to 5 measures of paddy. Thus the *pramāṇa* and *phala* can be taken differently according to specific reasons (*upādhi*). At times it might also happen that the *pramāṇa* and *icchā* can be reversed if the enquiry is: If 2 measures of rice correspond to 5 of paddy, for this much rice, how much of paddy. The above is also a type of rule of three.

4.2 Reverse rule of three

Now, the 'reverse rule of three': Now, in the *trairāśika*, 'If so much weight of gold is required at such a price for 8 caret gold, what weight of gold would be needed for 10 caret gold', obviously, here is not the case that *icchā-phala* will be higher than the *pramāṇa-phala* in proportion as the *icchā-rāśi* was greater than the *pramāṇa-rāśi*, but that it will be proportionately less. In such cases it is the 'reverse rule of three' (*vyasta-trairāśika*) that applies. The distinction here is that the *icchā-phala* is got by dividing by the *icchā-rāśi*, the product of *pramāṇa* and *pramāṇa-phala*. There is the rule:

> *vyastatrairāśikaphalam icchābhaktaḥ pramāṇaphalaghātaḥ* |
>
> The *phala* in 'reverse rule of three' is got by dividing, by the *icchā*, the product of *pramāṇa* and *pramāṇa-phala*.

Thus (has been made) an indication of the 'rule of three'.

Now, most of mathematical computations are pervaded by this *trairāśika-nyāya*, 'rule of three' and the *bhujā-koṭi-karṇa-nyāya*, 'rule of base, height and hypotenuse' (of a rectangle). All arithmetical operations like addition etc. function as adjuncts to the above. Thus have been stated most of the principles of calculation.

[Thus ends Chapter Four entitled Rule of Three]

Chapter 5

Kuṭṭākāra

5.1 Computation of current Kali day

Here is set out the mathematics for the computation of the *ahargaṇa*, the number of days elapsed since the epoch etc., by the extension of the said mathematics. There, the number of days passed in the Kali era is calculated by means of two *trairāśika-s* (rule of three). Here, the number of years passed from Kali-beginning is calculated using solar measures, since in the case of years, the solar years are the ones commonly used. The number of months passed in the current year is ascertained using the lunar months. The number of days passed in the current month is ascertained by means of civil days, since they are the ones commonly used. Then, using these, the civil days passed from the beginning of Kali is to be calculated. Now, what is enunciated (in astronomical treatises) is the number of revolutions and civil days in a four-*yuga* period (*caturyuga*). Using that, the days elapsed from the beginning of Kali is calculated. In a *yuga*, the difference between the number of solar and lunar revolutions (*bhagaṇa*-s) is the number of lunar months (in a *yuga*). The *yuga-adhimāsa* (intercalary months in a *yuga*), is obtained from that, by subtracting the solar months (in a *yuga*), which is got by multiplying the solar revolutions in a *yuga* by twelve. Given that this is the number of *adhimāsa*-s for the solar months in a *yuga*, calculate by rule of three the number of elapsed *adhimāsa*-s corresponding to the number of solar months elapsed from the beginning of Kali. When the elapsed *adhimāsa*-s is added to the currently elapsed solar months, the number of currently elapsed lunar months will result. This is now added to the elapsed months from Caitra (during the current year). This is multiplied by 30 and the (lunar) days elapsed in the current month is added. The result will be the number of elapsed lunar days (*tithi*-s) from Kali-beginning. Now, the difference between the lunar days in a *yuga* and the civil days in a *yuga* is the number of *avama*-days, (i.e., discarded days), in a *yuga*. Now, the number of elapsed *avama* days is got by applying the rule of three: If for the *yuga*-lunar-days, so much is the *yuga*-*avama* days, how many *avama* days would correspond to the currently elapsed lunar days. Subtracting the elapsed *avama* days from the currently elapsed lunar days, the elapsed civil days from Kali-beginning is obtained.

5.2 Computation of mean planets

Now, (is explained) the computation of mean planets for the currently elapsed Kali days. Using the *trairāśika*: If for the civil days of *yuga* this much is the number of *bhagaṇa*-s (revolutions of a planet), then for the currently elapsed civil days, what is the *bhagaṇa*; thus the number of completed *bhagaṇa*-s of the planet is got. Then, from the remainder (*śeṣa*), the segment of the revolution in terms of the signs (*rāśi*), degrees (*aṃśa*), minutes (*liptā*), can be got by multiplying the remainder, respectively, by 12, 30 and 60 (and dividing by the number of civil days in a *yuga*). The results are the (current) mean (positions of the respective planets). This is one method.

Or, take as *icchā-rāśi* any one of the elapsed *māsa, adhimāsa*, *avama*, or any *bhagaṇa*, elapsed from the beginning of Kali. Take as *pramāṇa* the corresponding values for the *yuga*. Take as the *pramana-phala*, the *yuga-bhagaṇa* the number of revolutions in a *yuga* (of the desired planet). By applying *trairāśika*, the *icchā-phala* (for the current day) would be got which would be of the same category as the *pramāṇa-phala* taken. Thus is the method of obtaining the mean planet.

5.3 *Kuṭṭākāra* in planetary computations

Now, in the above-said calculations, the multipliers and divisors are very large, since they are related to the *yuga*. Hence, in order to simplify the calculation by reducing the multipliers and divisors, the method of *apavartana*, and incidentally *kuṭṭākāra*, is set out here.

5.3.1 *Bhagaṇa-śeṣa* and other remainders

Now, the product of *icchā-phala* and *pramāṇa* and the product of *pramāṇa-phala* and *icchā* are equal. Hence, this product divided by *icchā* would give the *pramāṇa-phala*; divided by *pramāṇa* it would be *icchā-phala*; divided by *pramāṇa-phala*, it would be *icchā*; and divided by *icchā-phala*, it would be *pramāṇa*. This being the case, when *icchā-phala* is already known (as a full number), it, multiplied by the *pramāṇa* and divided by the *pramāṇa-phala*, would give *icchā-rāśi*, when there is no remainder. If there is a remainder, what is lacking is to be added or what is in excess is to be subtracted (from the dividend) and we get the *icchā-rāśi* as a full number. When we take only the integral part of the *icchā-phala* and multiply it by the *pramāṇa* (to derive the *icchā-rāśi*), addition or subtraction of the remainder shall have to be carried out (on the *pramāṇa*). (On the other hand), when the *icchā-rāśi* is derived by dividing by the *pramāṇa-phala*, if multiplication is done along with the fractional part of the *icchā-phala*, there will be no remainder.

There, from the elapsed civil days (*iṣṭa-ahargaṇa*) the elapsed revolutions (*bhagaṇa*-s) are derived as *icchā-phalā*, there will be, after the division, an adjunct, a part of the revolution (*bhagaṇa-avayava*) in the form of completed *rāśi*-s etc. With full revolutions (*bhagaṇa*-s) obtained as quotient, that portion of the dividend which could not be divided out completely is termed *bhagaṇa-śeṣa*. Now, the first divisional part of the revolution (*bhagaṇa*) is the *rāśi* (sign). 12 *rāśi*-s make one revolution. Hence, 12 being the denominator for *rāśi*-s, when the *bhagaṇa-śeṣa* is multiplied by 12 and divided by the *pramāṇa* (number of civil days in a *yuga*) as before, the elapsed *rāśi*-s will be obtained as quotient. If there is a remainder still, of the dividend, that is termed *rāśi-śeṣa*. The sub-division of the *rāśi* is the *bhāga* (degree). The remainder, (i.e., *rāśi-śeṣa*) when multiplied by 30 and divided by the *pramāṇa*, the *bhāga*-s (degrees) are got. The remainder (of the dividend) left is termed *bhāga-śeṣa*. That multiplied by 60 and divided by the divisor as above (i.e. the *pramāṇa*), the quotient is *kalā* (minute). The remainder is *kalā-śeṣa*.

The above being the case, it is possible to arrive at the elapsed civil days (*iṣṭa-ahargaṇa*) from the *kalā-śeṣa* by reverse calculation. (This is) how it is: Multiply the divisor (number of civil days in a *yuga*) by the *kalā*-s obtained, and add the *kalā-śeṣa* and divide by 60. The result will be the *bhāga-śeṣa*. Then multiply the *bhāga*-s (obtained earlier) by the divisor, add the *bhāga-śeṣa* and divide by 30. The result will be *rāśi-śeṣa*. The *rāśi*-s (obtained earlier) are multiplied by the divisor, and the *rāśi-śeṣa* is added and the sum divided by 12; the result is *bhagaṇa-śeṣa*. This is added to the product of the completed *bhagaṇa*-s and the divisor, and divided by *yuga-bhagaṇa*. The result will be the elapsed *ahargaṇa* (Kali days elapsed in the *yuga*).

5.3.2 *Kuṭṭākāra* for *Ahargaṇa*

Now, wherever appropriate, the dividend, which is the product of the multiplier and the multiplicand, is called the *bhājya* (dividend). However, in *kuṭṭākāra* operations, *pramāṇa-phala* is called *bhājya*. In *bhagāṇa-śeṣa, bhāga-śeṣa*, etc., the denominators, viz., 12, 30 and 60 are the *bhājya*-s, in order.

In all places, the *pramāṇa* (number of civil days in a *yuga*) is called *bhājaka*. The remainders that occur one after another are the *icchā-rāśi* and are the respective *sādhya*-s (quantities to be found at the respective places). In *kuṭṭākāra*, this *sādhya* is called *guṇākāra* (multiplier). With the *pramāṇa-phala* multiply the *icchā-rāśi* and divide by the *pramāṇa* and ascertain the remainder in the dividend, i.e., that portion which is required (in the quotient) to make up 1 unit. Now, where the *pramāṇa* and *pramāṇa-phala* (and this remainder), these three are known, the method to know the *icchā-rāśi* is called *kuṭṭākāra*.

5.3.3 *Bhagaṇa-śeṣa* of mean Sun

Now the 'reduced' (*apavartita)-bhagaṇa* of the Sun is *tatsama* (576). The correspondingly reduced number of civil days in a *yuga* is *dhījagannūpura* (2,10,389). This is the *pramāṇa*. *Tatsama* (576) is the *pramāṇa-phala*. These (two), (viz., *dhījagannūpura* and *tatsama*), are also termed, respectively, *avāntara-yuga* (the number of years in an intermediate-*yuga*) and (*avāntara-yuga-bhagaṇa*) (the civil days in that period). They are known also as reduced dividend and divisor (*dṛḍha-bhājya* and *dṛḍha-bhājaka*). The *kuṭṭākāra* involving these and *yugabhagaṇa-śeṣa* is demonstrated below.

Now, at sunrise, on the day ending the *avāntara-yuga* (of 576 years), the mean Sun would be at the end of *Mīna-rāśi*. Hence on that day, there would be no *bhagaṇa-śeṣa*. So, mean Sun for any day (after that) is calculated by multiplying the number of days elapsed by *tatsama* (576) and dividing by *dhījagannūpura* (2,10,389). Hence, at the end of one day after the *avāntara-yuga* the *bhagaṇa-śeṣa* is *tatsama* (576). For two days it is double that. Thus, every day, the *bhagaṇa-śeṣa* will increase by one *tatsama* (576). This is an additive remainder (*adhika-śeṣa*). In this manner, when *mātula* (365) days pass by, the product of *mātula* and *tatsama* (576) is less than *dhījagannūpura* (2,10,389) by *dhīvandya* (149). On that day this (*dhīvandya* (149)) is a negative remainder (*ūna-śeṣa*). Therefore, on the next day, since *tatsama* (576) has to be added to the product, actually what happens is that the *bhagaṇa* would be completed by the addition of *dhīvandya* (149); and *tatsama* (576) minus *dhīvandya* (149), viz., *surabhi* (427), would be *adhika-śeṣa* at the end of the first day of the second year. Then during the course of the second year, the daily *bhagaṇa-śeṣa* would increase by *tatsama* (576). Then, at the commencement of the third year, the actual *bhagaṇa-śeṣa* would be *tatsama* (576) minus twice *dhīvandya* (149), which is *dāsīstrī* (278). Again, during the third year, on account of the daily increase, the *bhagaṇa-śeṣa* will increase by *tatsama* (576). Hence, the *bhagaṇa-śeṣa* at the commencement of each year will be different. But the daily increase would be similar. Hence, within a *yuga* no two days will have the same *bhagaṇa-śeṣa*. Hence, a pertinent question which arises would be: What is that number which is less than *dhījagannūpura* (2,10,389) and which when multiplied by *tatsama* (576) and divided by *dhījagannūpura* (2,10,389) would give a given remainder, which is (a) more or (b) less (than the dividend) by a given amount. The mathematical operation to find out such a multiplier (*guṇakāra-saṃkhyā*), in the above situation, is called *kuṭṭākāra*.

5.3.4 An example

This can be easily understood when a specific number is considered: Let it be supposed as follows: Let *tatsama* (576) be the *bhājya, dhījagannūpura* (2,10,389) be the *bhājaka*, and the negative (*ūna*)*bhagaṇa-śeṣa* be 100. Let it be that it is required to think of (the number, of the day) by which if *tatsama* (576) is multiplied, the *ṛṇa-kṣepa* (negative remainder) would be the specified *bhagaṇa-śeṣa* (viz., 100). Such a number, being *munigāthā* (7,305), a procedure to arrive at it should be thought of. It might also be verified through *trairāśika*. The product of *yuga-bhagaṇaśeṣa* and the multiplier (to be found out) increased by 100 is equal to the product of *dhījagannūpura* (2,10,389) and another multiplier. Here, the two multipliers are *munigāthā* (7,305) and 20. There, the product of *dhījagannūpura* (2,10,389) and 20 is greater than that of *tatsama* (576) and *munigāthā* (7,305) by 100. However, it is not possible to arrive at these multipliers (viz., 7,305 and 20) by inspection, since the *bhājya* and *bhājaka* are large. On the other hand, this would be easy if the *bhājya* and *bhājaka* are made small.

Now, the method of reduction: Here *tatsama* is the increase in *bhagaṇa* per day. Hence repeatedly subtract *tatsama* (576) from *dhījagannūpura* (2,10,389). When *tatsama* (576) has been subtracted *mātula* (365) times, the remainder will be *dhīvandya* (149). That is, after *mātula* (365) days, the *śeṣa* will be less than *tatsama* (576) by *dhīvandya* (149). That will be the negative remainder (*ṛṇa-kṣepa*). The *śeṣa* the day next to *mātula* would be *tatsama* minus *dhīvandya* (i.e., $576 - 149 = 427$). Thus the *śeṣa* would be more than *dhīvandya* (149). In subsequent days it will increase regularly. Then, for the day *nāgasthāna* (730), it (i.e., the *ūna-śeṣa*) will be twice *dhīvandya*. Then for the *kalāsthāna* (731), the *adhika-śeṣa* will be *tatsama* minus twice *dhīvandya*. Then, for the day *śuddhanaya* (1,095), the *ūna-śeṣa* is three times *dhīvandya*. Then, for the day *stabdha-naya* (1,096) the *adhika-śeṣa* would be *tatsama* minus three times *dhīvandya*, viz., *dhīpriya* ($576 - 3 \times 149 = 129$) is the *adhika-śeṣa*. Then the *śeṣa* will grow less than *dhīpriya*. Now, for *stabdhanaya* (1,096) the *adhikaśeṣa* is *dhīpriya* and for *mātula* (365), the *ūnaśeṣa* is *dhīvandya*. Hence for their sum *kārtavīrya* (1,461), 20, being the difference between *dhīvandya* (149), and, *dhīpriya* (129) will be the *ūna-śeṣa*. Thus, the *bhagaṇa-śeṣa* is lessened by 20. Then, on the day *kārtavīrya* $\times 6$ (i.e., $1461 \times 6 = 8,766$) the *ūnaśeṣa* will be 20×6. On the day *stabdhanaya* (1,096), the *adhikaśeṣa* is *dhīpriya* (129). The sum of these (numbers of) days, i.e., $6 \times$ *kārtavīrya* + *stabdhanaya*, (i.e., $6 \times 1461 + 1096$), is *prītidugdha* (9,862); on this day, the *adhika-śeṣa* is the difference between 6×20 and *dhīpriya* ($-6 \times 20 + 129$), equal to 9. Thus, the *śeṣa* of the sum of an *adhikaśeṣa-dina* and an *ūnaśeṣa-dina* would be the difference between the two *śeṣa*-s. Now, multiply the two days (by suitable multipliers) and add. Multiply the two *śeṣa*-s by the multipliers of the respective days and find their difference. Then, that difference will be the *śeṣa* for the sum of the days. There it will be *ūna-śeṣa* if it is in the *bhājaka* and *adhika-śeṣa* if it is in the *bhājya*.

For the above reason, if *dhīvandya* and *dhīpriya* are each multiplied by 5 and subtracted (from one another), there would be an increase by 100 (i.e., $5 \times 149 - 5 \times 129 = 100$). If *mātula* and *stabdhanaya* are each multiplied by 5 and added together, for this sum of days, viz. *munigāthā* (7,305), 100 will be *ūna-śeṣa*. Now, multiply 20 by 14, and 9 by 20. The difference (of the products) will be 100. Then multiply *prītidugdha* (9,862) by 20 and *kārtavīrya* (1,461) by 14 and add. Subtract the sum from *dhījagannūpura* (2,10,389); the difference is *munigāthā* (7,305) for which the *ūna-śeṣa* is 100, as stated above. Hence, reduce *śeṣa* to such a small measure such that the multipliers can be mentally thought out easily. In any case, the result would be the same in all cases.

5.4 *Kuṭṭākāra* process

Līlāvatī (of Bhāskara II) has stated the procedure by which such multipliers can be thought of easily:

> *bhājyo hāraḥ kṣepakaścāpavartyaḥ kenāpyādau saṃbhave kuṭṭakārtham |*
> *yenacchinnau bhājyahārau na tena kṣepaścaitadduṣṭamuddiṣṭameva ||*
>
> *parasparaṃ bhājitayoryayoryat śeṣaṃ tayoḥ syādapavartanaṃ tat |*
> *svenāpavartena vibhājitau yau tau bhājyahārau dṛḍhasaṃjñitau staḥ ||*
>
> *mitho bhajettau dṛḍhabhājyahārau yāvad vibhakte bhavatīha rūpam |*
> *phalānyadhodhastadadho niveśyaḥ kṣepastathānte khamupāntimena ||*
>
> *svordhve hate'ntyena yute tadantyaṃ tyajenmuhuḥ syāditi rāśiyugmam |*
> *ūrdhvo vibhājyena dṛḍhena taṣṭaḥ phalaṃ guṇaḥ syādaparo hareṇa ||*
>
> *evaṃ tadaivātra yadā samastāḥ syurlabdhayaśced viṣamastadānīm |*
> *yathāgatau labdhiguṇau viśodhyau svatakṣaṇāccheṣamitau tu tau staḥ ||*

> The *bhājya, bhājaka* and *kṣepa* which are proposed for *kuṭṭaka* operation, should first be factored by whatever number (*apavartana*) possible (reduction to the lowest terms). The problem is faulty (has no solution) if the proposed *kṣepa* too cannot be divided by the same number by which the *bhājya* and *bhājaka* are divisible.

When a *bhājya* and a *bhājaka* are mutually divided, the (final) remainder is their greatest common factor (*apavartana*). (The quotients which result when) the *bhājya* and *bhājaka* are divided by the *apavartana* are termed the reduced dividend and divisor (*dṛḍha-bhājya* and *dṛḍha-bhājaka*).

Divide mutually the *dṛḍha-bhājya* and *dṛḍha-bhājaka* till the final remainder is 1. Place the quotients (obtained at each division) one below the other, and below the last place the *kṣepa* and below that symbol zero.

Multiply, by the penultimate, the number just above, and add the last number, and put it in the place of the number just above; also cast away the last number. Repeat the process till only two numbers remain (at the top). Abrade (*takṣaṇa*) the upper number by the *dṛḍha-bhājya*. The result will be the required quotient (*phala, labdhi*). Abrade the number below by the *dṛḍha-hāraka* and the result is the required multiplier (*guṇa*).

The above is the case when the number of quotients in the (*vallī*) consists of an even number of items. When, however, the number of quotients is odd, subtract the *labdhi* and *guṇa* from their abraders (*takṣaṇa*-s i.e., from the *bhājya* and *bhājaka*.) The remainders got are the *labdhi* and *guṇa* respectively.

(*Līlāvatī*, 242-246).

Here, the idea is to get small *bhājya* and *bhājaka*. Knowing the solution for such a problem, the solution for the required problem can be extrapolated. An example:

ekaviṃśatiyutaśatadvayaṃ yadguṇaṃ gaṇaka pañcaṣaṣṭiyuk |
pañcavarjitaśatadvayoddhṛtaṃ śuddhimeti guṇaka vadāśu me ||

Oh mathematician! 221 is multiplied by a certain multiplier, 65 is added to the product and the result, divided by 195, leaves no remainder. Tell me quickly what that multiplier is.

(*Līlāvatī*, 247).

The import of this: If 221 is multiplied by a certain multiplier and 65 added to the product and the result is divided by 195, there will be no remainder, the question is what is such a multiplier. This is a subject for *kuṭṭākāra*.

5.4.1 The process of *Apavartana*

Now, the process of *apavartana*: When the *bhājya*, 221, is divided by the *bhājaka* 195, the remainder is 26. When 195 is divided by 26 the remainder is 13. When, with that, 26 is divided there is no remainder. So 26 is a multiple of 13. Hence, the number, (viz., 182), which is the portion (of 195) exactly divisible by 26 (previously) is also a multiple of 13. Also, this portion (182), plus 13, (viz., 195), which had been used to divide the original *bhājya* (221) is also a multiple of 13. In pursuance of this principle, in what has been considered so far and in what follows, whenever two numbers are mutually divided, the last remainder always divides all the portions which appear in between. Thus, when the original *bhājya* and *bhājaka* are divided by the last remainder got by the mutual division of the two, (i.e., *apavartana*), they are divisible without leaving any remainder; and the quotients obtained are termed *dṛḍha-bhājya* and *dṛḍha-bhājaka* . Therefore, here the *dṛḍha-bhājya* is 17 and the *dṛḍha-bhājaka* is 15. When the original *kṣepa* (additive) 65 is divided by 13, the result got, 5, will be the (*dṛḍha-kṣepa*).

Now, the original *kṣepa* always has to be divisible by 13. The reason being: The excess in the *bhājya* over the *bhājaka* is 26. When it (*bhājya*) is multiplied, there will be proportionate increase in the *śeṣa*. Hence it (*kṣepa*) would be divisible by 13 without remainder. Otherwise, this will not be a *kṣepa* which would occur with the given *bhājya* and *bhājaka*, and the problem will have no solution.

5.4.2 *Vallī*

Then, with 17, 15 and 5, as the *dṛḍha-bhājya* and *dṛḍha-bhājaka* and *dṛḍha-kṣepa*, got by subjecting the (original) *bhājya* and *bhājaka* and *kṣepa* to the process of *apavartana*, the process for deriving the multiplier (*guṇakāra*) to the *bhājya*: By dividing the *bhājya*, 17, by the *bhājaka*, 15, the quotient is 1 and the remainder is 2. Now, divide 15 by this 2. The quotient is 7; place this below the earlier quotient 1. The remainder here is 1. In this manner divide the *bhājya* and *bhājaka* mutually till the remainder is 1, and place the results one below the other. This column of results is called *vallī*. Using these *vallī*-results, viz., 1 and 7 and the remainders, 2 and 1, one below the other, and using the reverse process of calculation, the *bhājya* and *bhājaka* can be arrived at as follows.

5.4.3 *Vallyupasaṃhāra*: Reverse *Vallī*

Here, the last operation (done above) should be done first. And, that relates to 2, being the remainder got from the *bhājya*. The result got by dividing the *bhājaka* 15, by this divisor 2, is 7. Now multiply this 7 by 2. The original dividend will be got, provided there had been no remainder. If there had been a remainder add that to this product and the sum will be the new dividend. In the present case, to 14, being the product of 2 and 7, the remainder 1 is added, and the dividend 15 will be obtained. Now, to derive the dividend (17) of this 15: Earlier, 1 was the result got from dividing 17 by 15. Multiply 15 by this 1. The result is only 15. Add to it 2, being the remainder, to get 17, which is the dividend for 15.

Supposing there had been *vallī* results even above this, multiply the 17 with the number just above it and add 15. The result would be the dividend of 17. In this manner, multiply by the *upāntya* (penultimate) the result just above it and add the *antya*, i.e., the remainder below. Then, discard the *antya*, multiply the *upāntya* with what is above, add the new *antya* to the product and discard the *antya*. When a stage is reached where there are only two numbers, since there would be no *upāntya*, the operation comes to an end. Then, of the two numbers the upper one would be the *bhājya*, and the lower one, the *bhājaka*. This would be the case when the *bhājya* is larger than the *bhājaka*. When, however, the *bhājya* is smaller, the lower number would be the *bhājya* and the upper number, the *bhājaka*. The rule is that *bhājya* will appear in that place where the corresponding result has been derived, and that *bhājaka* will appear in that place when the corresponding result has been derived. This operation is termed *vallyupasaṃhāra* (the reverse process of *vallī*). It might seem that the reverse operation exhibits some differences. While obtaining the *vallī* results, there is only division. In the reverse process there is not only multiplication, but also the addition of remainders. Hence, it might seem, that here there is some difference from the usual 'reverse process'. However, when the principle involved is considered carefully, it would be seen that it is only the reverse process, for in the earlier operation the results were set out after deducting the remainders.

5.4.4 Derivation of *Guṇa* and *Labdhi*

Making use of the principle of *vallyupasaṃhāra* (reverse process of *vallī*) the procedure is stated here to calculate the *icchā-phala* (*guṇakāra*), and the *icchā*, from the *bhājya* and *bhājaka* which correspond to the *pramāṇa-phala* and *pramāṇa*. For this, divide mutually the *dṛḍha-bhājya* and *dṛḍha-bhājaka* and place the results one below the other, till either in the *bhājya* or the *bhājaka* only unity (1) occurs as the remainder. Below that, place also the *apavartita-kṣepa* (reduced additive). Below that too place zero.

In the case considered above, the *vallī* column would read, 1, 7, 5, 0. On this do the reverse operation described above. Keep the *antya*-s, which are to be discarded, separately in sequence. Then the *vallī* will read, from bottom, 0, 5, 35, 40. Of these 0 and 35 are multipliers (*guṇakāra*). 5 and 40 are the quotients (*phala*). The *hāra*, (i.e., *bhājaka*), and *bhājya* for these are 1, 2, 15 and 17. Here, 1 and 15 are *hāra*, (i.e., *bhājaka*), and 2 and 17 *bhājya*. The first *bhājya-śeṣa* is 2, which, when multiplied by 0, is 0. Adding to it the *kṣepa* 5, and dividing by the *hāra-śeṣa* 1, the result is 5. The second *bhājya-śeṣa* is 2 which is to be multiplied by 35, 5 added, and divided by 15. The result is 5. The third (*bhājya*) is 17, which is multiplied by 35, 5 added and divided by 15. The result is 40. Thus, in respect of the two multipliers (*guṇakāra*) on the two sides, in the middle is the quotient (*phala*). Likewise, in respect of the quotients (*phala*) above and below, in the middle is the multiplier (*guṇakāra*). In the same manner, the *bhājya*-s and *hāra*-s appear alternatively in the sequence. Now, 35 divided by 15, will give a remainder, 5, which is the multiplier (*guṇakāra*). And, 40 divided by 17, gives the remainder 6, which is the quotient (*phala*). This operation is called *takṣaṇa*, abrading. This (is) the process for deriving the multipliers (*guṇa*-s) and quotients (*labdhi*-s) for the *iṣṭa-kṣepa*.

5.4.5 *Kuṭṭākāra* for mean Sun

Now is explained the *vallyupasaṃhāra* involving *tatsama* (576) and *dhījagannūpura* (2,10,389) as *bhājya* and *bhājaka*. There, the remainders on mutual division are, in order: *dhīvandya* (149), *dhīpriya* (129), *nārī* (20), *dhik* (9), *śrīḥ* (2) and *kiṃ* (1). The results of the *vallī* are, in order: *mārtāṇḍaḥ* (365), *gauḥ* (3), *kiṃ* (1), *tat* (6), *śrīḥ* (2) and *viṭ* (4). Here, since 1 is the remainder for the *bhājya*, though the *kṣepa* had been intended as positive, it is taken as negative. Therefore, take 1 as *ṛṇa-kṣepa* and place 1 below the *vallī*-results, and below that place zero. Then do the reverse-*vallī* operation, and place the results from bottom upwards. The numbers will be: *nu* (0), *kiṃ* (1), *viṭ* (4), *dhīḥ* (9), *homa* (58), *sūta* (67), *dhīśatruḥ* (259), *kha īṣavedhaḥ* (94,602).

Now, in the set *dhīvandya* (149) etc., the last *bhājya-śeṣa* is 1. Multiply it by the *ṛṇa-kṣepa* 1 and subtract the *ṛṇa-kṣepa*. Zero is got and so the result is zero. This being the case, in the first *trairāśika* (to be done), the *hāra* is 2, *bhājya* is 1, *guṇakāra* is 1 and *phala* is zero. In the second *trairāśika* the *hāra* is *śrīḥ* (2), the *bhājya* is the number above, viz., *dhī* (9), the *guṇa* is *kiṃ* (1), as before, and the *phala* is *viṭ* (4), which is next higher. In the third (*trairāśika*), the *hāra* is *naraḥ* (20) which is above, the *bhājya* is the earlier *dhīḥ* (9), the *guṇa* is *dhīḥ* (9) which is the next higher figure, and the result is the earlier *viṭ* (4). In the fourth (*trairāśika*) the *hāra, bhājya, guṇa* and *labdhi* are, respectively, *naraḥ* (20), *dhīpriyaḥ* (129), *dhīḥ* (9) and *homaḥ* (58). In the fifth (*trairāśika*), they are, respectively, *dhīvandyaḥ* (149), *dhīpriyaḥ* (129), *satī* (67) and *homaḥ* (58). In the sixth (*trairāśika*), (they are, respectively): *dhīvandyaḥ* (149), *tatsamaḥ* (576), *satī* (67) and *dhīśatruḥ* (259). In the seventh (*trairāśika*) (they are, respectively): the *hāra* is, *dhījagannūpura* (2,10,389), the *bhājya* is *tatsama* (576), the *guṇa* is *ratna-stambhārdha* (94,602) and the *phala* is *dharmarāṭ* (259). These are the *guṇa*-s and *labdhi*-s when 1 is the *ṛṇa-kṣepa* for these *bhājya*-s and *bhājaka*-s.

Following the same principle, when 1 is the *dhana-kṣepa*, the *guṇa*-s and *labdhi*-s are the remainders got by subtracting the *guṇa*-s and *labdhi*-s of the *ṛṇa-kṣepa* from the *hāra*-s and *bhājaka*-s and they are: *sūdosau māyayā* (1,15,787), and *sakalaḥ* (317). Such will be the *guṇakāra* and *labdhi* when the sign, positive or negative, of the *kṣepa* is interchanged.

Then, if the *guṇa*-s and *labdhi*-s obtained for *kṣepa* 1, are multiplied by any desired *iṣṭa-kṣepa*, the *guṇa*-s and *labdhi*-s of the *iṣṭa-kṣepa* are got. Thus has been stated *kuṭṭākāra*, in brief.

[Thus ends Chapter Five entitled *Kuṭṭākāra*]

Chapter 6

Circle and Circumference

Now is stated the method to know the measure of the circumference of a circle in terms of its diameter which forms of the side of a square, the said side being taken to be of measure unity in some unit like the cubit or *aṅgula*.

6.1 $Bhuj\bar{a}^2 + Ko\d{t}i^2 = Kar\d{n}a^2$

It is explained here (how), in a rectangle, the sum of the squares of a side and of the height is equal to the square of the diagonal. Now, the square of a length is the area of a square having (that length) as its side (*bāhu*). In a square or in a rectangle, the diagonal (*karṇa*) is the straight line drawn from one corner to its opposite corner through its centre. In a rectangle, the *koṭi* stretches lengthwise on two lateral sides. The two vertical-sides called *bhujā* will be shorter, as presumed here. It is the diagonal of such a rectangle that is sought to be known.

Now, draw a square (with its side) equal to the *koṭi* and another equal to the *bhujā*. Draw, in this manner, two squares. Let the *bhujā*-square be on the northern side and the *koṭi*-square on the southern side in such a way that the eastern side of both the squares fall on the same line; and in such a manner that the southern side of the *bhujā*-square falls on the northern side of the *koṭi*-square. This (northern) side (of the *koṭi*-square) will be further extended in the western-side than the *bhujā* (since it is longer). From the north-east corner of the *bhujā*-square, measure southwards a length equal to the *koṭi* and mark the spot with a point. From this (point) the (remaining) line towards the south will be of the length of the *bhujā*. Then cut along the lines starting from this point towards the south-west corner of the *koṭi*-square and the north-west corner of the *bhujā*-square. Allow a little clinging at the two corners so that the cut portions do not fall away. Now break off the two parts (i.e., the triangles) from the marked point, turn them round alongside the two sides of the bigger (i.e., *koṭi*) square, so that the corners of the triangles, which met at that point earlier, now meet in the north-west direction, and join them so that the cut portions form the outer edges. The figure formed thereby will be a square. And the sides of this square will be equal to the *karṇa* associated with the (original) *bhujā* and *koṭi*. Hence it is established that the sum of the squares of the *bhujā* and *koṭi* is equal to the square of the *karṇa* and it also follows that if the square of one of them is deducted from the square of the *karṇa*, the square of the other will be the result. This is to be understood in all cases.

6.2 Circumference of a circle approximated by regular polygons

Now, the procedure to construct a circle from a square. Construct a square of any desired measure. The problem is to find the measure of a circle having its diameter equal to the side of the square. Draw, through the centre of this square, the east-west and north-south lines. Four squares would now have been formed. Then, draw a line from the centre of the larger square to one corner. That will be the hypotenuse. (In the discussion below) it is presumed that this hypotenuse has been drawn towards the south-east corner. Now, draw a hypotenuse from the (southern) tip of the *dakṣiṇa-sūtra* (north-south line passing through the centre) to the (eastern) tip of the *pūrva-sūtra* (west-east line passing through the centre). The circle to be constructed is the one which has its centre at the centre of the square.

Here, in any of the triangles formed, take the largest side as the ground, and conceive the meeting point of the other two sides (viz., the apex of the triangle) as being vertically above. From this point (i.e. the apex) suspend a weight. That line is called the *lamba* (perpendicular). The two sides (above the ground) are called the *bhujā*-s. The side along the ground is called the *bhūmi* (base). The two segments on the base, on either side of the perpendicular (*lamba*, altitude drawn from the apex), are called *ābādhā*-s.

Here, think of the line drawn from the centre to the (south-east) corner as the *bhūmi* (base). The *pūrva-sūtra* (west-east line passing through the centre) and the southern half of the eastern side (of the larger square) are taken as the *bhujā*-s (of the triangle considered). Half the hypotenuse from the (eastern) tip of the *pūrva-sūtra* is the altitude. In the same way is formed another triangle with its sides being the *dakṣiṇa-sūtra* (north-south line passing through the centre) and eastern-half of the southern side of the (larger) square. The base (of this triangle) is the same as the one taken earlier. Thus two triangles are formed in the (smaller) square.

Here, the base-segment (*ābādhā*) that touches the (south-east) corner is (taken as) *pramāṇa*. The distance between the corner and the end of the *dik-sūtra* (north-south or east-west line) is the *pramāṇa-phala*. The *icchā-rāśi* is the base minus the radius, which is the remaining bit in the base (from the circle) towards the corner. Calculate the corresponding *icchā-phala*. Measure out this *icchā-phala* from the (south-east) corner in both the sides of the (smaller) square; mark these points, and cut off the figure along the line joining them. The side of a (circumscribing) octagon will result. Double the *icchā-phala* and subtract from the side of the (larger) square (or the diameter). The result is the side of the octagon.

Now, square the radius joining the middle of the side of the octagon and also half the side of the octagon; add the two and find the square root. The result will be the hypotenuse, from the centre to the corner of the octagon. Take this as the base and construct the *lamba* (perpendicular) from the apex of the same triangle. That will fall from the centre of the side of the octagon on the hypotenuse. The hypotenuse will be divided into two *ābādhā*-s (segments) which lie on either side of the point where this perpendicular meets it. The radius and half the side of the octagon will be the *bhujā*-s (of this triangle of which the hypotenuse is the base). Now, the difference between the squares of these two *bhujā*-s (sides) and the difference between the squares of the two *ābādhā*-s (segments of the hypotenuse) are equal. Because, the *bhuja*-s are the *karṇa*-s (hypotenuses) associated with the *lamba* (perpendicular) and the *ābādhā*-s (segments), and the square of the *lamba* (perpendicular) in both the cases is the same. Hence the difference between the squares of the *ābādhā*-s (segments) is equal to the difference between the squares of the *bhujā*-s (sides). Therefore, if the difference between the squares of the *bhujā*-s (sides) is divided by the hypotenuse, the result will be the difference between the *ābādhā*-s (segments); because the hypotenuse is the sum of the segments, and since the division of the difference of the squares (of two numbers) by their sum will give the difference (between the numbers). Now, if the difference between the segments is subtracted from the hypotenuse and the result halved, the smaller segment will be got.

Now, this segment will be the *pramāṇa*. Half the side of the octagon is the *pramāṇa-phala*. Subtract the radius from the hypotenuse; the remainder, (the bit from the circle) towards the end of the hypotenuse, will be the *icchā-rāśi*. This will be a part of the smaller segment. Using the *trairāśika*: If the hypotenuse for the smaller segment is half the side of the octagon, what would be the hypotenuse for this *icchā-rāśi*, the given bit of the segment? The result would be a part of the side of the octagon. Mark that distance from the corner (of the octagon) on both sides, and cut off the corners of the octagon. The result will be (circumscribing) sixteen-sided figure. When the *icchā-phala* is doubled and subtracted from the side of the octagon, the side of the sixteen-sided figure will be obtained.

Continuing the procedure adopted for the derivation of the side of the (circumscribing) sixteen-sided figure, the measures of the sides of the (circumscribing) 32-sided figure and those of further figures with double the number of sides at each stage can be obtained; and when the number of corners is increased indefinitely up to uncountable (*asaṃkhyā*), the (resulting) figure would be essentially a circle (*vṛtta-prāya*). For this circle, the diameter would be the side of the (circumscribing) square, taken in the first instance. Then, making use of this circumference and diameter, either the diameter or the circumference of any circle can be found from the other by *trairāśika*.

6.3 Circumference of a circle without calculating square-roots

6.3.1 Dividing the circumference into arc-bits: Approximating the arc-bits by *Jyārdha*-s (Rsines)

Now is described the procedure for arriving at the circumference of a circle of desired diameter without involving calculation of square-roots. Construct a square with the four sides equal to the diameter of the proposed circle. Inscribe the circle inside the square in such a manner that the circumference of that circle touches the centres of the four sides of the square. Then, through the centre of the circle, draw the east-west line and the north-south line with their tips being located at the points of contact of the circumference and the sides. Then, the interstice between the east-point and the south-east corner of the square will be equal to the radius of the circle. Divide this line into a number of equal parts by marking a large number of points closely at equal distances. The more the number of divisions, the more accurate (*sūkṣma*) would be the (calculated) circumference.

Then draw hypotenuse-lines from the centre of the circle to all these points. In (the triangles) so formed, *koṭi* will be the *pūrva-sūtra* (line from the centre towards east) and the *bhujā*-s will be the segments, along the eastern side of the square, between the tip of the east-line and the tips of the hypotenuse-lines. There, the (interstice) from the *pūrva-sūtra* towards the next hypotenuse to the south of it, will be the *bhujā*. For the second hypotenuse, the first two segments will be the *bhujā*. For the further hypotenuse-lines, the *bhujā*-s will increase by one segment each. The *bhujā* for the hypotenuse at the (south-east) corner of the square will be the largest. In all these cases, the radius equal to the *pūrva-sūtra* will be the *koṭi*. Hence, the respective hypotenuse-lines will be the root of the sum of the squares of the radius and the respective *bhujā*.

Now, take the first segment, being the distance from the tip of the *pūrva-sūtra* to the tip of the first hypotenuse. Multiply it by the *pūrva-sūtra*, which is equal to the radius, and divide it by the first hypotenuse. The result will be the (perpendicular) distance from the east point to the first hypotenuse. (For the triangle formed), this perpendicular line will be a *koṭi*. The *bhujā* will be the (distance) from the meeting point of this *koṭi* and the first hypotenuse, and the tip of the hypotenuse. The corresponding *karṇa* will be the bit (of the eastern side of the square) joining the east point and the tip of the first hypotenuse. Take this as the *icchā-kṣetra*. We will now state a similar triangle which will be the *pramāṇa-kṣetra*. For this, the *koṭi* is the *pūrva-sūtra* from the centre of the circle to the mid-point of the eastern side of the (larger) square; the first hypotenuse will be the *karṇa*; the *bhujā* is the distance between the tips of the hypotenuse and the *koṭi*. The *icchā-kṣetra* is *tulyākāra* (similar) to this *pramāṇa-kṣetra*.

The reasoning for this is as follows: The *karṇa* of the *icchā-kṣetra* is parallel to the *bhujā* of the *pramāṇa-kṣetra* and the *karṇa* of the *pramāṇa-kṣetra* is parallel to the *bhujā* of the *icchā-kṣetra*. The *karṇa* of the *icchā-kṣetra*, which is a segment of the (eastern) side of the square, is perpendicular to the *pūrva-sūtra* which is the *koṭi* of the *pramāṇa-kṣetra*. Also, the *koṭi* of the *icchā-kṣetra*, which is being calculated as the *icchā-phala*, is perpendicular to the *karṇa* of the *pramāṇa-kṣetra*. For the above reason, the two figures are similar. Here, for these two figures, parallelness of their *bhujā* and *karṇa* (hypotenuse), and perpendicularity of their *koṭi* and *karṇa* (hypotenuse), render them into similar figures. On the other hand, if there is perpendicularity or parallelness of all the three sides, then also they wi11 be similar figures.

To cite an instance: On (the roof of a) square *maṇḍapa* (hall), for the slanting beam (*kazhukkol*), which might be taken as the *karṇa* of the *pramāṇa-kṣetra*, the joining tie (*vāmaṭa*, brim-plank) will be the *bhujā*. And the hole for the tie (*vaḷattuḷa*) which corresponds to the *karṇa* of the *icchā-kṣetra* will be parallel to this (*bhujā*). The *bhujā* for this *karṇa* will be the slant of the hole for the tie on the side of the beam. Since the *bhujā* and the *karṇa* (of the two) are parallel, the slant in the hole of the tie is caused by the slant of the beam. These things have to be thought out in this manner. Hence the *koṭi* of the *icchā-kṣetra* can be derived by means of *trairāśika*.

Then there is a third triangle. For this the east-west line is the *karṇa*. The distance of the first hypotenuse from the tip of the east-west line, which is the *koṭi* of the above-said *icchā-kṣetra*, is the *bhujā* here. The segment of the first hypotenuse extending from the meeting point of the *bhujā* (stated above) up to the centre of the circle is the *koṭi*. This is thus.

Then there is a second *pramāṇa-kṣetra*. For that the *koṭi* is the east-west line. The *bhujā* is two segments of the side of the (original) square taken from the tip of this *koṭi*. The *karṇa* is the second hypotenuse drawn from the centre of the circle. This is the second *pramāṇa-kṣetra*. Now, its *icchākṣetra* is this: Its *koṭi* is the line starting from the tip of the first hypotenuse, perpendicular to the second hypotenuse and meeting the second hypotenuse. The *bhujā* is (the line) from the meeting point of this *koṭi* and the second hypotenuse, to the tip of the second hypotenuse. The *karṇa* is the second segment of the (eastern side of the) original square. This is the second *icchā-kṣetra*.

To cite a parallel: When the second beam (*kazhukkol*, making the roof of a square *maṇḍapa*, referred to earlier) from the centre is taken as the *karṇa* of the *pramāṇa-kṣetra*, the *bhujā* of the *pramāṇa-kṣetra* would be two beam segments. Hence, the second beam will be longer than the first one. In proportion, the holes for the joining rod in that will also be longer. Now, this will be the *karṇa* of the *icchā-kṣetra* and will be parallel to the brim-plank (*vāmaṭa*) which is the *bhujā* of the *pramāṇa-kṣetra*. Thus, as the slant in the (several) beams and the orientation of the holes in them are similar, so too will the *pramāṇa-kṣetra* and the *icchā-kṣetra* considered here will be similar.

Take the second segment of (the eastern) side of the square starting from the tip of the east-west line. Multiply that by the radius which is the *koṭi* of the *pramāṇa-kṣetra* and divide by the second hypotenuse which is the *pramāṇa*. The result will be the *koṭi* of the second *icchā-kṣetra*. Now, take this *koṭi* as the *bhujā* and the segment in the second hypotenuse, being the distance from its meeting point to the centre of the circle, as the *koṭi*. Take the first hypotenuse as the *karṇa*. Thus a third triangle is to be noticed here.

Thus, there are three triangles related to each of the segments of the side of the square commencing from the east-point and going up to the (south-east) corner. There, multiply each of these segments by *dik-sūtra*, the line from the centre towards the east (viz., radius). Divide each product by the longer of the (two) hypotenuse-lines which touch the tips of corresponding segment. The result, in each case, will be the perpendicular distance from the tip of the previous hypotenuse to the longer hypotenuse. These are the *koṭi*-s of the *icchā-kṣetra*-s. Each of these will then be considered as *bhujā*. The corresponding *koṭi* would be the segment of the longer hypotenuse, from the meeting point of this *bhujā* to the centre of the circle. And the *karṇa* would be the lesser of the two hypotenuses from the centre touching the two ends of the *bhujā*. These are the triangles. Some of these will be *pramāṇa-kṣetra*-s in what follows. The corresponding *icchā-kṣetra*-s will be portions of the *pramāṇa-kṣetra*-s which are within the circle. The *icchā* (*rāśi*) here would be the radius which is a portion of the *pramāṇa-karṇa*. The *icchā-phala* would be the perpendicular distance from the tip of this radius to the bigger hypotenuse.

These *icchā-phala*-s are nothing but the *jyārdha*-s, Rsines, of the bits of circumference between the successive hypotenuse-lines. Now, multiply each segment of the (eastern) side of the square commencing from the east-point, twice by the radius and divide by the product of the two hypotenuse-lines meeting the ends of the segment. The result, in each case, will be the *jyārdha*, Rsine of the bit of the circumference between the two hypotenuse-lines. When the segments of the square are extremely small, these *jyārdha*-s, Rsines, will be almost (*prayeṇa*) same as the corresponding arcs.

6.3.2 Circumference in terms of the *Karṇa*-s (hypotenuses)

Now, since the (eastern) side of the square has been divided into equal segments, the multiplicand is the same in all the above cases. The multiplier, in each case, is the square of the radius. Since the divisors are the products of adjacent hypotenuse-lines, they are all different. Now, in this situation, it is possible to take the product of the two hypotenuse-lines as half the sum of their squares, since they (hypotenuses) are practically the same. This being the case, divide the dividend separately by the squares of the two hypotenuse-lines, add the results obtained and halve them. The result of dividing by half the sum of the squares would be equal to this.

We shall consider each of the segments of the (eastern) side of the square as being divided by the square of the hypotenuse drawn to the northern tip of each segment. There, the first is the east-west line. When division is made by the square of this, the multiplier also being the same, viz., square of the radius, the result will be just the segment itself. The last hypotenuse is the line to the (south-east) corner (from the centre). When division is made by its square, half the segment will be the result, since the square of the last hypotenuse is double the square of the radius. When the divisor is double the multiplier, half the multiplicand is the result.

Now, there are two hypotenuse-lines touching the two tips of each segment. With reference to this, find the sum of the results obtained by dividing by the squares of the first of the (two) hypotenuse-lines. Find also the sum of the results obtained by dividing by the second of the (two) hypotenuse-lines. The difference between these two (sums) will be the difference between the first term of the first sum and the last term of the second sum. That will be, half the length of the segment. For the terms in between, since the divisors are the same the results will also be the same. There is no difference (between the two sums) as regards the terms starting from the second to the penultimate. (The difference between the two sums is) thus half the length of the segment. There, the result on dividing by the first divisor (the square of the first hypotenuse) is the segment itself. The result on dividing by the last divisor (the square of the last hypotenuse) is half the segment. In the case of dividing by half the sum of the squares of the hypotenuse-lines, the difference is one-fourth of the segment. When the segment becomes extremely small, this one-fourth becomes negligible. Hence, it follows that we should take as the divisor the square of just one hypotenuse (in each term).

6.3.3 *Śodhya-phala*-s: Iterative corrections

Now, for each of the segments, we shall consider that the square of the larger hypotenuse is taken as the divisor. Then, multiply the segments by the square of the radius and divide by the square of the larger hypotenuse associated with them. The results, will be the *jyārdha*-s of the corresponding circumference-bits (arcs-bits) contained in the interstices of the hypotenuse-lines.

Now, multiply the respective segments by the difference between the multiplier (the square of the radius) and the respective divisor (the square of the hypotenuse) and divide by the square of the respective hypotenuse. Subtract the results from the respective segments. The results will be the *jyā* (Rsine) of the respective circumference-bit of arc contained in the interstices of the hypotenuse-lines. There, the square of the sum of those segments in the (eastern) side of the square, lying between the east-point and the respective tips of the hypotenuse, is the difference between the multiplier and the divisor. The multiplier is the square of the radius.

There, if the multiplication is done by the difference between the multiplier and the divisor, and division is done by the multiplier itself, the result will be larger (than the one referred to above), since the multiplier is smaller than the divisor. Now, place this result at two places, multiply the value at one place by the difference between the multiplier and the divisor and divide by the divisor; the result obtained is subtracted from the earlier result (kept at the other place). That will be the actual result.

The above would mean that in the case of calculating the *śodhya-phala* (the subtractive term obtained above), if the multiplication is done by the difference between the multiplier and the divisor and division is done by the multiplier (instead of the divisor), then a similar subtraction should be made from that term also as was done before. There, in the second *śodhya-phala* (subtractive term obtained by iteration) also, the result of dividing the difference between the multiplier and divisor by the divisor would give rise to another subtractive term from the *śodhya-phala*, which will be the third result. Here also, if the division is made by the multiplier, a fourth *śodhya-phala* would be obtained (following the same procedure as before). If in all (the *śodhya-phala*-s), the division is made by the multiplier, then there will be no end to the series of subtractive terms (*śodhya-phala-paramparā*), as always (at the end of any number of steps) the last term has a division by the divisor. If there is to be no division by the divisor, then there will be no end to the number of subtractive terms. When the (subtractive term) becomes very small, it can be discarded.

6.3.4 *Phala-yoga*-s, and their series: *Phala-paramparā*

When we proceed in the above manner, the first (*phala-yoga*) is the sum of the multiplicands, which is the sum of the segments of the (eastern) side of the square, being the radius. The second is subtractive from the first. The third is subtractive from the second. This being the case, add together all the odd terms; add also all the even terms amongst themselves. From the sum of the odd-s subtract the sum of the even-s. The result will be one-eighth of the circumference. The above is the case when the multiplier is small. When, however, the multiplier is large, then all the *phala*-s (results) have to be added to the multiplicand.

Since, here, the multipliers and divisors are the squares of the *koṭi* (which is the radius) and *karṇa*-s (hypotenuses), the differences between the multipliers and divisors would be the square of the *bhujā*-s. The first *bhujā* would be the first of the equal segments into which the (eastern) side of the square has been divided. Two segments together make up the second *bhujā*. Three segments together make up the third *bhujā*. In this manner, the *bhujā*-s will be successively made up of a number of segments, the number increasing by one at each step (*ekādyekottara*). Further, they have to be conceived as being of infinitesimal length (*aṇu-parimāṇa*), for the sake of accuracy (*sūkṣmatā*) of the result. Then, consider them also as whole numbers. Starting from unity, consider the sum of the squares of successive numbers. Multiply by that sum, the multiplicand which is the segment (of the side of the square) which has been conceived both as an infinitesimal and as a unit (as *aṇu-parimita* and *rūpa*) and divide by the square of the radius. The quotient got will be the first *phala-yoga*, sum of results.

For the second *phala-yoga*, the first *phala* will be the multiplicand. The multiplicands are of different (measures); the difference between the multiplier and divisor which is the square of the *iṣṭa-bhujā* (portion of the eastern side of the square) are also several. Hence, there is no easy way to multiply by the sum of the difference between the multipliers and divisors. Hence, multiply the *bhujā-varga-saṅkalita*, summation of the squares of the *bhujā*-s (successive portions of the eastern side of the square), which is the sum of the difference between the multipliers and divisors, twice by the first multiplier which is unity, and divide the product twice by the square of the radius. The result will be the second *phala-yoga*. Here, the multiplier will be the summation of the squares of the squares (*varga-varga*) of numbers from unity increased consecutively by one (*ekādyekottara*). And the divisor will be the square of the square of radius. Here the radius (measured by the segment as a unit) will be the *pada*, number of terms for the summation. Then, the third *phala-yoga* is also to be derived from the first multiplicand. There the multiplier is the *samaṣaḍghāta-saṅkalita*, summation of the sixth power of numbers from one onwards (*ekādyekottara*), and the divisor is the sixth power of the radius.

Thus, (for the further *phala-yoga*-s) the divisor would be two powers raised further, (of the radius), and summation of the same powers (of numbers) is the multiplier. There, from the cubes are obtained, the summation of squares; from the fifth powers, the summation of the fourth powers; from the seventh powers, the summation of the sixth powers.

There, multiply the cube which forms the multiplier with the square of the radius, which is the divisor. The result will only be the radius. Thus, everywhere when the multipliers are divided by their respective divisors, the result will be the radius.

Now, since the cubes have to be divided by 3, divide the radius by 3. Then it would be that the summation of the squares of the (segments of the) radius has been divided by the square of the radius. In the same manner, division of the radius by 5 would be the same as division of the summation of the fourth powers by the fourth power. Thus, the result of dividing the radius successively by the odd numbers, 3, 5 etc. would be successive outcomes in the above-stated *phala-paramparā* (sequence of results). Hence, has it been said:

> *triśarādiviṣamasaṃkhyābhaktam ṛṇaṃ svaṃ pṛthak kramāt kuryāt* |
>
> Take the results of the division by the odd numbers 3, 5 etc. as additive and subtractive in order (cited also in *Yuktidīpikā* com. on *Tantrasaṅgraha*, II. 271[1]).

There, in this series of results (*phala-paramparā*), when subtractions have to be done at each step, it amounts to subtracting the sum of the odds from the sum of the multiplicands, and adding the sum of the evens. Hence has it also been said: *ṛṇaṃ svam pṛthak kramāt kuryāt*, 'do subtraction, or addition, in order'.

Next, *sama-ghāta-saṅkalitānayana*, the principle of 'summation of equal powers (of natural numbers)' is to be explained as it is useful in the above context. In that context, the principle of computing the summation of (natural) numbers and their squares are also explained here. Incidentally

[1]This and several other verses of Mādhava which have been cited in *Yuktibhāṣā*, have also been cited by *Śaṅkara* in his commentary *Yuktidīpikā* on *Tantrasaṅgraha*. It may however be noted that *Yuktidīpikā* declares, at the end of each chapter, that it is only presenting the subject as expounded by *Jyeṣṭhadeva* (in *Yuktibhāṣā*).

(*uttarottara-saṅkalitaikyānayana*) the principle of repeated summations of (natural numbers) is also explained.

6.3.5 *Śodhya-phala*-s and *Phala-yoga*

Now, the square of the east-west line (the radius) is the multiplier and the square of the corresponding hypotenuse is the divisor. Therefore, the respective difference between the multiplier and the divisor is the square of the segment in the (eastern) side of the square occurring in the interstice between the tip of the hypotenuse and the east-west line. The multiplicand is the segment of the (eastern) side of the square between the tip of the desired hypotenuse and the tip of the adjacent (smaller) hypotenuse. The *icchā-phala* is the (*ardha-jyā*) Rsine of the circumference bit (arc) which occurs in between the said two hypotenuses. Thus are obtained all the results. Here, the multiplicands are all the same, since the segments (on the eastern side of the square) between two hypotenuses are all equal. When all these results are calculated and added together, the result is the circumference of that portion of the circle which lies between the east-west line and the hypotenuse joining the (south-east) corner (of the square).

Here, the *bhujā* corresponding to the hypotenuse next to the east-west line is one segment of the side of the square. For the second hypotenuse, the *bhujā* is given by two segments. In this manner, the *bhujā* for the succeeding hypotenuses will include one segment more (than the previous). Thus the successive *bhujā*-s, starting from the first, are obtained by adding one segment each to the previous one. Hence, the sum of their squares is equal to the sum of the difference between the multipliers and the divisors. Since the multiplicand for all is the same, if that is multiplied by the sum of the difference between the multiplier and divisor, the result will be the *phala-yoga*, if the divisor by which the product is to be divided is just 1.

Suppose the divisor to be 1. It also taken to be the square of the radius for doing the calculations. Now, find the product of the result arrived at as above and the difference between the multiplier and the divisor. When this is lesser than the dividend, then the result got by dividing with the divisor will be equal to the result got by dividing by the multiplier. When it is not less, but in fact larger than the dividend, then the result there-from and the difference between the multiplier and the divisor should be multiplied, and quotient obtained by dividing that by the divisor should be subtracted from the quotient got by dividing by the multiplier. Then also the result will be the same. When the subtractive term is obtained, if we instead divide by the multiplier, the result will be slightly larger. In that case a subtractive term (*śodhya-phala*) has to be derived from that also. If the process is repeated, further terms (*śodhya*-s) shall have to be subtracted. Then, starting from the end, when all these (*śodhya*-s) have been subtracted, the result will be obtained.

6.3.6 *Śodhya-phala*-s: An example

Here, let the dividend be 100. Let the divisor be 10 and the multiplier 8. Suppose also that by multiplying this, 100 is got. Here, if the division is done by the divisor (10), the result is 10. When the divisor 10 is to be subtracted once from the dividend (to get 90), if instead (the multiplier) 8 is subtracted, (to get 92), the difference between the divisor and the multiplier, viz., 2, will remain back in the dividend. Again, as many times as (the divisor and the multiplier are) subtracted, so many times of the difference between the divisor and the multiplier will remain back in the dividend. Hence, if the product of the result (100/10) and the difference between the multiplier and the divisor (10-8=2) is subtracted from the dividend (100) and the remainder (100-20=80) is divided by the multiplier (8), the result ($80/8 = 10$) will be equal to the result got by dividing (100) by the divisor (10). Here, when the dividend (100) is divided by the multiplier (8), the result is 12.5. When this result is multiplied by the difference between the multiplier and divisor, (viz., 2) the result got is 25. When this is divided by the divisor, 10, the result is $2\frac{1}{2}$. When this is subtracted from the earlier result, $12\frac{1}{2}$, the remainder is 10.

Here, if 25 is divided by 8, the result is 3 and one-eighth. This is *śodhya*, to be reduced, the result got is larger. Now, when this result, (3 and one-eighth), is multiplied by the difference between the multiplier and the divisor (2), and the product divided by the divisor (10), the result is half plus one-eighth. When this is subtracted from the second result (namely 3 and one-eighth) we got $2\frac{1}{2}$. Then, this is the amount to be subtracted from the first result (namely $12\frac{1}{2}$). In this manner, the respective results are multiplied by the difference between the multiplier and the divisor and divided by the divisor, and the result when subtracted from the previous result will be more accurate. Then it shall be subtracted from the result earlier; then (the still corrected result) from the one earlier than that, and so on. In this manner, the result obtained at the first step can be made to correspond to the actual.

Now, the respective squares of the *bhujā*-s (portions of the eastern side of the square) are the difference between the multiplier and divisor of (the multiplicand, viz.,) the segment of the square. The results got at each stage shall have to be multiplied by the square of the *bhujā*-s. Since there is no other result (from which to start), calculate the second result from the *bhujā-khaṇḍa*, the segment (of the side of the square) which is the multiplicand for the first result. (The method) for this: Since the multiplier for both the first and the second results are the square of the *bhujā*, to get the next result multiply twice with the square of the *bhujā*, the multiplicand which is the *bhujā-khaṇḍa*. The divisor of the first result is the square of the radius; so, divide (the product arrived at as above) by the square of that (i.e., the fourth power of the radius) for the second result. Here, since the multiplicands are the same, the multiplication can be done with the sum of the multipliers. Here, the multipliers are the squares of the squares (fourth power) of the *bhujā-khaṇḍa* multiplied by successive numbers starting with unity. Their sum is the sum of the difference of the multipliers and divisors. This sum is termed *ekādyekottara-varga-varga-saṅkalita*, summation of the squares of squares of numbers 1, 2, etc. Here the divisor is the square of square of the radius. Thus, for getting the first result, the multiplier is two equal *bhujā*-s which have been multiplied amongst themselves, and the divisor is two radii which are multiplied amongst themselves.

Then, for the second result: The multiplier is the equal bhuja segments multiplied four-fold and the divisor is radius multiplied four-fold. Then, for the third result: The multipliers and divisors are, (respectively), the same ones multiplied amongst themselves six-fold. Thus, for the fourth (result) the multipliers and divisors are (respectively) the same ones multiplied eightfold amongst themselves. The multiplicand, at all places, is the same, the *bhujā-khaṇḍa*. Hence, for obtaining the *phala-yoga*, the final result, the final multiplier will be the sum of the multipliers. Now, when the first *phala-yoga* is calculated, the *bhujā*-s associated with the hypotenuses commencing from the east-west line up to the line joining the (centre to the south-east) corner of the square, will be multiples of the *bhujā-khaṇḍa*, commencing from one segment of the side of the square and increasing at the rate of one segment, the last of them being the side of the square equal to the radius. The sum of their squares is the sum of the multipliers. This is termed *ekādyekottara-varga-saṅkalita*. Thus, in the calculation of the second *phala-yoga*, the sum of the multipliers is the sum of the squares of the squares of the successive *bhujā*-s commencing from one *bhujā-khaṇḍa*, and growing by the addition of one *bhujā-khaṇḍa* to the previous one, the last one being the radius. Thus the sum of the multipliers in terms that follow, will be the summation of (the multipliers) the same numbers of *bhujā-khaṇḍa* raised to powers 6, 8 etc.

6.4 *Saṅkalita*: Summation of series

Now is described the methods of making the summations (referred to in the earlier sections). At first, the simple arithmetical progression (*kevala-saṅkalita*) is described. This is followed by the summation of the products of equal numbers (squares). Though not useful in the (calculations dealt with in the present work), the summation of the products of 3 and 5 identical numbers are also described here, since they occur among matters useful herein.

6.4.1 *Mūla-saṅkalita*: Sum of natural numbers

Here, in this *mūla-saṅkalita* (basic arithmetical progression), the final *bhujā* is equal to the radius. The term before that will be one segment (*khaṇḍa*) less. The next one will be two segments less. Here, if all the terms (*bhujā*-s) had been equal to the radius, the result of the summation would be obtained by multiplying the radius by the number of *bhujā*-s. However, here, only one *bhujā* is equal to the radius. And, from that *bhujā*, those associated with the smaller hypotenuses are less by one segment each, in order. Now, suppose the radius to be of the same number of units as the number of segments to which it has been divided, in order to facilitate remembering (their number). Then, the number associated with the penultimate *bhujā* will be less by one (from the number of units in the radius); the number of the next one, will be less by two from the number of units in the radius. This reduction (in the number of segments) will increase by one (at each step). The last reduction will practically be equal to the measure of the radius, for it will be less only by one segment. In other words, when the reductions are all added, the sum thereof will practically (*prāyeṇa*) be equal to the summation of the series from 1 to the number of units in the radius; it will be less only by one radius length. Hence, the summation will be equal to the product of the number of units in the radius with the number of segments plus one, and divided by 2. The summation of all the *bhujā*-s of the different hypotenuses is called *bhujā-saṅkalita*.

Now, the smaller the segments, the more accurate (*sūkṣma*) will be the result. Hence, do the summation also by taking each segment as small as an atom (*aṇu*). Here, if it (namely, the *bhujā* or the radius) is divided into *parārdha* (a very large number) parts, to the *bhujā* obtained by multiplying by *parārdha* add one part in *parārdha* and multiply by the radius and divide by 2, and then divide by *parārdha*. For, the result will practically be the square of the radius divided by two. In order that the number might be full, it is divided by *parārdha*. Thus, if the segments are small, only one small segment shall have to be added to get the summation. Hence, not adding anything to (the units in) the *bhujā*, if it is multiplied by the radius and divided by 2 it will be *bhujā-saṅkalita* when it has been divided into extremely small segments. Thus, the square of the radius divided by 2 will be the *saṅkalita* when the segment (*bhujā-khaṇḍa* into which the *bhujā* or the side of the square is divided) is very small.

6.4.2 *Varga-saṅkalita*: Summation of squares

Now is explained the summation of squares (*varga-saṅkalita*). Obviously, the squares of the *bhujā*-s, which are summed up above, are the *bhujā*-s each multiplied by itself. Here, if the *bhujā*-s which are all multipliers, had all been equal to the radius, their sum, (*saṅkalita* derived above), multiplied by the radius would have been the summation of their squares. Here, however, only one multiplier happens to be equal to the radius, and that is the last one. The one before that will have the number of segments one less than in the radius. (Hence) if that, (i.e., the second one), is multiplied by the radius, it would mean that one multiplied by the penultimate *bhujā* would have been the increase in the summation of the squares. Then (the segment) next below is the third. That will be less than the radius by two segments. If that is multiplied by the radius, it will mean that, the summation of the squares will increase by the product of the *bhujā* by two (segments). In this manner, the summation in which the multiplication is done by the radius (instead of the *bhujā*-s) would be larger than the summation of squares by terms which involve the successively smaller *bhujā*-s multiplied by successively higher numbers. If (all these additions) are duly subtracted from the summation where the radius is used as the multiplier, the summation of squares (*varga-saṅkalita*) will result.

Now, the *bhujā* next to the east-west line is less than the radius by one (segment). So if all the excesses are summed up and added, it would be the summation of the basic summation (*mūla-saṅkalita-saṅkalita*). Because, the sums of the summations is verily the 'summation of summations' (*saṅkalita-saṅkalita*). There, the last sum has (the summation of) all the *bhujā*-s. The penultimate sum is next lower summation to the last. This penultimate sum is the summation of all the *bhujā*-s except the last *bhujā*. Next to it is the third sum which is the sum of all the *bhujā*-s except the last two. Thus, each sum of the *bhujā*-s commencing from any *bhujā* which is taken to be the last one in the series, will be less by one *bhujā* from the sum (of the *bhujā*-s) before that.

Thus, the longest *bhujā* is included only in one sum. But the *bhujā* next lower than the last (*bhujā*) is included both in the last sum and also in the next lower sum. The *bhujā*-s below that are included in the three, four etc. sums below it. Hence, it would result that the successively smaller *bhujā*-s commencing from the one next to the last, which have been multiplied by numbers commencing from 1 and added together, would be summation of summations (*saṅkalita-saṅkalita*). Now, it has been stated earlier that the summation (*saṅkalita*) of (the segments constituting) a *bhujā* which has been very minutely divided, will be equal to half the square of the last *bhujā*. Hence, it follows that, in order to obtain the summation (*saṅkalita*) of the *bhujā*-s ending in any particular *bhujā*, we will have to square each of the *bhujā*-s and halve it. Thus, the summation of summations (*saṅkalita-saṅkalita*) would be half the summation of the squares of all the *bhujā*-s. In other words, half the summation of the squares is the summation of the basic summation. So, when the summation is multiplied by the radius, it would be one and a half times the summation of the squares. This fact can be expressed by stating that this contains half more of the summation of squares. Therefore, when the square of the radius divided by two is multiplied by the radius and one-third of it subtracted from it, the remainder will be one-third of the whole. Thus it follows that one-third of the cube of the radius will be the summation of squares (*varga-saṅkalita*).

6.4.3 *Ghana-saṅkalita* and *Varga-varga-saṅkalita*: Summation of third and fourth powers

Now, to the method or deriving the summation of cubes: Summation of cubes, it is clear, is the summation where the square of each *bhujā* in the summation of squares is multiplied by the *bhujā*. Now, by how much will the sum of cubes increase if all the *bhujā*-squares were to be multiplied by the radius. By the principle enunciated earlier, the *bhujā*-square next to the last will increase by itself being multiplied by 1. The *bhujā*-squares below will increase by their multiples of two, three etc., in order. That sum will be equal to the summation of the summation of squares (*varga-saṅkalita-saṅkalita*). It has already been shown that the summation of squares is equal to one-third the cube of the radius. Hence one-third the cube of each *bhujā* will be equal to the summation of all the *bhujā*-squares ending with that *bhujā*. Hence, it follows that the summation of summation of *bhujā*-squares (*varga-saṅkalita-saṅkalita*) is equal to one-third the sum of the *bhujā*-cubes (*ghana-saṅkalita*). Therefore, the summation of squares multiplied by the radius will be equal to the summation of the cubes plus a third of itself. Hence, when one-fourth of it is subtracted, what remains will be the summation of cubes. Hence, it also follows that the summation of cubes (*ghana-saṅkalita*) is equal to one-fourth the square of the square of the radius.

Then, when this summation of cubes is multiplied by the radius, by the principle enunciated earlier, it follows that the result will be the summation of the squares of squares (*varga-varga-saṅkalita*) together with the summation of the summation of cubes (*ghana-saṅkalita-saṅkalita*). It has just been stated that the summation of cubes is one-fourth the square of square (of the radius). Hence, by the principle enunciated earlier, it also follows that one-fourth the sum of squares of squares is the summation of the summation of cubes. Hence, this being in excess of the result by one-fourth of itself, if one-fifth of it is subtracted, it follows that the summation of squares of squares (*varga-varga-saṅkalita*) will be equal to one-fifth of the radius raised to the power of five.

6.4.4 *Samaghāta-saṅkalita*: General principle of summation

Now, the square of the square (of a number) is multiplied by itself, it is called *sama-pañca-ghāta* (number multiplied by itself five times). The successive higher order summations are called *sama-pañcādi-ghāta-saṅkalita* (and will be the summations of powers of five and above). Among them if the summation (*saṅkalita*) of powers of some order is multiplied by the radius, then the product is the summation of summations (*saṅkalita-saṅkalita*) of the (powers of the) multiplicand (of the given order), together with the summation of powers (*sama-ghāta-saṅkalita*) of the next order. Hence, to derive the summation of the successive higher powers: Multiply each summation by the radius. Divide it by the next higher number and subtract the result from the summation got before. The result will be the required summation to the higher order.

Thus, divide by two the square of the radius. If it is the cube of the radius, divide by three. If it is the radius raised to the power of four, divide by four. If it is (the radius) raised to the power of five, divide by five. In this manner, for powers rising one by one, divide by numbers increasing one by one. The results will be, in order, the summations of powers of numbers (*sama-ghāta-saṅkalita*). Here, the basic summation is obtained from the square, the summation of squares from the cube, the summation of cubes from the square of the square. In this manner, if the numbers are multiplied by themselves a certain number of times (i.e., raised to a certain degree) and divided by the same number, that will be the summation of the order one below that. Thus (has been stated) the method of deriving the summations of (natural) numbers, (their) squares etc.

6.4.5 Repeated summations

Now, are explained the first, second and further summations: The first summation (*ādya-saṅkalita*) is the basic summation (*mūla-saṅkalita*) itself. It has already been stated (that this is) half the product of the square of the number of terms (*pada-vargārdha*). The second (*dvitīya-saṅkalita*) is the summation of the basic summation (*mūla-saṅkalitaikya*). It has been stated earlier that it is equal to half the summation of squares. And that will be one sixth of the cube of the number of terms.

Now, the third summation: For this, take the second summation as the last term (*antya*); subtract one from the number of terms, and calculate the summation of summations as before. Treat this as the penultimate. Then subtract two from the number of terms and calculate the summation of summations. That will be the next lower term. In order to calculate the summation of summations of numbers in the descending order, the sums of one-sixths of the cubes of numbers in descending order would have to be calculated. That will be the summation of one-sixth of the cubes. And that will be one-sixth of the summation of cubes. As has been enunciated earlier, the summation of cubes is one-fourth the square of the square. Hence, one-sixth of one-fourth the square of the square will be the summation of one-sixth of the cubes. Hence, one-twenty-fourth of the square of the square will be the summation of one-sixth of the cubes. Then, the fourth summation will be, according to the above principle, the summation of one-twenty-fourths of the square of squares. This will also be equal to one-twenty-fourth of one-fifth of the fifth power. Hence, when the number of terms has been multiplied by itself a certain number of times, (i.e., raised to a certain degree), and divided by the product of one, two, three etc. up to that index number, the result will be the summation up to that index number amongst the first, second etc. summations (*ādya-dvitīyādi-saṅkalita*).

6.5 Conclusion: Calculation of the circumference

Here, it is necessary to calculate also the summation of squares, the summation of the squares of squares and the sum of numbers raised to the power of 6 etc. Hence it was directed to divide by numbers starting with 3, 5, etc. The divisors for these are the square of the radius, square of the square etc. But the result of dividing the cube of the radius by the square of the radius, the quotient is the radius itself. Hence, the radius divided by three is the first sum of the results (*phala-yoga*). And this is the sum of the differences of the respective multiplicands and the respective results (*phala*). Therefore, subtract it from the sum of multiplicands. The result will be half the side of the square from the tip of the east-west line to the (south-east) corner.

Likewise, when the fifth power (of the radius) is divided by the square of the square (of the radius), the result is only the radius. Thus, the radius divided by 5 is the second result. In this manner, when the radius is divided by the odd numbers 7, 9 etc., further results will be obtained. The results got are to be alternatively added to and subtracted from the radius. In this way, we obtain one-eighth of the circumference of the circle.

Here, as the multiplier is smaller than the divisor, the succeeding terms become less and less, and when the terms become very small, then they can be discarded and the calculation ended; then the result will be mostly accurate. The result got will be the portion of the circle lying between the tip of the east-west line and the line (from the centre) joining the (south-east) corner. When this is multiplied by 8, (the circumference) of the circle will be complete. First multiply the radius which is the dividend by 8; that will be four times the diameter. It is to this diameter that the necessary procedures have to be adopted as explained with reference to the verse *vyāse vāridhinihate...* (cited also in *Yuktidīpikā*, com. on *Tantrasaṅgraha*, II. 271), and the prescribed corrections are to be applied to get (the circumference of) the circle.

6.6 *Cāpīkaraṇa*: Conversion of the Rsine to arc

Using the principles enunciated above, the *jyā*-s (Rsines) can be converted into arcs as given in the verses

> *iṣṭajyātrijyayorghātāt koṭyāptaṃ prathamaṃ phalam* |
> *jyāvargaṃ guṇakaṃ kṛtvā koṭivargaṃ ca hārakam* ||
>
> *prathamād phalebhyo'tha neyā phalatatirmuhuḥ* |
> *ekatryādyojasaṃkhyābhirbhakteṣveteṣvanukramāt* ||
>
> *ojānāṃ saṃyutestyaktvā yugmayogaṃ dhanurbhavet* |
> *doḥkoṭyoralpameveṣṭaṃ kalpanīyamiha smṛtam* ||
>
> *labdhīnāmavasānaṃ syānnānyathāpi muhuḥ kṛte* |
>
> The product of the desired *jyā* (Rsine) and the radius (Rsine 90), divided by the *koṭi* (Rcosine) is the first result. Making the square of the Rsine the multiplier and the square of the Rcosine the divisor, derive a series of successive results (by multiplying and dividing) the first result successively. Divide these results, in order, by the odd numbers 1, 3 etc., find the sum of the terms in the even places and subtract them from the sum of the terms in the odd places. The result will be the corresponding arc (*dhanus*). Here, the lesser of the *doḥ* and *koṭi* is to be taken as the desired *jyā*. Otherwise there will be no end to the quotients when the successive terms are calculated. (cited also in *Yuktidīpikā*, II. 206-209)

> *vyāsavargād ravihatāt padaṃ syāt prathamaṃ phalam* |
> *tadāditastrisaṃkhyāptaṃ phalaṃ syāduttarottaram* ||

> *rupādyayugmasaṃkhyābhirhṛteṣveṣu yathākramam* |
> *viṣamānāṃ yutestyaktvā samaṃ hi paridhirbhavet* ||
>
> Multiply the square of the diameter by 12 and find the root. That shall be the first result. That result divided by 3 shall be the second result. Further and successive results are obtained (by dividing the further results repeatedly by 3, in order). All these results are divided, in order, by the odd numbers 1, 3 etc. Find the sum of the odd results (now got) and subtract from it the sum of the even results. The remainder is the circumference. (cited also in *Yuktidīpikā*, II. 212-214)[2]

Now is stated the method to find the arc of the *bhujā* or *koṭi* (Rsine or Rcosine), whichever is smaller. Here too, first it is supposed that the Rsine is smaller. Multiply this desired Rsine by the radius and divide by the Rcosine (*koṭi-jyā*). The result would be the first result. Then multiply this result itself by the square of the Rsine and divide by the square of the Rcosine. This would be the second result. Likewise calculate the third result, by multiplying the second result by the square of the Rsine and dividing by the square of the Rcosine. Calculate further results in the same way, using the selfsame multiplier and divisor. Divide the sequence of results (*phala-paramparā*), in order, by the odd numbers 1, 3, 5 etc. Of the results now got, find the sum of the first, third, fifth etc., and subtract therefrom the sum of the second, fourth etc. The remainder is the (desired) arc. To get the complementary-arc (*koṭi-cāpam*), subtract this from (the arc of the circle) equal in measure to three signs (90 degrees). When the complementary arc is smaller, that is what is to be calculated to start with.

The rationale (*upapatti*) for this (is as follows): As in the (earlier) case where (the circumference of) the circle was sought to be got from the radius, here a square is constructed (touching the sides of the circle). The sine-chord (*jyā*) is so chosen such that the versine-chord (*śara*), is stretched along the (portion of the) east-west line starting from the centre going up to the circle. Extend the hypotenuse drawn from the centre of the circle and passing through the

[2] This result is discussed in the next Section (6.7).

tip of the sine-chord up to the side of the square lying outside the circle. Here, this would be the longest hypotenuse. The part of the (eastern) side of the square that lies between the tip of this hypotenuse and the tip of the east-west line will now be the first result. Then, it is instructed to derive a series of results arrived at by taking the above-said part of the side of the square as the multiplicand, its square as multiplier and with the square of the east-west line as divisor. There, in all the results, if the entire (half) side of the square (*bhujā-bhāga*) is the multiplicand, the multipliers and the divisors will be the same. When such is the case, the result will be the multiplicand itself at all places. Then, the multiplicand itself is being divided by the odd numbers (from 1). Here, however, the multipliers and the divisors which are the Rsine (*bhujā*) and the Rcosine (*koṭi*), are not the same, and the results will be (different and) become successively smaller. (In this manner) all the results have to be calculated in order. Obviously, for this it would be preferable to have smaller multipliers and divisors. Therefore (in the instructions contained in the verses) it is not the portion of the square, which stretches from the east-west line to the last hypotenuse, that is taken as the multiplier, but the (corresponding) interstice inside the circle, which is the Rsine. Then, the divisor would be its Rcosine. The respective results would be the multiplicands. This is the difference (between the calculation of one-eighth of the circumference and that of the given arc). Here also, the division is made by the odd numbers derived from *varga-saṅkalita* etc. Thus is (explained) the conversion of chords into arcs.

6.7 Circumference by an alternate method

Now, an (alternate) method to derive the circumference using the diameter, based on of the above-said principle: The square of the given diameter is multiplied by 12 and its root is found. This is the first result. This result is divided by 3. This is the second result. The second result divided by 3 is the third result. In like manner, find successive results by dividing by 3. These results are then divided, in order, by the odd numbers 1, 3, etc. Add together the odd results and from their sum subtract the sum of the even results. The remainder is the circumference.

Here, what is calculated to start with is one-twelfth the (circumference) of the circle. Multiply that by 12. The process here is similar to the way one-eighth of the circumference was calculated earlier. In this case also, mark the *jyā*-s (i.e., sine and cosine chords) as instructed earlier for *cāpīkaraṇa* (when *jyā*-s were converted to arcs). Mark off one-twelfth of the circle on both sides of the east-west line and consider the chord (*jyā*) that touches these points. That chord, then, will be the full chord (*samasta-jyā*) for one-sixth of the circle, with its middle point on the east-west line. Half of this chord will be the half-chord (*ardha-jyā*) of one-twelfth (of the circumference). And, it is one-fourth of the diameter, since the full chord of one-sixth (circumference) is equal to the radius or half the diameter (*vyāsārdha*). In this manner, six full chords of the length of the radius will cover the whole circle.

Here, the hypotenuse produced from the centre of the circle to the tip of the sine-chord is extended to touch the (east) side of the square. The part of the side of the square from this point to the east-west line will be now obtained as the first result. Using this, is derived the length of the portion of the circle between this hypotenuse and the east-west line. Since this has to be multiplied by 12 (to get the circumference), the first result itself was multiplied by 12.

Since the sine-chord of one-twelfth circumference is equal to one-fourth the diameter, the square of this sine-chord is one-sixteenth of the square of the diameter. Four times the square of this sine-chord is the square of the radius. The square of the radius less one-fourth of itself, i.e., the remaining three-fourths (of the square of the radius), is the square of the cosine-chord. Here, the above-said square of the cosine-chord is the divisor and the square of the radius is the multiplier of the square of the sine-chord. When these are reduced by common factor (*apavartana*), 4 will be got as the multiplier and 3 as the divisor. Now, the square of the sine-chord, which is the square of the diameter divided by 16, is the multiplicand. The result is the square of that part of the (east) side of the square extending from the tip of the hypotenuse to the east-point. Multiply it by the square of 12 and find the root of the product. Thus, here, the square of 12 and 4 are the multipliers. The product of these two is the square of 24. Multiply the divisors, 16 and

3, (to get) 48. Divide the square of 24 by 48; the result is 12. Hence it was asked to multiply the square of the diameter by 12. The square-root of this (number) would be half the side of a hexagon circumscribing the circle. Now, the hypotenuse passing through the vertex of the hexagon inscribed in the circle, will also meet the vertex of the circumscribing hexagon. This is the situation (as can be seen in the diagram).

Then, to find the second result, as instructed (earlier) in the derivation of the arc from the sine, half the side of the outer hexagon is the multiplicand, the square of the sine-chord is the multiplier and the square of the cosine-chord is the divisor. Then consider the second result as the multiplicand and using the same multipliers and divisors, find the further results. Here, when the multipliers and divisors are reduced by common factor (*apavartana*), 1 will be got as multiplier and 3 as divisor, since Rsine of one *rāśi* (30 deg) is one-fourth the diameter. Hence, when each of the successive results are divided by 3, the further results are obtained. Then divide these successive results respectively by the odd numbers 1, 3 etc. Then from the sum of the odd results subtract the sum of the even results. The result is the circumference. This is the method of deriving one-twelfth circumference from the diameter.

6.8 *Antya-saṃskāra*: Final correction terms

How, when a last correction (*antya-saṃskāra*) is made, to the (sum of) several successive results obtained (from the first result) on division in order, by the odd numbers, the circumference can be obtained well-nigh accurate, (the rationale of this) is explained here.

First, it has to be verified whether this stated correction itself is accurate or not. Such verification (might be made as follows): Obtain the result after division by a certain odd number, keep it in two places, and apply the correction at one place. To the result, at the other place, apply (add or subtract) first the result obtained by dividing by the next odd number and to that apply the correction corresponding to the next even number. If the circumferences obtained in both cases are equal, then the correction can be taken as accurate. Why? For the reason that when the circumference derived by both ways is the same, then this correction has uniform application (*sarva-sādhāraṇatva*). Hence, even when the correction is done after the division by higher and higher odd numbers, the result will be the same. Hence, it is to be understood that if the correction done for earlier terms is accurate, the same will follow later also.

If the difference between the result of division by the odd number above and the associated correction is equal to the previous correction, only then will the two circumference values (obtained) be equal. Hence, the result got through division by an odd number would be equal to the sum of the lower correction term and the next higher correction term. Corrections should be instituted in such a manner that the above equality occurs.

Now, if both the (successive) correction divisors are equal to double the odd number, then the sum of the two corrections will be equal to the result of (division by) that odd number. But it can never happen that both the (successive) correction divisors are equal to double the odd number. Why? Now, as proposed, the correction divisor is to be double the odd number. Then, it is proposed that an odd number has been taken as the divisor of the last term and that double the succeeding odd number is the first correction divisor. In that case, we will have to take the second correction divisor to be double the odd number further next to it. (Such has to be the case) because, same procedure is to be adopted (in both the cases). Then it (second correction divisor) will be 4 added to twice the odd number below. On the other hand, if that (second correction divisor) has been equated with double the odd number, the (correction divisor) below will be 4 less. Thus it is impossible for both the two correction divisors (above and below) to be equal to double the odd number.

Hence, a situation has to be envisaged when the two correction divisors and double the odd number are very close to each other. Now, if two numbers, which differ by 2 are doubled, the difference will become 4. The same difference will persist even if some number is added to or subtracted from both the numbers and then they are doubled. So, it should be the case that one correction divisor is less than double the odd number by 2 and the other more than that by 2. It was to conduce to such a situation that it has been said that the (first order) correction divisor should be double the even number above.

If the above is to be the case, it is also necessary to ascertain the extent of inaccuracy (*sthaulya*) of the correction, and for this the difference between the sum of the two (successive) corrections and the result of division by the odd number in between is to be known. For this, the two correction divisors and the odd number are converted so as to have a common denominator (*samaccheda*); then alone can one be subtracted from the other. For the reduction to common denominators, it is essential to know the numbers. If it is taken that the number is "this much", then the procedure cannot be applied in all places (i.e., in general). This being so, there is a method for the reduction to common denominators even without knowing the numbers, by using the consideration of positives and negatives (*dhanarṇa-parikalpana*, as employed in *avyakta-vidhi* (algebra)). How is it? This has been stated in the verse beginning

> *ṛṇam ṛṇadhanayoḥ ghāto dhanam ṛṇayoḥ dhanavadho dhanaṃ bhavati* |
>
> The product of negative and positive (numbers) is negative; while that of two negatives or two positives is positive.
>
> (*Brāhmasphuṭa-siddhānta*, 18.33).

Thus, it is to be known that a number which is negative and a number which is positive, if multiplied, will give a negative product. It is also to be known that two positive numbers, when multiplied, and two negative numbers, when multiplied, the products will be positive.

Now, it is also necessary to know the method of (working with cowries) representing magnitudes (*rāśi*), when their numerical values (*saṃkhyā*) are not known. How is it? Here, the magnitude (*rāśi*) for which the numerical value (*saṃkhyā*) is not known, and the number of times it appears (i.e., its powers) are represented by using different place values (*sthāna*-s), in the same manner as in (the case of) 1, 10, 100 etc, with the difference that they do not increase by just 10. There, the first place is called *rūpa-sthāna* (numerical place). When the capacity of that place has been completed up to the (unknown) magnitude, then go to the second place. That second place is called *rāśi-sthāna*. When we keep 1 in the second place, it means that the quantity is equal to the *rāśi*. Then, when the number in the second place is raised, it goes to the third place, which is the position of the 'square of the *rāśi* '. In the same way, the next fourth place is the cube's place. Then is the place of the square of the square. In the same way, the next ones are the fifth-power, sixth-power etc. This has been stated in the passage starting

> *avyaktavargaghanavargavargapañcahataṣaḍḍhatādīnāṃ sthānāni* |
>
> The places are, in order, the unknown, its square, cube, square of the square, the unknown raised to the power of 5, 6 etc.

Now, taking the last odd number as the *rāśi* (unknown magnitude), the method is demonstrated below. Draw two rows of compartments, so that each place (*sthāna*) is enclosed in a compartment. Let the compartments in the upper row represent the (parts of the) numerator and those in the lower row, the denominator. Let the odd number (the unknown magnitude) be $\boxed{1}\boxed{0}$. Here, when a number is negative it should be marked by a special sign(°). For zero anything might be used (to represent it). Here, the first correction divisor will be less than twice the *rāśi* by 2. The representation for that: In the second place there will be 2 and the first place there will be negative 2, i.e., $\boxed{2}\boxed{2^\circ}$. Then, the second correction divisor would be 2 more than double the *rāśi*, i.e., in the second place 2. In the first place there will be positive 2, and thus, $\boxed{2}\boxed{2}$. This is the way of placing (the numbers). Now, take these three as denominators, and take 1 (*rūpa*) as the numerator for each. Reduce these to a common denominator by the rule:

> *anyonyahārābhihatau harāṃśau rāśyossamacchedavidhānamevam* |
>
> Mutually multiply the numerators and denominators (of fractions); this is the method of getting a common denomination.
>
> (*Līlāvatī*, 30).

When this is done, the results got by dividing these will have a common denominator. There will be the same denominator. That will be (the following in the compartments): in the first (place) zero; second place minus 4; third place zero, because there will arise minus 4 and plus 4; and fourth place 4. This is the denominator. The numerator, in the case of division by the odd number: in the first place, minus 4; second place, zero; and third place, 4. The numerator in the case of division by the second correction divisor: in the first place zero; second place minus 2; and third place plus 2. Now, the numerator in the case of division by the first correction divisor: in the first place, zero; second and third places 2. Then, the (numerator of the) sum of the results of correction (*saṃskāra-phalayoga)*: in the first and second places, 0; third place 4. Thus:

On division by the odd number:	0	4	0	4°
	4	0	4°	0
On division by the first divisor:	0	2	2	0
	4	0	4°	0
On division by the second divisor:	0	2	2°	0
	4	0	4°	0
Sum of the two corrections:	0	4	0	0
	4	0	4°	0

Thus, the sum of the results of corrections exceeds the result on division by the odd number by 4. Hence, when double the succeeding even number is taken as the correction divisor, we see that the inaccuracy (*sthaulya*) is four times the diameter divided by the cube of the last odd number from which number itself has been subtracted. In this way, it is obvious that the result of correction (with this correction divisor) is more than what is sought after.

Here is the method to derive another (more accurate) correction. Suppose 1 is added to both the correction divisors. Here, the common denominator is obtained by multiplying all the three denominators. And the respective numerators are formed by multiplying the other two denominators. There, the numerator of the (division by the) odd number is the product of the two correction divisors. Here, when 1 is being added to the two correction divisors and they are multiplied, it is to be known by how much would be the increase from the earlier case. There, multiply one of the divisors increased by 1, by the other divisor. (Similarly) multiply by the first divisor the other to which too 1 has been added. Then add the two. This will give the increase in the numerator when 1 has been added to the two divisors. Now, the two divisors have to be multiplied by the number unity. Hence, the sum of the correction divisors can be mu1tiplied by unity. The sum of the correction divisors will now be equal to the *rāśi* multiplied by 4, since one divisor will be 2 less than twice the *rāśi* and the other will be more than that by 2. Hence, the numerator of (the division by the) odd number, when converted to common denominator, will be increased by *rāśi* multiplied by 4 and a *rūpa*. Now, the numerator of the first correction divisor is the product of the odd number and the second correction divisor. There, because of the increase of 1 in the second correction divisor, there will be an increase by one *rāśi*. The numerator of the second correction divisor will also increase by this much. Hence, the sum of the numerators of the two correction divisors will be more than that in the earlier case by double the *rāśi*. In the numerator of the odd number the increase will be four times the *rāśi* and one *rūpa*. Thus, the inaccuracy (*sthaulya*) now has also a contribution (to its numerator) from the *rāśi-sthāna*; previously the inaccuracy had only a contribution from the *rūpa-sthāna*.

Therefore it is seen that a full 1 should not be added to the correction divisor. Then how much is to be added? (It has to be argued as follows): Now, if a full 1 is added (to the correction divisors), then in the numerator of the odd number there will be an increase of the *rāśi* multiplied by 4; and in the sum (of the numerators) of the other two, *rāśi* multiplied by two will be the increase. Here, then, if the *rūpa* divided by itself (i.e., the correction divisor) is added, only half of the above increase will result, since the correction divisors are nearly equal to double the *rāśi*. Here the difference in the *rūpa* is only 1. And the difference in the *rūpa* has to be 4, since there will be a reduction of 4 in the numerator of the odd number from the sum of the (numerators of the) other two. Therefore, to the correction- divisors used earlier, 4 *rūpa*-s divided by themselves (i.e., the correction divisors) should be added. Then there will be a reduction of about 8 *rūpa*-s in the numerator of the odd number; and there will be an increase of 4 *rūpa*-s in the sum of the numerators of the other two (correction divisor terms). Hence, for the results to become more or less accurate, the *Ācārya*, has directed the addition of 4 *rūpa*-s divided by itself (the correction divisor).

Here, it was 2 less and 2 more than double the odd number that had been previously proposed as the correction divisors. Twice the two even numbers, in the two sides of the odd number come next. But, when these are converted to the same denomination, the denominator will be 4 more than the square of double the even number; double the even number itself will be the numerator. When these are factored (*apavartana*) by 4, the numerator will be half the even number and the denominator will be the square of the even number plus one (*rūpa*). Hence it is said:

> *tasyā ūrdhvagatā yā samasaṃkhyā taddalaṃ guṇo'nte syāt tadvargo rūpayuto hāraḥ* |
>
> Half of the even number above that will be the multiplier (numerator), and the square of that (even) number plus one (*rūpa*) will be the divisor. (cited also in *Yuktidīpikā*, II. 272-3)

Now, if it is desired to know the inaccuracy (*sthaulya*) of this correction also, (the procedure is as follows): Find the common denominator for the two correction divisors to which is added 4 *rūpa*-s divided by themselves (the correction divisors), and the odd number. The method of placing these (the cowries), is as follows: The first correction divisor is twice the *rāśi* less 2, and thus in the second place 2, and in the first place minus 2. This is for the first correction divisor. Next, the second correction divisor: Since there is an increase of 2 in twice-the-*rāśi*, in both places plus 2. The numerator is 1 in each case. Then, when we add to these denominators 4 *rūpa*-s divided by themselves (the correction divisors), the resulting denominator will be square of the (original) denominator plus 4. The numerator is equal to the original denominator. Then, the denominators and numerators are to be halved. (The placements in the compartments will then be as follows): In the case of the denominator of the first correction divisor, 2 is to be placed in the third place, minus 4 in the second place, and 4 in the first place: $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2 & 4^\circ & 4 \\ \hline\end{array}$. In the case of the second (correction-denominator), the difference is that the 4 in the second place is positive, i.e., $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2 & 4 & 4 \\ \hline\end{array}$. The numerators in both cases are 1, in both places, with the difference that it is negative in the first case, in the first place, i. e., $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1^\circ \\ \hline\end{array}$ and $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline\end{array}$. In the case of the denominator of the odd number, it is 1 in the second place and zero in the first place, i.e., $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 0 \\ \hline\end{array}$, and the numerator is 1.

Now, reduce all these three to a common denominator using the rule *anyonyahārābhihatau harāṃśau...* (*Līlāvatī*, 30). Then, this common denominator will have six places in six compartments. It will be zero in the first compartment, 16 in the second compartment, zero in the next three places and 4 in the sixth place, i.e: $\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline 4 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 \\ \hline\end{array}$. Here when the first place is removed, it will be the numerator of the odd number, $\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 4 & 0 & 0 & 0 & 16 \\ \hline\end{array}$. (In these placements), the number in a compartment will not get elevated to the next compartment. Even if the number exceeds 10, (i.e. having two digits) it shall have to be just increased by 10 (and kept in the same compartment). Since the number is an unknown *rāśi*, there is no way of raising to the next place using a number equal to the *rāśi*. However, here also, the numbers pertaining to the same compartment should be added together if they are all positive or negative; (they should be) subtracted from one another if they are of different signs. That is all what can be done in these cases. Coming to (the numerator of) the first correction divisor: This too has five places. The first is zero, the second place has minus 4, the third is zero, and in the next two places 2. i.e., $\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 2 & 2 & 0 & 4^\circ & 0 \\ \hline\end{array}$. Now, the numerator of the second correction divisor: In the first place it is zero, in the second place 4, then zero, then minus 2 and in the fifth place 2, i.e. $\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 2 & 2^\circ & 0 & 4 & 0 \\ \hline\end{array}$. This is the way.

Now coming to the sum of the correction results: It has 4 in the fifth place and zero in all the other places, i.e. $\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline\end{array}$. When this (*saṃskāra-phala-yoga*) is subtracted from the result of division by the odd number, only 16 will be left in the first place. When the remaining numerators and denominators are factored (*apavartana*) by 4, the numerator will be 4, and the denominator will have 1 in the sixth place, 4 in the second place and zero in the other places. In this situation, the denominator would be the sum of fifth power of the odd number to which is added four times the base (odd) number. 4 divided by this will be the inaccuracy (*sthaulya*).

0	0	0	0	0	4
1	0	0	0	4	0

.

6.9 More accurate results for the circumference

Therefore, the circumference (of a circle) can be derived in taking into consideration what has been stated above. A method for that is stated in the verse

> *samapañcāhatayo yā rūpādyayujāṃ catuḥghnamūlayutāḥ tābhiḥ* |
> *ṣoḍaśaguṇitāt vyāsād pṛthagāhateṣu viṣamayuteḥ*
> *samaphalayutimapahāya syādiṣṭavyāsasaṃbhavaḥ paridhiḥ* ||

> The fifth powers of the odd numbers (1, 3, 5 etc.) are increased by 4 times themselves. The diameter is multiplied by 16 and it is successively divided by the (series of) numbers obtained (as above). The odd (first, third etc.) quotients obtained are added and are subtracted from the sum of the even (the second, fourth etc.) quotients. The result is the circumference corresponding to the given diameter. (cited also in *Tantrasaṅgraha* commentary *Yuktidīpikā*, II. 287-8).

Herein above is stated a method for deriving the circumference. If the correction term is applied to an approximate circumference and the amount of inaccuracy (*sthaulya*) is found, and if it is additive, then the result is higher. Then it will become more accurate when the correction term obtained from the next higher odd number is subtracted. Since it happens that (an approximate circumference) becomes more and more accurate by making corrections in succeeding terms, if the corrections are applied right from the beginning itself, then the circumference will come out accurate. This is the rationale for this (above-stated result).

When it is presumed that the correction divisor is just double the odd number, the following is a method to obtain the (accurate) circumference by a correction for the corresponding inaccuracy (*sthaulyāṃśa-parihāra*), which is given by the verse:

> *vyāsād vāridhinihatāt pṛthagāptaṃ tryādyayugvimūlaghanaiḥ*
> *trighnavyāse svamṛṇaṃ kramaśaḥ kṛtvā paridhirāneyaḥ* |
>
> The diameter is multiplied by 4 and is divided, successively, by the cubes of the odd numbers beginning from 3, which are diminished by these numbers themselves. The diameter is now multiplied by three, and the quotients obtained above, are added to or subtracted from, alternatively. The circumference is to be obtained thus. (cited also in *Yuktidīpikā*, II. 290).

If, however, it is taken that half the result (of dividing) by the last even number is taken as the correction, there is a method to derive the circumference by that way also, as given by the verse

> *dvyādiyujāṃ vā kṛtayoḥ vyekā hārād dvinighnaviṣkambhe*
> *dhanam ṛṇamante'ntyordhvagataujakṛtirdvisahitā harasyārdham* |
>
> The squares of even numbers commencing from 2, diminished by one, are the divisors for four times the diameter. (Make the several divisions). Similarly divide four times the diameter by twice the result of squaring the odd number following the last even number to which is added 2. The quotients got by the first (division) are alternately added to or subtracted from twice the diameter. (The result will be a better approximation of the circumference). (cited also in *Yuktidīpikā*, II. 292).

Then again there is the method given by the verse:

> *dvyādeścaturāderv̄ā caturadhikānāṃ nirekavargāścet hārāḥ*
> *kuñjaraguṇito viṣkambhaḥ svamatikalpito bhājyaḥ*
> *phalayutirekatra vṛttirbhājyadalaṃ phalahīnamanyatra* |
>
> Squares of successive numbers subtracted from 2 or 4, increasing in order by 4, and each less by 1, are the divisors. Eight times the diameter is divided separately by these and the results are added togeter. This will give the circumference. The same sum subtracted from four times the diameter will also give the circumference. (cited also in *Yuktidīpikā*, II. 293-4).

6.10 A very accurate correction

Here is stated another correction applied after the division by the odd numbers, which is more accurate (*sūkṣmatara*) than the earlier correction and is given by the verse

> *ante samasaṃkhyādalavargaḥ saiko guṇaḥ sa eva punaḥ*
> *yugaguṇito rūpayuto samasaṃkhyādalahato bhaved hāraḥ* |
>
> At the end, (i.e., after the procedure involving the division of the diameter with the odd numbers etc.), (apply another correction with) the multiplier being the square of half of the next even number plus 1, and the divisor being four times the previous multiplier with 1 added and multiplied by half the even number. (cited also in *Yuktidīpikā*, II. 295-6).
>
> [Thus ends Chapter Six entitled Circumference and Diameter]

Chapter 7

Derivation of Sines

7.1 The side of a regular hexagon inscribed in a circle is equal to the radius

In the manner explained above, derive the diameter for the circle of circumference measuring 21,600 minutes (*cakra-kalā*). Halve the diameter (to obtain the radius) and, with it, draw a circle. Draw through the centre (of the circle) the east-west and north-south lines and on both sides of the north-south line construct two equilateral triangles (*sama-tryaśra*). The sides of all these (four triangles) will be equal to the radius. Now, construct four complete chords (*samasta-jyā*) equal to the radius with their ends touching the ends of the north-south line. These will be the sides of the triangles. Then draw four radii starting from the centre and touching the tips of these four complete chords. Each of these will also be the sides (of the triangles drawn). Now, the halves of the north-south line will be the common sides of the triangles. Thus there will be two triangles on each side of the north-south line. Construct in this manner four equilateral triangles of sides equal to the radius. Here, construe that in each triangle, one side lies flat on the bottom which is called *bhūmi* (ground, base).

Then, let the sides touching the two ends of the base be imagined to be upwards. Then from the apex point where they meet, attach a string with a heavy weight tied to it. This (string) is called *lamba* (perpendicular). If the two sides, which have been thought of as pointing upwards, are of the same length, then the perpendicular will meet the base at its centre. If one of them is shorter, the perpendicular will tend to that side (from the centre). Consider the east point of the east-west line to be vertical. Then the north-south line would be horizontal (*samavitāna*).

Let two perpendiculars be dropped from the apexes of the two triangles on the eastern side of the north-south line. They will meet the north-south line at the midpoints of its two halves. Therefore the distance between these perpendiculars would be equal to the radius. (That is): Since these two (perpendiculars) meet the midpoints of the two radii on the north-south line on the two sides of the centre, this distance is made up of two halves of the radius; together, this line will be of the length of the radius. Therefore, the distance between the apexes of the two triangles would also be of the length of the radius. The line (between the two apexes) is also the complete chord (*samasta-jyā*) of the arc between the apexes. Then, the two outer sides of the two triangles to the outer side of the two perpendiculars will also be complete chords equal to the radius.

It thus results that the half-circumference on the eastern side of the north-south line would be filled by three complete chords, each of the length of the radius. The same is the case in the other half of the circumference as well. Thus, the entire (circumference of) the circle is filled by six complete chords of the length of the radius. The above being the case, it means that the complete chord (*samasta-jyā*) of two *rāśi*-s (60 deg.) is equal to the radius, since two *rāśi*-s means one-sixth of the circle. It follows that the Rsine (*ardha-jyā*) of half a *rāśi* is half the radius.

7.2 Derivation of Rsines

7.2.1 *Jyā, Koṭi* and *Śara*: Rsine, Rcosine and Rversine

When the arc (*cāpa*) and the chord (*jyā*) are both halved, it is stated that it is the 'half-chord' (*ardha-jyā*) of the (halved) arc; not in the manner in which it is seen that the arc is full and this is its half-chord. Since in planetary astronomy there is the use only of the half-chord (*ardha-jyā*), the half-chord is connoted by the term *jyā*, Rsine.

Now, the interstice between the middle of the complete chord to middle of the full arc is called *śara* ('reversed sine', Rversine). The *śara* for the half-chord and the full chord is the same. And that is a portion (at one end) of the radius drawn from the centre (of the circle) to the mid-point of the arc.

Now, when the circle is drawn on the ground it is presumed that one-twelfth of the circumference to the north from the tip of the east-west line is taken as *Meṣa*. Now, consider the Rsine (*bhuja-jyā*) along the south-north. Consider the Rcosine (*koṭi-jyā*) directed along the east-west. Then, the tip of the south-north line will be *koṭi-śara*. Here, the line along the east-west from the tip of the Rsine (*jyā*) of the first *rāśi* is the Rcosine (*koṭi*) of the first *rāśi*. This will also be the Rsine of two *rāśi*-s. When that is subtracted from the east line, we get the Rversine (*śara*) of the first *rāśi*. When the Rsine of the first *rāśi* is subtracted from the north line, the remainder, which is the cosine of one *rāśi*, will also be the *śara* of two *rāśi*-s.

7.2.2 Deivation of Rsines

We can consider the Rsine of the first *rāśi* and its *śara* as *bhujā* and *koṭi*, since they are in contrary directions (one being perpendicular to the other). The root of the sum of squares of these two would be the distance between the tip of the east line to the tip of the Rsine of the first *rāśi* and is equal to the full-chord of one *rāśi*. Place this in such a manner that the midpoint of this full-chord falls on the east line. Then half of this full chord will lie south-north and will form a *śara* to the east-west line. This half-chord is the Rsine (*ardha-jyā*) of half-*rāśi*. When this is squared, subtracted from the square of the radius, and then the square-root taken, the result will be Rsine of two and a half *rāśi*-s. When this is subtracted from the radius, the result from the tip of the east-west line will be the Rversine (*śara*) of half-*rāśi*. In this manner, when Rsine of half *rāśi* is subtracted from the radius, the result will be, from the tip of the south-north line, the Rversine of two and a half *rāśi*-s.

Thus, when the square of Rsine (*ardha-jyā*) and the square of the Rversine (*śara*) are added together and the square-root of this sum is halved, the result will be the Rsine of half the related arc. In this manner, Rsines can be derived by finding the square-root of the sum of squares of Rsines and Rversines. Now, by doubling the square of the radius, and the root found is halved, it will be the Rsine of one and a half *rāśi*. In this manner also certain Rsines can be derived.

7.3 Some technical terms and definitions

7.3.1 Rsine and Rcosine

Now, the portion of the circle from the tip of the east-west line to the tip of the south-north line is a quadrant of the circle. Divide this into 24 or more parts by marking off points at equal interstices. Do this similarly in the other quadrants also. Here, interstices between these points form arc-bits (*cāpa-khaṇḍa*). The straight lines along south-north from the various tips of the arc-bits, so that their centres lie exactly on the east-west line, are the *bhujā-jyā*-s. In the same manner, lines drawn along east-west from the meeting points of the arc-bits, so that their midpoints are on the north-south line, are the *koṭi-jyā*-s. For that, in the odd-quadrants, the portion covered is *bhujā*, to be covered is *koṭi*, and it is the other way around in the even quadrants. Then, it is presumed that the Rsines and the Rcosines have their bases, respectively, on the east and north lines and have their tips at the meeting points of the (relevant) arcs. In the same manner, one end of the arc-bit is called the base and the other end is called the tip. For the sake of practical convenience, the ends of the Rsine-bits (*bhujā-khaṇḍa*) and arc-bits which are nearer the eastwest line are called 'the bases' and the ends that are nearer the north-south line are called 'the tips'. In the case of the Rcosine-bits (*koṭi-khaṇḍa*), the nomenclatures of the base and tip are just the opposite.

7.3.2 The 24 Rsines and Rcosines

Herein below is explained, how to divide a *rāśi* into eight, and a quadrant into 24, and derive the Rsine for each division. Now, mark on (the circumference of) the circle on its northern side from the east line, the tip of the first arc-bit at the place corresponding to one-eighth of a *rāśi*. The Rsine of that arc-bit will be the first sine. That will extend from the east line up to the tip of the first arc-bit and will also be the Rsine difference of the first arc-bit. Then, the tip of the second arc-bit will be at a distance of one-eighth of a *rāśi* from the tip of the first arc-bit. The portion (of the circle between these two points) will be the second arc-bit. The half-chord along south-north from the tip of this arc-bit up to the east line will be the second Rsine. The half-chords along the east-west drawn from the tips of the first and second arc-bits up to the south-north line will be the first and second Rcosines. In this manner, draw chords north-south and east-west from all the tips of all the (24) arc-bits. The twenty-fourth will be the radius.

7.3.3 Rsine and Rcosine differences

Now, the Rcosine difference (*koṭi-khaṇḍa*) of the first arc-bit is the distance from the point of contact of the east-west line with the circle to the foot of the first sine. The Rsine difference (*bhujā-khaṇḍa*) of the first arc-bit is the (first) *bhujā-jyā* (i.e., Rsine) itself. The Rsine difference (*bhujā-khaṇḍa*) of the second arc-bit is that part of the second Rsine which is between the tip of the second Rsine to the first Rcosine line. Then the Rcosine difference (*koṭi-khaṇḍa*) of the second arc-bit is the portion of the first Rcosine, namely the interstice between the tip of the first arc-bit to the second Rsine.

In the same manner, portions of the Rsine and Rcosine, which are along the north-south from the tip of the third arc(-bit) and along the east-west from the base of the third arc(-bit), which lie between the point of contact of the Rsine and Rcosine, and (of the circumference) of the circle would be the Rsine difference (*bhujā-khaṇḍa*) and Rcosine difference (*koṭi-khaṇḍa*) pertaining to the third arc-bit. In this manner, for all the arc-bits, the portions of the Rsine and Rcosine which start from the two ends of the arc-bit, which lie between their intersection and the circumference of the circle, as above, would be their Rsine and Rcosine differences.

It is also to be noted that the hypotenuse (*karṇa*) of these (Rsine and Rcosine differences) will be the full-chords (*samasta-jyā*) relating to the respective arc-bits. The lengths of these (hypotenuses) will be equal. Since the arc-bits are equal (to one another) the full-chords will also be equal (to one another). However, the *bhujā* and *koṭi* of these hypotenuses will be of different lengths, (since) these are the Rsine and Rcosine differences. Thus, we have 24 (right-angled) triangles with equal hypotenuses but of different lateral sides. Then again, the hypotenuse for the Rsines and Rcosines are the lines from the centre of the circle to point of contact of the Rsines and Rcosines at the tips of the arc-bits, (viz., the radii), and hence all the hypotenuses are equal. Here too the Rsines and Rcosines differ (though the hypotenuses are all equal).

7.3.4 Rsine and Rcosine in the quadrants

Now the point where the east line touches the circle is the beginning of *Meṣa rāśi* ('First point of Aries'). One-twelfth (of the circumference) of the circle from there is the end of *Meṣa*. That much portion further is, the end of *Vṛṣabha*. The tip of the north line marks the end of *Mithuna*. Such is the conception here. With the point of contact of the east line and the circle as the commencing point, the portion of the circumference with its tip at a desired point on it is the *iṣṭa-bhujā-cāpa*, the arc corresponding to the desired Rsine. The portion (of the circumference) up to that point from the tip of the north line is the *iṣṭa-koṭi-cāpa*.

In the first quadrant, the part of the arc which has passed from the beginning of the quadrant (up to the desired point) is the *bhujā-cāpa* and from that point, the part still required to complete the quadrant is the *koṭi-cāpa*. In the second quadrant, the part which has passed is the *koṭi-cāpa*, since the north point constitutes the beginning of the quadrant. And the *bhujā-cāpa* is that part from the tip of the *koṭi-cāpa* to complete the quadrant. Since the west point is the beginning of the quadrant, in the third quadrant the position is as in the first quadrant. In the fourth quadrant, the *bhujā-cāpa* and *koṭi-cāpa* are as in the second quadrant. In the first quadrant, the base of the *bhujā-cāpa* is at the east line and the tip is at the desired point. The corresponding *koṭi-cāpa* will have its tip at the said point and its base on the north line. The half-chords of these form the Rsines and Rcosines.

7.3.5 Rcosine differences and *Śara* differences

When a quadrant is divided into 24 parts and it is also presumed that the first arc-bit is the desired arc, the *koṭi-cāpa* is formed by 23 arc-bits which is left after removing (from the quadrant) the *bhujā-cāpa* or the first arc-bit. Thus, the Rcosine of the first (arc-bit) is the 23rd Rsine. The second Rcosine is the 22nd (Rsine). See likewise (in the case of the further arc-bits also). Now, the feet of all the Rsines will lie on the east-west line. In this line, the interstices of the points where the feet of the Rsines fall, as counted from the centre (of the circle), are, in order, the Rcosine differences (*koṭijyā-khaṇḍa*). Here, the first Rcosine difference is the interstice on the east line between the foot of the 23rd Rsine and the centre (of the circle). The second Rcosine difference is the interstice on the east line between the feet of the 23rd Rsine and the 22nd Rsine. The sum of these two Rcosine differences make up the second Rsine. In this manner, by adding successively the Rcosine differences, in order, the succeeding Rsines will be obtained.

There again, the first interstice at the tip of the east line is the first Rversine (*śara*). When to this the next interstice is added, it will be the second Rversine. In this manner, if the interstices are added, in order, beginning from the tip of the east line, the successive Rversines will be obtained. When we begin from the centre (of the circle and add the interstices), it would be the Rcosines. Since the interstices are different, if the beginning is made from the centre, they will be Rcosine differences and if begun from the tip (of the east line), they will be the Rversine differences. Similarly, in the south-north line, if begun from the centre of the circle, the interstices will be Rsine differences and the sum of these differences will be Rsines. If we begin from the tip of the north line, it will be *koṭi-śara* differences and *koṭi-śara*-s, respectively. This is the way in which the Rsine differences are set out in the radii of a circle.

7.4 Computation of Rsines

7.4.1 Tabular Rsines (*Paṭhita-jyā*)

Now, the full chords of the various arc-bits are alike and are of equal length. They are the hypotenuses and the portion of the Rsine and Rcosine which have their tips at the two tips of the hypotenuse, from the point of their intersection to the tips of the hypotenuse, can be taken to make (right angled) triangles with the full-chord of the arc-bit as hypotenuse and the Rsine and Rcosine portions as the sides. These Rsine and Rcosine bits too might be considered as the Rsine and Rcosine differences. These differences should be calculated and set in a table. These are also called tabulated Rsines (*paṭhita-jyā*-s), since these have been 'stated and tabulated' in earlier texts (*pūrva-śāstra*). They might be set out also inversely. They will, then, be the reversed sines (*utkrama-jyā*-s).

Starting from the beginning of a quadrant, if (the portion of the circle up to) the point at which a certain number of arc-bits have been passed by, happens to be the desired arc, then the corresponding tabular Rsine will be the Rsine of the desired (arc). When the desired point is a little further, add to it a part of the Rsine difference (*jyā-khaṇḍaikadeśa*) corresponding to the part of the next arc-bit (*cāpa-khaṇḍaikadeśa*, which gives the increase in the arc). Then the (sum) will be the Rsine at the desired point. Here is a method to compute the desired part of the Rsine difference (*jyā-khaṇḍaikadeśa*). The method is to use the rule of three thus: If, when a particular arc-bit is the *pramāṇa* and a particular sine difference is the *pramāṇa-phala*, what will be the portion of the difference which will correspond to the portion of the arc-bit. But the result will be rough (*sthūla*). The reason for this: The second arc (made up of two arc-bits) is double the first arc, and third arc (which is made up of three arc-bits) is three times of the first. This is (the nature of) the arcs. But the second Rsine is not double the first sine, nor is the third Rsine, three times the first. The reason for this: The first arc is not curved, since the Rversine (*śara*) is very small. So it (the arc) is practically equal to the Rsine. But, as the arc increases the curved-nature will increase. There, the Rsine will have lesser length, since the Rversine (*śara*) increases in length. Therefore, the rule of three should not be applied to derive the Rsines with the arc as the *pramāṇa* since the result will be rough.

7.4.2 Computation of accurate tabular Rsines

Now is set out a method to compute the tabular Rsines, themselves, accurately. Consider the full-chord (*samasta-jyā*) of the first arc-bit, which joins the tip of the east line which is the base of the first arc-bit, and the point towards the north, which lies at one-eighth of a *rāśi*, equal to 225 minutes. Then, when Rsine and Rcosine differences are constructed from the base and tip of the arc-bit, and when these are taken as the *bhujā* and *koṭi*, this full-chord will be the corresponding hypotenuse.

Then, draw a radius from the centre of the circle to the midpoint of this arc-bit. The end of this radius would be the Rversine (*śara*) associated with this full chord. Hence, this radius and the full chord would be perpendicular to each other. Therefore, the tip of this radius would be as much moved to the north from the tip of the east-west line as the tip of the full-chord is moved to the east from the southern tip of the north-south line (by which is meant here, the Rsine parallel to the north-south line). Here, the first Rsine itself will be the south-north line with reference to the full chord of the first arc-bit. Now, starting from the tip of this radius, construct the Rsine and Rcosine.

Here the arc would be 112.5 minutes which is half of the arc-bit. Since the curvedness (of this arc) is small, consider this arc itself as the Rsine. Its square subtracted from the square of the radius and the root found would be its Rcosine, the Rsine of 23.5 arc-bits. The radius minus this would be the Rversine (*śara*) of the original *bhujā*. For the radius-hypotenuse through the midpoint of the first arc-bit, the *bhujā* is the Rsine which is 112.5 minutes. Then, what would be the *bhujā* for the full-chord-hypotenuse which is double the above Rsine: From this *trairāśika*, the first Rversine (*śara*) which is the *bhujā* associated with the full-chord-hypotenuse, is calculated. Here, the *bhujā* is north-south of the radius-hypotenuse. Since the full-chord-hypotenuse is perpendicular to the above, the *bhujā* of the full-chord-hypotenuse would be east-west. Then, if for this radius-hypotenuse, the Rsine of 23.5 arc-bits will be the *koṭi*, what will be the *koṭi* for the whole-chord-hypotenuse: through such a rule of three (*trairāśika*) will the first Rsine be got. Here, for the radius-hypotenuse the *koṭi* is east-west, and for the whole-chord-hypotenuse, it is north-south. Then, when the first Rversine (*śara*) is subtracted from the radius, the first Rcosine is obtained.

Using the same rationale, derive the second and further Rsines also. This is how it is to be done: Construct a radius-hypotenuse with its tip at the tip of the first Rsine. For that hypotenuse, the *bhujā* and the *koṭi* will be the first Rsine and the twenty-third Rsine. Here, they will be the *pramāṇa-phala*. Now, construct a full-chord-hypotenuse (*samasta-jyā-karṇa*) from the midpoint of the first arc-bit and of the second arc-bit. This will be *icchā-rāśi*. This full-chord will also be one-eighth of a *rāśi*, since it (the corresponding arc) is made up of the halves of two arc-bits. The *icchā-phala*-s for this (*trairāśika*) would be (the Rsine and Rcosine), viz.: (i) the Rsine difference with its tip at the midpoint of the second arc-bit extending up to the Rcosine which has its tip at the midpoint of the first arc-bit; (ii) (the distance) from the point of contact of this Rsine difference to the tip of the Rcosine. This will be a Rcosine difference. The Rcosine (of the midpoint of the first arc-bit), less this Rcosine difference, would be the Rcosine with its tip at the midpoint of the second arc-bit. Now, add the Rsine difference to the Rsine with its tip at the midpoint of the first arc- bit. The result will be the second

Rsine with its tip at the midpoint of the second arc-bit. Then taking these *jyā*-s (i.e., Rsine and Rcosine) as *pramāṇa-phala*-s, the radius-hypotenuse with its tip at the point of contact of these two *jyā*-s as the *pramāṇa* and the full-chord of the second arc-bit as *icchā*, the resulting *icchā-phala*-s would be the Rsine and Rcosine of the second arc-bit. Here, add the Rsine difference to the first Rsine and subtract the Rcosine difference from the twenty-third Rsine. The result will be the second Rsine and the twenty-second Rsine. These two will (mutually) be Rsine and Rcosine.

Then, taking the above (two) as *pramāṇa-phala*-s, derive the Rsine and Rcosine which have their tips at the midpoint of the third arc-bit. Then taking them as the *pramāṇa-phala*-s, derive the Rsine and Rcosine with their tips at the tip of the third arc-bit. Continue this (calculation) to the end. Here, apply what is got from the midpoint of the arc-bits to those obtained from the mid-points, and apply the differences got from the tips of the arc-bits to these got from the tips. Thus, there will be two sets, one derived from the midpoints of the arc-bits and the other from the tips (of the arc-bits). Of these, ignore those derived from the midpoints and tabulate those derived from the tips. These will form the tabular Rsines.

7.4.3 Accurate Rsine and Rcosine at a desired point

When the desired point is not at the tip of an arc-bit, but inside the arc-bit, here is the method to derive the Rsine and Rcosine, which have their tip at the desired place. The portion of the arc-bit from the nearer tip of the arc-bit to the desired point is termed *śiṣṭa-cāpa* ('remainder-arc'). When the full-chord of that *śiṣṭa-cāpa* is taken as the *icchā-rāśi*, and the rule of three is applied, the *icchā-phala*-s got would be the Rsine and Rcosine differences of that *śiṣṭa-cāpa*. If they are applied as corrections (*saṃskāra*) to the tabular Rsines relevant to the tip of the arc-bit nearest to the desired point, the Rsine and Rcosine having their tips at the desired point are obtained.

(For the relevant calculation) the radius-hypotenuse which has its tip at the midpoint of the *śiṣṭa-cāpa* is the *pramāṇa*. The Rsine and Rcosine of this are the *pramāṇa-phala*. But these are not known. Hence, the method to derive them is given below. Construct a full-chord for half the *śiṣṭa-cāpa* touching the midpoint of the *śiṣṭa-cāpa* and the tip of the tabular sine. Consider it as the hypotenuse. Derive the *bhujā* and *koṭi* of this hypotenuse as *icchā-phala*-s and apply them to the relevant tabular Rsines. The result will be the Rsine and Rcosine with their tips at the midpoint of the *śiṣṭa-cāpa*. But this requires the Rsines with their tips at the midpoints of the *śiṣṭa-cāpārdha*. Take these Rsines as equal to the (nearest) tabular Rsines, since the difference is minute. If this accuracy is not sufficient, take the full-chord associated with one-fourth the *śiṣṭa-cāpa*, and derive the Rsine differences from it. If even this much accuracy is not sufficient, make calculations on the basis of even half of the above. This is what has been stated in the verse: *iṣṭa-doḥkoṭi-dhanuṣoḥ* . . . (*Tantrasaṅgraha*, II.106)

7.5 Computations of *Jyā* and *Śara* by *Saṅkalita*-s

7.5.1 First and second order differences of Rsines

Thus, when the Rsines (and Rcosines) which have their tips at the midpoint of the arc-bits are considered as *pramāṇa-phala*-s there will result the Rsine and Rcosine associated with the junction of the arc-bits which are the *bhujā* and *koṭi* of the hypotenuse, which is the full-chord with its tip at the junction of the arcs. There, those that are obtained from the midpoint of the first arc are those relating to the tip of the first arc-bit. There too, it is definite that if the *pramāṇa-phala* is east-west, the *icchā-phala* is north-south and if (the *pramāṇa-phala*) is north-south, the *icchā-phala* would be east-west. There is something more to be noted. If for the *pramāṇa-phala*-s the tip is at the centre of the arc-bit, for the *icchā-phala*-s, the tip is at the tip of the arc-bits. And, if for the *pramāṇa-phala*-s the tip is at the tip of the arc-bits, for the *icchā-phala*-s the tip is at the midpoint of the arc-bits. This is also definite. Here, in the derivation of all differences, the *icchā* and *pramāṇa* are the full-chord and *trijyā*. They are the same in all the cases. It is because there is difference in the *pramāṇa-phala*-s, that there is difference in *icchā-phala*-s.

Now, multiply the *icchā-rāśi* by the difference of the Rcosines which have their tips at the midpoint of the arc-bits. The results would be the differences between the Rsine differences which have their tips at the tips of the arc-bits. If, however, (the *icchā-rāśi*) is multiplied by the Rsine-difference at the midpoint of the arc-bits, one gets the difference of the Rcosine differences at the tips of the arc-bits. When the Rsine of the junction of the first arc-bit is multiplied by the full-chord of the arc-bit and divided by *trijyā*, the Rcosine difference which has its tip at the midpoint of the first arc-bit is got. Then, multiply that difference by the full-chord and divide by the radius. The result will be the amount by which the Rsine difference which has its tip at the tip of the second arc-bit is smaller than the Rsine difference which has its tip at the tip of the first arc-bit. Hence, when the first Rsine is multiplied by the square of the full-chord of the arc-bit and divided by the square of the *trijyā*, the result would be the difference between the first Rsine difference and the second Rsine difference.

Now, the tabular Rsines at the junction of the arc-bits are called also *piṇḍa-jyā*-s. Now, multiply the several *piṇḍa-jyā*-s by the square of the full-chord (of the arc-bit) and divide by the square of *trijyā*. The results are the differences of the Rsine differences (*khaṇḍa-jyāntara*). When we consider the *piṇḍa-jyā* at the juncture of any two arc-bits, the result would be the difference between the Rsine differences associated with the two arc-bits. Here, in the place of the multiplier, the *phala* can be taken and in the place of the divisor, the multiplicand can be taken. Then, multiply *piṇḍa-jyā* by the respective second order difference (*khaṇḍāntara*) and divide by the corresponding *piṇḍa-jyā*. Then also the second order difference will result. Thus (has been set out) the method of deriving the first and second differences.

Next is explained the derivation of the sums and repeated summations of the second differences and using them for the computation of desired Rsine and Rversines. It has been stated earlier that for the first arc-bit the Rsine difference (*khaṇḍa-jyā*) is the same as *piṇḍa-jyā*. Multiply this by the square of the full-chord (of the arc-bit) and divide by the square of *trijyā*. The result will be the difference between the first and second Rsine differences. When this difference is subtracted from the first sine difference, the second Rsine difference is got. Then, when that is added to the first Rsine difference, the result will be second *piṇḍa-jyā*. If this is multiplied by the square of the full-chord and divided by the square of *trijyā*, it will be the difference between the second and third Rsine differences. When this is subtracted from the second Rsine difference, the third Rsine difference will result. If this is added to the second *piṇḍa-jyā*, we get the third *piṇḍa-jyā*. Thus, when the respective *piṇḍa-jyā*-s are multiplied and divided (by the above multiplier and divisor) the second difference (*khaṇḍāntara*) next to it is obtained. Then, commencing from the beginning, if the second differences up to the desired arc-bit are added together and subtracted from the first Rsine difference, the remainder will be the desired Rsine difference.

Now, if all the second differences are to be added together at one stretch, add together all the tabular Rsines up to the desired sine, multiply by the square of the full-chord and divide by the square of *trijyā*. The result will be the sum of the second differences. When this is subtracted from the first Rsine difference, the remainder will be the desired Rsine difference.

7.5.2 Desired Rsines and Rversines from *Jyā-saṅkalita*

Here, if the sum of the Rversine-differences (*śara-khaṇḍa*) centred at the mid-point of the arc-bits is multiplied by the full-chord and divided by *trijyā*, then also the sum of the second differences will be obtained. To obtain the sum of the Rversine differences about the midpoints (of the arc-bits), the sum of the *piṇḍa-jyā*-s at the tip of the arc-bits should be multiplied by the full-chord of the arc-bit and divided by *trijyā*. Thus can be obtained the summation of the Rversine differences at the middle of the arc-bits.

Now to the derivation of the sum of Rsine differences. In a quadrant, there are 24 Rsines. Suppose the 8th sine is required. Multiply the first *piṇḍa-jyā* by 7; multiply the second *piṇḍa-jyā* by 6, the third by 5, the fourth by 4, the fifth by 3, the sixth by 2 and the seventh by 1. Add all these together. The result is called the 'repeated summation of Rsines' (*jyā-saṅkalita*). Repeated summations have been dealt with in detail earlier, in the context of computing the circumference and diameter of a circle. Here, multiply the repeated summation of the Rsines by the square of the fullchord of the arc-bit and divide by square of the radius. Subtract the quotient from the first Rsine difference multiplied by 8. The result will be the 8th Rsine.

In this manner we get the result that when the repeated summation of the Rsines (*jyā-saṅkalita*) up to the tip of a particular arc-bit is done, the result will be the difference between the next higher Rsine and the corresponding arc (*jyā-cāpāntara*). Here, the arc-bit has to be conceived as being as minute as possible. Then, the first Rsine difference will be the same as the first arc-bit. Hence, if it is multiplied by the desired number, the result will certainly be the desired arc. Therefore, when the result of the *jyā-saṅkalita* is subtracted from the desired arc, the result will be the desired Rsine.

The statement that in a quadrant there are 24 Rsines is only a convention, since some specified number of divisions has to be made (for definitive calculations). In this case, therefore, by multiplying the second differences, starting from the last second difference of the desired arc up to the first and second differences, respectively, by the numbers 1, 2, 3 etc., the result will be the repeated summation of the second differences (*khaṇḍāntara-saṅkalita*). And it has been obtained since this is the difference between the required arc and the required Rsine.

It is clear that the all the Rsines up to that of the desired arc are the means for deriving the difference between the corresponding Rsine and the arc. Since all these Rsines are not known, consider the arcs themselves as the Rsines and perform the *cāpa-saṅkalita*. Here, the desired arc itself is the last Rsine. One arc-bit less than this arc is the next previous Rsine. Similarly, consider that the arcs lower by successive arc-bits form the successive Rsines, in that order. Here again, consider that there are as many arc-bits as there are minutes in the desired arc. Then perform the repeated summation of the sum of numbers one, two, etc. (*ekādyekottara-saṅkalita*). That will result in the sum of the Rsines. When that is multiplied by 1 minute which is the full-chord, there will be no difference in the number. Now, divide this by *trijyā*. The result will be the sum of the Rversine-differences (*śara-khaṇḍa-yoga*) at the middle of the arc-bits. Since the bit is small, the sum of the Rversine differences centred at the tip of the arc-bits is practically equal to this and, as such, can be taken as this itself. Now, the smaller the arc-bit, the more exact (*sūkṣma*) the Rsine would be. Here, taking the arc-bit to be one minute divided by *parārdha*, multiply it by the denominator which is *parārdha*, perform the *saṅkalita* and divide by the denominator. The result will be practically equal to the *saṅkalita* performed without having been multiplied by the denominator.

7.5.3 First, second and third repeated summations

Here, however, repeated summation (*saṅkalita*) is made up to the number, which is the number of infinitesimally small parts contained in the required arc. And that number is the number of terms in the series. It is easy to conceive this if it is visualized in a summation figure (*saṅkalita-kṣetra*), in which there are as many rows as there are terms with number 1 in the first row. It would be easier if that is conceived of as a square bit. In the second row there will be two bits, in the third line three and so on, increasing by one bit per line; the last line will have as many bits as there are terms (*pada-saṅkhyā*). Here, the number is the desired arc. Multiply the degrees herein by a denominator equal to an atom (*aṇu*) and the resulting number of atoms will be the number of terms. Now, the number of terms multiplied by itself increased by 1 and divided by 1 multiplied by 2, (i.e., $n(n+1)/(1 \times 2)$) the result would be the summation (*saṅkalita*). This is the first summation (*saṅkalita*).

Now, the second (repeated) summation. This is the sum of the above (first) *saṅkalita*, and the *saṅkalita* with one row less, with two rows less, with three rows less etc. Thus the second *saṅkalita* is the sum of (first) *saṅkalita*-s with one term less at each stage. The third *saṅkalita* would be got by taking the (second) *saṅkalita* as that of the last term and adding up the results by reducing the terms by one.

The method for deriving the above *saṅkalita*-s: The *pada*, (*pada* + 1), (*pada* +2), these three are to be multiplied together. This is to be divided by 6, which is the product of 1, 2 and 3. The result got would be the second *saṅkalita*. In this manner, take the numbers ascending by one each, which have been multiplied together. (Their result) should be divided by the product of the same number of the (natural numbers) 1, 2, 3 etc. The result will be the next following *saṅkalita*. Here, if the arc-bit is conceived as infinitesimal, the sine will be accurate. When units which are practically zero (*śūnya-prāya*) are added one each to the number of terms (*pada*) the resulting numbers practically do not change at all. Hence, the squares and cubes of the required arc should be divided by the successive products of one (two) etc. (*ekādi-ghāta*, i.e. $1,\ 1 \times 2,\ 1 \times 2 \times 3,\ 1 \times 2 \times 3 \times 4$ etc.). Then the results will be accurate.

Hence half the square of the arc is the first *saṅkalita*. Then the second *saṅkalita* is one-sixth of the cube of the desired arc. Since the first *saṅkalita* is half the square, it can be taken as the last term of the second *saṅkalita*. Then half the square of the number of terms reduced by one would be the penultimate term. When addition is made successively of all these terms the result will be the *saṅkalita* of half the square of the desired arc. And, that is half of the summation of the squares (*varga-saṅkalita*). It has been stated earlier that one-third the cube of the number of terms is the summation of squares. Hence, half the above is one-sixth of the cube. From this it results that the third *saṅkalita* is one-sixth of the summation of cubes (*ghana-saṅkalita*). But this will be one-twenty-fourth of the square of squares. Thus, has been derived, what was stated in detail earlier for a *saṅkalita*, that equal numbers (the number of terms) are multiplied amongst themselves a certain number of times and then the denominator for it is the product of the integers 1, 2, 3 etc. taken up to the same number.

7.5.4 Successive corrections to *Jyā* and *Śara*

Now, here the first *saṅkalita* is the sum of the Rsines beginning with the first Rsine up to the required Rsine. Taking the full-chord to be 1, there will be no change in the above sum when multiplied by it (i.e., by 1). Divide it by the radius. The result will be the Rversine (*śara*) which is the sum of the Rversine differences (*śarakhaṇḍa-yoga*). Multiply this Rversine by the sum of the arc-bits, divide by the radius and by three. The result will be the difference between the arc and the Rsine. Thus, the result of dividing one-sixth the cube of the desired arc by the square of the radius, will also be the difference between the arc and the sine.

Now, when the desired Rversine is divided by the radius, the result is the difference between the first and last differences (*ādyāntya-khaṇḍāntara*). Now, find by the sum of Rsines, the difference between the first and penultimate differences. From this can be got, the summation of the second order differences (*khaṇḍāntara-saṅkalita*) being the sum of all the second order differences starting from the first sine difference and summing all differences of differences, from the second *saṅkalita* which is one-sixth of the cube of the desired arc. This is the same as the difference between the Rsine and the arc.

But this is only approximate (*prāyika*), since in place of the *saṅkalita* of the Rsines the *saṅkalita* of the arcs had been taken for calculation. Hence, in this way the sum of the differences at each step between the Rsines and the arcs, would be the excess in the *saṅkalita* of the arcs over the *saṅkalita* of the Rsines. When from the sum of the arcs the Rversine is obtained, and then the differences between the Rsines and the arcs accounted for divided by the radius, and the result subtracted from the Rversine, the Rversine would become more accurate (*sūkṣma*).

Here, Rsine-arc difference at the last stage had been from the second *saṅkalita*. Therefore, the successive Rsine-arc differences (*jyā-cāpāntara*) should all be found starting from the second *saṅkalita*, with the number of terms (*pada*) going down by one. Thus the sum of Rsine-arc differences will be the third *saṅkalita*. Then from the fourth *saṅkalita*, the *saṅkalita* of the Rsine-arc differences is to be found by the method indicated earlier. Then, this *saṅkalita* will be the excess that had resulted previously by using the *saṅkalita* of arcs in place of what was desired, namely, the *saṅkalita* of Rsines. When, this *saṅkalita* of the arcs is divided by the square of the radius and the result subtracted from the earlier calculated difference between the Rsine and the arc, the resulting difference between the desired Rsine and the desired arc will be more accurate.

Now, when the difference between the Rsine and the arc which was obtained first, is multiplied by the desired arc and divided by the radius, the result will be the correction for the Rversine (*śara-saṃskāra*). When this correction to the Rversine is again multiplied by the desired arc and divided by the radius, the result will be the correction for the Rsine-arc difference (*jyā-cāpāntara-saṃskāra*). Now, obtain this correction to the difference between the Rsine and the arc, from the sum of the Rsine-arc differences (*jyā-cāpāntara-yoga*). This is (how it is done): Multiply this correction by the arc, divide by the radius and subtract the result from the earlier correction arrived at for the Rversine. Then the Rversine-correction (*śara-saṃskāra*) will be more accurate. Multiply this correction to the Rversine by the required arc, and divide by the radius; the result is the correction to the Rsine-arc difference.

It is to be noted that the aim is to arrive at a correction based on the *saṅkalita*-s. Hence, here, in all instances, when the result is multiplied by the arc, what has been divided by the numbers, 1, 2, 3 etc., up to some number, has to be divided by the radius. Here is the method to obtain the difference between the result based on one *saṅkalita* and that derived on the basis of the succeeding *saṅkalita*. Here, note the number of times the arc has been multiplied by itself. For this the divisor is the product of the radius multiplied by itself so many times, and the product of that many numbers starting from one, (i.e., 1, 2, 3 etc). When it is required to get the result succeeding another result, multiply the result once by the required arc and divide once by the radius. Then too the derived result would be the same.

7.5.5 Accurate computation of Rsines and Rversines, without using tables

Thus, since the results were (actually) obtained from the sum of the arcs, while it was required to obtain them from the sum of Rsines, the correction terms are all in excess of the actual results. Therefore, the successive correction terms (*saṃskāra-phala*) at every higher stage should be subtracted from the earlier correction-results. This being the case, the following is the procedure (*kriyā-krama*) to be adopted. The required arc is the first result. When this is squared, halved and divided by the radius, the second result is got. Keep this second result separately. Now multiply the second result also by the arc and divide by 3 and also by radius. Place the result got below the first result. Then multiply this also by the arc and divide by four and the radius. Keep the result below the second result. In this manner, derive successive results by multiplying the previous result by the arc, and dividing by corresponding successive numbers 1, 2, 3 etc. and by radius. Now, place below the first result the odd results, viz., the third, the fifth etc., and place below the second result the even results, viz., the fourth, sixth etc. Then subtract successively the bottom result from the one above it, the remainder from the one still above it. Ultimately, in the first column (*paṅkti*), the resultant first result will be left and in the second column the resultant second result will be left. These will be the required Rsine and Rversine.

The odd results might also be separately calculated and the desired Rsine can be derived, and the even results calculated separately and the desired Rversine calculated separately. This latter is another procedure (for arriving at the results). Now, the procedure to derive the required Rsine: Multiply the required arc by the square of the required arc and divide by the square of radius. Then, divide also by 6, which is the product 2 and 3. The result is Rsine-arc difference. The further results are derived similarly, the multiplier is the square of the arc, and the divisor is the square of the radius. Still another divisor is the product of the (corresponding) even number and the next odd number. This would be the square of the corresponding even number plus its root, because the succeeding odd number is one more than the even number. Thus, this is another method to derive the required Rsine.

Then applying the same procedure on the second result, by multiplying and dividing the successive results, the required the Rversine would be obtained. The only difference is that here the divisor is the square of the odd number plus that number.

Then, in this manner, Rsines and Rversines are calculated for the entire quadrant and tabulated. Using them (i.e., these tables) derive (the Rsine and Rversine) for any desired arc (in-between them) by the rule of three. (Here is the method therefor): Set out the odd results and even results separately in two columns. In both cases, multiply the last result by the square of the required arc and divide by the square of the radius. Subtract the results from the penultimate in the two columns. Continue this process of multiplication and division and subtract from the results just previous to each. Then subtract from the required arc the last item of the sequence beginning with *vidvān* etc. The remainder would be the required Rsine. Through the same procedure used with the sequence beginning with *stena*, the last result would be the required Rversine. This is the method of deriving the required Rsine and Rversine without using the regular, tabular values (of Rsines and Rversines).

7.6 Obtaining accurate circumference from approximate value

Now, in pursuance of the principles enunciated above, here is a method to evaluate an accurate value of the circumference starting from an approximate value for a given diameter. First construct a circle for any assumed diameter and compute its circumference roughly by the application of the rule of three using approximations such as for 7 (of radius) 22 (of circumference) and so on. Then, taking the required diameter as radius, one-fourth of the presumed rough circumference will be one-eighth (of the circumference for the new radius). Calculate the Rsine for this in the manner explained above. Then (that Rsine) will be more or less equal to the Rsine of an arc, which is one-eighth of the accurate circumference in a circle of which the desired diameter is (taken to be) the radius. Now, when the Rsine is calculated according to the procedure enunciated in the verses beginning with *nihatya cāpavargeṇa* ('having multiplied with the square of the arc'), instead of taking the square of the radius as the first divisor, as had been instructed previously, take the square of the desired diameter as the divisor. The reason for this is that here it is the square of the radius of a circle whose diameter is twice the (first) diameter. This is the only speciality in the matter of the derivation of the Rsine relating to the desired diameter.

Then, subtract the square of this Rsine from the square of the radius. The remainder will be the square of the Rcosine. The square of the Rsine of one-eighth of the accurate circumference is half of the square of the radius. The square of Rcosine is also the same. Since this eighth is half of the circumference, the *bhujā* and *koṭi* will be equal.

It is possible to derive the Rsine of the difference of one-eighth of the rough circumference and that of the accurate circumference, applying the rule of *jīve paraspara* which will be stated later. Now, multiply the squares of the rough Rsine and rough Rcosine by the squares of the accurate Rsine and Rcosine and divide by the square of the radius. The results got will be half the squares of the approximate Rsine and Rcosine, since the multipliers are half and double. Find their respective square roots and find the difference thereof. The difference is the Rsine of the difference between one-eighth of the rough circumference and that of the accurate circumference. Find the arc of (this Rsine). For that, find the cube of this and divide by six times the square of the radius. Add the result to this Rsine of the difference (of one-eighth circumferences found above). This will be the arc of the difference. Add this to the eighth of the approximate circumference, if the square of the approximate Rsine is smaller than half the square of the diameter, and subtract if greater. The result will be one-eighth of the accurate circumference of a circle of double the diameter. This will be one-fourth of the circumference for the desired diameter. When this is multiplied by four, the accurate circumference is got. This (as has been explained) is the procedure for rendering the approximate circumference accurate.

7.7 Square of Rsine

Next is explained how the square of the Rsine can be derived through the rule *nihatya cāpavargeṇa* ('having multiplied by the square the arc'), by following a special procedure. Here the square of the arc is multiplied by the square of the arc itself. The square of the arc and the results are placed one below the other. Then, starting from 2, from the squares of the numbers 2, 3, 4, 5 etc., half their respective roots are subtracted. With the remainders multiply the square of the radius and use the results as the divisors. This is the only difference herein. What remains at the last step is the square of the sine. Then, using this procedure, the square of the Rversine can also be obtained. Here the results will be given by the sequence *śaurir*, *jayati* (25, 618) etc., instead of *vidvān, tunnabalaḥ* (44, 3306) etc.

7.8 Derivation of Rsines from *Jīve-paraspara-nyāya*

7.8.1 *Jīve-paraspara-nyāya*

In the application of the rules stated earlier, the full-chord of the arc-bit is taken as the *icchā-rāśi*. However, in the application of *jīve-paraspara-nyāya*, which is set out below, half the full-chord is taken as the *icchā-rāśi*. Now, construct a full-chord from the tips of the first arc-bit and of the third arc-bit, covering two arc-bits (the second and third arc-bits). Then, draw a radius (from the centre) to touch the tip of the second arc-bit. For that radius-hypotenuse, the *bhujā* will be the second Rsine and the *koṭi* will be the twenty-second Rsine. Here too, the midpoint of the full-chord will meet the radius-hypotenuse. The halves (of the full-chord) will be the Rsines (*ardha-jyā*) of an arc-bit. These half-chords are to be taken as *icchā-rāśi* here. Then, if the Rsine of the arc-bit is multiplied by the second Rsine and divided by the radius, the result will be the Rcosine difference drawn east-west from the middle of the full-chord. Then, if (the Rsine of the arc-bit) is multiplied by the twenty-second Rsine and divided by the radius, the result will be the Rsine difference, which is drawn south-north from the tip of the third arc-bit extending up to the base of the Rcosine difference.

Then, from the point where the midpoint of the full-chord-hypotenuse meets the radius-hypotenuse, draw the perpendiculars to the east-west line and the north-south line. Their (measures) can be got by applying the rule of three: When the radius is the hypotenuse, the second Rsine and the twenty-second Rsine are, respectively, the *bhujā* and *koṭi*; when that part of the radius, which is radius-minus-Rversine of the full-chord, is the hypotenuse, what will be the *bhujā* and *koṭi*. Then, add the Rsine difference to the *bhujā* of the radius-minus-Rversine of the radius. The result will be the third Rsine; if it is subtracted, it will be the first Rsine. Now, subtract the Rcosine difference from the *koṭi* of the radius-minus-Rversine; the result will be the twenty-first Rsine; if the Rcosine difference is added to that *koṭi*, the twenty-third Rsine will result. The reason for this is that when the halves of the full-chord-hypotenuse are taken as the *icchā-rāśi*, the Rsine and Rcosine differences are equal for both the arc-bits; and also for the reason that the *bhujā* and *koṭi* derived from the radius-minus-Rversine are the ends (*avadhi*-s) to the Rsine differences derived from the half-chord-hypotenuse. This is how the tabular sines are derived.

Then, derive Rsine and Rcosine differences corresponding to the half-chord-hypotenuse of the *śiṣṭa-cāpa* (the portion of the arc between the required arc and the next arc-bit), and the *bhujā* and *koṭi* from the radius-minus-Rversine corresponding to the desired arc (*śiṣṭa-cāpa-śara*), and from these calculate the desired Rsines.

7.8.2 *Jīve-paraspara-nyāya*: An alternative proof

Here is stated an alternative way to obtain the above rule. Here, consider the third Rsine extending from the tip of the third arc-bit extending up to the east-line. Identify the point on this where the Rcosine difference (*koṭi-khaṇḍa*) commencing from the midpoint of the full-chord meets this; from that point, construct two (north-south) differences, one on each side thereof. Then a triangle will be formed, with the northern difference as the *bhujā* and the Rcosine difference as *koṭi* and half the full-chord as hypotenuse. Now, for the southern bit of the third Rsine also, the said Rcosine difference will be the *koṭi*, its hypotenuse will be equal to the second Rsine. This hypotenuse will be the line from the midpoint of the full-chord extending up to the point where the third Rsine meets the east-line. The (last) will be equal to the second Rsine. Here, the radius is the *pramāṇa*; half the full-chord and its *koṭi*, which is the radius-minus-Rversine of this, are the two *pramāṇa-phala*-s; and the *icchā* is the second Rsine. The (two) *icchā-phala*-s are one: the Rcosine difference starting from the mid-point of the full-chord, and, two: the southern part of the third Rsine, from its meeting point with the above (Rcosine difference). Just as the *pramāṇa-rāśi* is the hypotenuse for the *pramāṇa-phala*-s in the shape of *bhujā* and *koṭi*, in the same way for the *icchā-phala*-s in the shape of *bhujā* and *koṭi*, the hypotenuse will be the *icchā-rāśi*. This is the rule.

Now, there is a triangle where the second Rsine is the hypotenuse, the southern part of the third Rsine is the *bhujā* and the Rcosine difference derived by the rule of three is the *koṭi*. There is also another triangle in which the northern half of the full-chord is the hypotenuse, the northern part of the third Rsine is the *bhujā* and the Rcosine difference itself is the *koṭi*. Now, this is a triangle where the first and second Rsines are the sides, the third Rsine is the base and the Rcosine difference is the perpendicular. Here, the two base-segments (*ābādhā*) can be got by subtracting the square of the perpendicular separately from the squares of the two sides and finding the (two) roots. The sum of the (two) segments will be the base, which is the third Rsine. In this manner the tabular Rsines and the desired Rsines can also be derived. Thus has been explained the method by which if two Rsines are separately known, the Rsine of the sum of the arcs corresponding to the two individual Rsines, may be calculated.

7.9 Principle of the area of a triangle

Now is set out the method for deriving the Rsines without using the radius. This involves the principle of the area of a triangle (*tribhuja-kṣetra-nyāya*). Hence that is stated first.

Consruct a scalene triangle (*viṣama-tryaśra*), with the longest of its three sides along the north-south, towards the western side. This would be taken as the 'base'. Let the other two sides commence from the two ends of the base and meet at a point towards the east. These are to be taken as the sides (*bhujā*-s). From the point where the two sides meet, drop a perpendicular (*viparīta*) to the base. This is to be called the 'perpendicular'. The components of the base on the two sides of the perpendicular are called 'base-segments' (*ābādhā*). For the segments and the perpendicular, which are like *bhujā* and *koṭi*, the two sides form the hypotenuses. Now, square the longer side and subtract from it the square of the shorter side. The result would be the square of the longer base-segment minus the square of the shorter base-segment, since the square of the perpendicular is the same for the squares of the two hypotenuses. In other words, the difference between the squares of the sides would be equal to the difference between the squares of the two base-segments.

Now, the difference between the squares of the sides is equal to the product of the sum of the sides and the difference of the sides. Since this is equal also to the difference between the squares of the base-segments, when it is divided by the base, which is the sum of the two base-segments, the result will be the difference between the two base-segments. This (difference) added to and subtracted from the base and halved, would, respectively, be the two base-segments. Then again, the square of each base-segment subtracted from the square of the relevant side and the root found, would result in the perpendicular. The perpendicular multiplied by half the base will give the area of the triangle.

Here, cut along the lines starting from the midpoints of the sides ending at the mid-points of the corresponding base-segments; the resulting two triangle bits are placed in such a way that the base-segment portions meet the end of the perpendicular and the hypotenuses lie on the hypotenuses. This will result in a rectangle having two sides equal to half the base, the (other) two sides being equal to the perpendicular. Hence the area thereof will be the product of half the base of the triangle and the perpendicular (and hence equal to the area of the triangle). This is the principle of the area of a triangle (*tryaśra-kṣetra-nyāya*).

7.10 Diagonals of a cyclic quadrilateral

Now is stated, how the principle of the area of a quadrilateral can be derived from the above. First consider a circle. Then consider a (cyclic) quadrilateral with its four corners touching the circumference of the circle. It shall also be that the four sides are not equal to one another. Now, it should be possible to know the diagonals of this quadrilateral from its sides. Here is the method.

Now, for the sake of convenience, consider the following arrangement: Of the (four) sides, let the longest side be on the west; call it the 'base' (*bhūmi*). Then successively, the southern and northern sides will be the 'sides' (*bhujā*). Let the smallest side be on the east. Call it the 'face' (*mukha*). Let this be the set-up. Now, since (all) the sides touch the circumference, they are all full-chords. Thus, the circle will be full with four full-chords, since the tips of the chords touch each other. Now, considering the sum of the arcs of two adjacent sides, the full-chords thereof would be diagonals of the quadrilateral. If we divide the quadrilateral into two by drawing one of these diagonal-hypotenuses, on the two sides of this hypotenuse will be two triangles. This hypotenuse will be the common base for both the triangles. The sides (of the quadrilateral) will be the sides (of the) triangles. In the same manner, the other diagonal (of the quadrilateral) can form two triangles (on its two sides), with itself being the base.

7.10.1 Product of two full-chords is equal to the difference in the squares of the full-chords associated with half the sum and difference of the arcs

Now, consider one of these diagonals. If the sum of the sides on one side of the diagonal is multiplied by their difference, the result will be equal to the sum of the segments of the base multiplied by their difference. The sum of the base-segments is the full-chord of the sum of the arcs associated with these two sides. Then the difference between the two base-segments will be the full-chord of the difference between these two arcs.

When the desired diagonal, which is the sum of the base-segments, is taken as the base, and the difference between the segments as the face (*mukha*) and the shorter side is taken to be equal to the longer side there will be formed, on one side of the said diagonals, a quadrilateral with equal perpendiculars (i.e., a trapezium). Here the distance between the (two) perpendiculars is the difference between the (two) base-segments. Hence the full-chord of the difference between the (two) arcs will be equal to the difference between the (two) base-segments. Now, in a quadrilateral, if the lateral-sides are equal, the perpendiculars will also be equal. Their corresponding base-segments will also be equal. Hence, in the base, the distance between the bases of the perpendiculars will be equal to the difference between the base-segments. The distance between the tips of the perpendicular is also the same.

Hence, the full-chord of the difference between the (two) arcs will be equal to the difference between the (two) segments. The full-chord of the sum of the (two) chords will be the base (*bhūmi*). This is also the desired diagonal. Hence, the difference between the squares of the sides on one side of the diagonal will be equal to the product of the full-chords of the sum and difference of the corresponding arcs. Thus, the product of the full-chords of the sum and difference of the arcs will be equal to the difference between the squares of the chords of the (corresponding) arcs.

Hence, the rule is: The product of two full-chords is equal to the difference between the squares of the full-chords associated with half the sum and difference of the corresponding arcs (associated with the two original full-chords). (In the same manner) the difference of the squares of two full-chords will be equal to the product of the full-chords associated with the sum and difference of the two arcs corresponding to the (original) full-chords. This rule deserves to be known when the derivation of the diagonal (of a quadrilateral) is attempted.

7.10.2 Sum of the products of the two pairs of sides associated with a diagonal is equal to the product of the diagonal with the third diagonal

Now is explained the derivation of the diagonal using the above-said rule. Here, as instructed earlier, take the longest side of the scalene cyclic quadrilateral as the base, situated in the west, the smallest side as the face, on the east, then, the longer lateral-side on the south and the shorter lateral-side to the north. The first diagonal is the line from the southern tip of the base to the northern tip of the face, and the second diagonal is the line from the northern tip of the base to the southern tip of the face. Consider also the arcs between the tips of the diagonals as the arcs of the relevant full-chords (i.e., sides). Mark some dots on these said arc-bits, (as follows):

From the northern tip of the base, mark the point on the arc of the northern side at a distance equal to the arc of the face. The distance, along the circumference, from this point to the northern tip of the face might be called *mukha-saumyabhujā-cāpāntara* ('difference between the arcs of the face and the northern side'). Consider the diameter, one tip of which touches the midpoint of this (arc). Then, from the northern tip of the base, mark the point on the arc of the base at a distance equal to the arc of the southern side. The distance (along the circumference) from this point to the tip of the southern tip of the base may be called *bhū-yāmyabhujā-cāpāntara* ('difference between the arcs of the base and the southern side'). The other tip of the diameter (mentioned above) will touch the midpoint of this arc. This is the foot of the diameter. Now, the distance from the foot of the diameter to the southern tip of the base is *bhū-yāmyabhujā-cāpāntarārdha* ('half the difference of the arcs of the base and the southern side'). Hence, the distance along the circumference, from the foot of the diameter to the northern tip of the base, and that (from the same point) to the eastern tip of the southern-side are equal. Then again, the distance between the tip of the diameter and the western tip of the northern side and that to the southern tip of the eastern side are also equal.

This being the set up, multiply the face and the northern side. Add the product to the product of the base and the southern side. The result will be the sum of two differences of squares (as indicated below). The first (difference) is the difference of the squares of the two full-chords, associated with arcs equal to half the sum and difference of the arcs of the face and northern side. The second (difference) is the difference of the squares of the full-chords associated with the arcs obtained by halving the sum and difference of the arcs of the base and the southern side. This is according to the rule derived earlier.

Now, if we add half the sum of the arcs relating to the face and the northern side and half the sum of the arcs relating to the base and southern side, we will get half the circumference of the circle. The sum of the squares of the full-chords associated with the arcs obtained in the above half-sums would be equal to the square of the diameter, since the said two full-chords are *bhujā* and *koṭi*. Just as the Rsines of the two parts into which a quarter of a circle is divided bear the relationship of *bhujā* and *koṭi*, with the radius being the *karṇa*; in the same manner, the full-chords of the two parts into which half the circumference is divided, will also bear the relationship of *bhujā* and *koṭi*, with the diameter as the *karṇa*. Hence, the sum of the squares of the said full-chords of the half-sums will be the square of the diameter.

Therefore, the sum of the products of the said full-chords would be equal to the square of the diameter minus the sum of the squares of the full-chords of half the two arc-differences. There, subtract from the square of the diameter the square of the full-chord of one of the said differences. The remainder would be the square of the *koṭi* thereof. Since this is the difference of the squares of two full-chords, the two arcs resulting from the addition and subtraction of the two arcs associated with these full-chords, the full-chords thereof would have been multiplied, according to the rule derived above.

Here, since the arc associated with a diameter is half the circumference, add to and subtract from half the circumference half the arc-difference at the tip of the diameter. The difference of the squares here would be the product of the full-chords of the two arcs here, since this difference of squares is formed by the product of the full-chords of the sum and difference of the two arcs. Here, however, for the sum-and-difference-arcs, (i.e., the arcs which are added together and subtracted from), the full-chords are the same, only the *śara*-s and arcs differ. It is a rule that when (the tip-points) move equally on two sides of the diameter, the full-chords thereof would be equal. Just the same way as, when the Rsines (*ardha-jyā*, half-chords) are tabulated equally on a circle of circumference 21,600 (minutes), when, say, the 24 parts are considered, the 23rd and 25th (Rsines) will be equal. Since the chords are equal, their product will be their square. (In the calculation mentioned earlier), when the square of the full-chord of the arc-interstice between the northern tip of the face and the tip of the diameter is first subtracted from the square of the diameter, what remains is the square of the full-chord (of the arc) between the foot of the diameter to the northern tip of the face.

From this has to be subtracted the square of the full-chord of the arc-interstice from the foot of the diameter to the southern tip of the base. This is the second full-chord of half the arc-difference. Since this is also the difference between the square of two full-chords, it will be the product of the full-chords associated with the sum and the difference of the arcs. Now, the portion of the circumference from the northern tip of the face to the foot of the diameter is an arc. The (arc) interstice between the foot of the diameter and the southern tip (of the base) is another arc. The difference between these two is the part of the circumference between the northern tip of the face to the southern tip of the base. This will be the sum of the arcs of the face and the southern side. The full-chord of this is the first diagonal. Thus, this first diagonal is the full-chord of an arc-difference. Now, the portion of the circumference from the northern tip of the face passing the foot of the diameter and reaching up to the point marked on the arc of the base is an arc-sum (i.e., sum of two arcs). The chord thereof would be the chord of the composite arc made up of the face-arc and the base-arc. The base-arc here would be the south-side-arc plus the arc in the base-arc from the southern tip up to the point marked. Thus, however when this interstice is added to the arc of the southern side, since it will be equal to the arc of the base, the full-chord of the sum of the arcs of the base and of the face is a sum-chord.

Hence, the sum of the products of the face and the northern side and that of the base and the southern side, would be equal to the product of the full-chord of the sum of the face and southern-side arcs with that associated with the sum of the face and the base arcs. This is to be called *ādyakarṇāśrita-bhujāghātaikya* ('sum of the products of the chords related, to the first diagonal'). The first diagonal is the diagonal which extends from the northern tip of the face and the southern tip of the base. Touching the tip of this (diagonal) are the face and the northern side and touching the foot are the base and the southern side; *ādyakarṇāśrita-bhujāghātaikya* is called so for the reason of its being the sum of the product of the above two. This is being shown to be the product of the first and third diagonals. Here, the first diagonal is the line from the southern tip of the base to the northern tip of the face. The third diagonal, then, is the first diagonal itself got by exchanging the base and the southern side so that the tip is the same as before (i.e., the tip of the first diagonal) and the foot touching (the circumference) elsewhere. The second diagonal is also like the first. When we said that the foot of the first diagonal, which touches the southern tip of the base, would be elsewhere, it will actually be at the point, mentioned earlier on the arc of the base, which is obtained by moving from the southern tip of the base by an amount equal to the arc-difference between the base-arc and the southern-side-arc. The line from this (point) to the northern tip of the face is the third diagonal. This comes into being when the base and the southern side are exchanged. Hence this is termed the third diagonal.

7.10.3 The area of the cyclic quadrilateral is equal to the product of the three diagonals divided by twice the diameter

Now, consider these two (viz., the first and the third) diagonals as two sides and the arc of the interstice between these two diagonals as the base arc. This latter will be the arc-bit between the point on the base arc and the southern tip of the base. Consider the chord of this arc-bit as the base and make a triangle. Now, the altitude in this triangle will be the vertical line to the said base from the northern tip of the face to this base. This perpendicular can be had by dividing the product of the sides, which are here the first and the third diagonals, by the diameter. (The rule) in general is: In the case of the sides of a triangle, which form chords (in a circle), when the product of two sides is divided by the diameter, the result would be the perpendicular to the base which is the chord of the arc which is the sum of the arcs of the sides. This rule is derived from the *jīve-paraspara-nyāya*.

Now, when we divide the scalene quadrilateral into two triangles by the second diagonal, there will be a perpendicular in each. For both these perpendiculars the second diagonal will be the common base. The sum of the perpendiculars of the two triangles will be equal to the perpendicular obtained as the product of the first and third diagonals divided by the diameter. This shall be demonstrated in what follows.

Here, the tips of the first and third diagonals are (together) at the northern tip of the face, and their feet are, one, at the southern tip of the base and the other at the point marked on the arc of the base. The chord of the arc between these two feet forms the base for the triangle formed by these two diagonals. For this base and for the second diagonal, the direction is the same, (i.e., they are parallel), since, from the two tips of the second diagonal, these two chord tips are equally distant by an arc equal to the arc of the southern side. The midpoint of the arc of the second diagonal and the arc of the base of this triangle will be the foot of the diameter mentioned above. Hence, the direction of the second diagonal and the base of this triangle are the same. Hence, the two perpendiculars which have the second diagonal as the base, and the large perpendicular (drawn earlier) have the same direction. Then, the quadrilateral having the second diagonal as the base, and having as its face the base of the triangle, having the first and third diagonals as sides, will have equal perpendiculars, (i.e., it will be a trapezium). It will be clear then that the sum of the two (smaller) perpendiculars (on the second diagonal) will be equal to the large perpendicular.

Now, when this sum of the perpendiculars is multiplied by half the second diagonal, there will result the sum of the areas of the two triangles having the second diagonal as the common base, and equal to the area of a (corresponding) cyclic quadrilateral. Hence, the product of the three diagonals divided by the diameter and halved, will be the area of the quadrilateral. Correspondingly the product of the three diagonals divided by the area (of the quadrilateral) will give twice the diameter. If the product of the squares of the diagonals is divided by the square of the area, the result will be square of twice the diameter. It is noted that, here, the sum of the perpendiculars, the diameter, and the area, have been discussed only incidentally; they will be dealt with again later on.

7.10.4 Derivation of the *Karṇa*-s (diagonals)

Now, (is stated) the method to derive the *karṇa*-s, diagonals. There, it has been set out in detail, earlier, that the sum of the products of the two sets of the sides related to the first diagonal will be equal to the product of the first and third diagonals. By the same principle, it follows that the sum of the products of the two sets of sides related to the second diagonal will be equal to the product of the second and third diagonals. This is equal to the sum of the product of the face and the southern side and that of the base and the northern side.

Now, exchange the base and the southern side and find the products of the two sets of the sides related to the resulting second diagonal and add them. This will be equal to the sum of the products of the face and the base and that of the south and north sides. This is called the product of the opposite sides (*bhujā-pratibhujā-ghātayogam*). This will be equal to the product of the first and the second diagonals.

Now, if the, sides are further exchanged, there cannot be a fourth diagonal since the *prastāra* (number of possible combinations) has been exhausted. Here, multiply the above-derived product of the first and third diagonals by the product of the first and second diagonals and divide by the product of the second and third diagonals. The result will be the square of the first diagonal. Then multiply the product of the second and third diagonals by the product of the first and second diagonals and divide by the product of the first and third diagonals. The result will be the square of the second diagonal. Thus (has been stated) the method of deriving the diagonals. The third diagonal need not be derived since it is only introduced (by us) here. If need be, derive it as above.

7.11 Cyclic quadrilateral and *Jīve-paraspara-nyāya*

Now, what had been stated earlier, viz., that the sum of the products of the two sets of opposite sides (in a cyclic quadrilateral) is the product of the first and second diagonal, is being demonstrated here in the case of tabular Rsines. (Through the *jīve-paraspara-nyāya*) it has been shown that when two Rsines are mutually multiplied by the Rcosines, divided by the radius and added together, the Rsine of the sum of the arcs would be obtained. Here, (in the situation being dealt with here), the radius would be the first diagonal and the Rsine of the sum of the arcs would be the second diagonal. The two Rcosines would be the correspondingly opposite sides. It will be shown how this can be so.

There, at the tip of the second Rsine is the tip of the radius diagonal. For, the second and third arc (bits) together there is a full-chord. The radius-diagonal will pass through the midpoint of this full-chord. Consider the triangle in which: One side is half the full-chord extending from the meeting point of this diagonal and the above-said full-chord to the tip of the third Rsine; the second Rsine can be taken as touching the said meeting point and the meeting point of the third Rsine and the east-west line; that will be the (second) side; the third side is the third Rsine. In this (triangle), half the full-chord is the first Rsine. If this (Rsine) and the second Rsine are multiplied by the corresponding Rcosines, added together and divided by the radius, the third Rsine would be obtained. In fact, these have been stated earlier itself.

Now, another figure, (a scalene quadrilateral), can be conceived, but in a different way. Here, conceive of a full-chord touching the tips of the second Rsine and the fourth Rsine. Conceive the radius-diagonal passing through the midpoint of this full-chord, and the second Rsine in its own place. Then the second Rsine, its Rcosine along the east-west line, the portion of the full-chord which touches the tip of the second Rsine, and its complementary (*koṭi*) part on the radius will form the sides of a scalene quadrilateral. Construct a diagonal extending from the point of contact of the east-west line and the second Rsine, and passing through the midpoint of the full-chord. This will be the third Rsine by the rule stated earlier. There will be an apparent displacement (in this third Rsine). The other hypotenuse is the radius touching the tip of the second Rsine. Here, (in the quadrilateral), the second Rsine and the Rcosine of the first Rsine will be the opposite sides. The other pair, also, similarly (will be the opposite sides). Hence, also follows the rule that the sum of the products of opposite sides will be equal to the products of the two diagonals.

7.12 Derivation of tabular Rsines without using the radius

Now, the difference between the squares of the first and second Rsines will be equal to the product of the first and third Rsine. The difference between the squares of the first and third Rsines will be equal to the product of the second and fourth Rsines. Thus, the difference between the squares of two Rsines will be equal to the product of the Rsines of the sum and of the difference of their arcs, according to the rule evolved earlier. Then again, when the square of the first Rsine is subtracted from the square of any Rsine and divided by the next Rsine below, the result will be the next Rsine above. In this manner the tabular Rsines can be derived without making use of the radius (in their derivation). Then again, if to the product of the first and third Rsines the square of the first Rsine is added and the root found, it will be the second Rsine. Thus, the squares of the Rsines can be successively found without the use of the radius. Here, (instead of the Rsine) the corresponding full-chords can also be used. Thus are (stated) one class of methods for the derivation of Rsines.

7.13 Altitude and circum-diameter of a triangle

Now is demonstrated the rationale of the earlier statement that when the full-chords of two arcs are multiplied together and divided by the radius (diameter?), the result would be the perpendicular to the base given by the full-chord associated with the sum of the two arcs. This is shown using the full-chords of the circle of 21,600 minutes. There, from the eastern tip of the east-west line, mark off ten arc-bits on the two sides and consider the full-chord, which is along the north-south direction. This will be the tenth full-chord (corresponding to the tenth tabular Rsine). Now, from the southern tip (of the chord) mark off (towards the north) twelve arc-bits and construct the corresponding full-chord. The tip of this chord will meet the circumference towards the north of the east-west line at a distance of two arc-bits. This will be the sixth chord. Then construct a full-chord commencing from the northern tip of this chord to the northern tip of the tenth chord. This will be the fourth chord. Construct the diameter passing through the midpoint of the sixth chord and the centre and extending to the circumference on both sides. This (diameter) and the sixth chord will be perpendicular to each other, since the diameter will be along the corresponding *śara*. Then, construct another full-chord from the eastern tip of this diameter towards the west, and another to the north. The first will be a *koṭi* and the second a *bhujā*. This *bhujā* will be the fourth chord. Now, from the tip of the east-west line to the southern tip of the tenth chord, there are ten arc-bits. There, from the tip of the tenth chord, and after six arc-bits, the tip of the radius touches the circumference. From here the east-west line is four arc-bits away; four arc-bits towards north from here, the tip of the *bhujā* touches the circumference. Thus, since this full chord covers eight arc-bits it results that it is the fourth chord.

Now, construct another diameter extending from the midpoint of the fourth chord which meets the northern tip of the tenth chord. Construct a *bhujā*, along south-north, from the eastern point of this (diameter). Since this is a full-chord of twelve arc-bits, it will be the sixth chord. It is to be noted here that, if the diameter-hypotenuse passes through the midpoint of any chord, its *bhujā* will be the other chord. Here, the distance between the tip of the east-west line and the tip of the base which is the full-chord of the sum of the two arcs, will be half the sum of the arcs. The reason for this is that when half the required arc is subtracted from this, half of the other arc remains.

Here, the *pramāṇa* is the diameter which is the hypotenuse, the *bhujā* of this is the *pramāṇa-phala*, and the chord perpendicular to the diameter is the *icchā*. The perpendicular which is the vertical distance between the point of contact of the opposite chords to the chord of the sum of the arcs will result as the *icchā-phala*. Here, when one of the desired chords is the *icchā* the other becomes the *pramāṇa-phala*. Therefore, either of the fourth and the sixth chords will be the *icchā-phala*, when the perpendicular is derived. When, however, the *koṭi* is derived, the *pramāṇa-phala* would be the *koṭi* of the diameter touching the midpoint of the arc. Here, since the products of the *icchā* and *pramāṇa-phala* are different, the *icchā-phala*-s for the two chords, which latter are the two base-segments of the tenth chord, will be different. Since here the *icchā* and *pramāṇa* are mutually perpendicular, their *phala*-s also will be perpendicular. Thus has been said the derivation of the perpendiculars and base using the chords.

7.14 Resume of results derived so far

[The under-mentioned have been arrived at from the above discussions:]

1. It has been shown that when two Rsines are multiplied respectively by the other Rcosines and added, the result would be the product of the Rsine of the sum of the corresponding arcs and the radius.

2. The above would imply that in a quadrilateral of specified diagonals the sum of the products of the opposite sides is equal to the product of the diagonals.

3. By the same rule the product of adjacent sides added together would be equal to the product of some diagonals.

4. It has also been noticed that by the same rule it is possible to derive the Rsines of sums and differences of arcs.

5. Also, through the above-said procedure the tabular Rsines could also be derived.

6. The sum of the product of the sides related to the first diagonal is equal to the product of the first and third diagonals; when this product of the diagonals is divided by the diameter the result will be the perpendicular in the triangle having as its base the full-chord of the sum of the arcs associated with the diagonals.

7. The said perpendicular is also the sum of the perpendiculars of the two triangles of which the second diagonal forms the base. In that case it need not be considered as the product of the diagonals but as the product of the sides.

8. It is also understood by the general rule that the area of the quadrilateral will result when half the second diagonal is multiplied by this perpendicular.

7.15 Area of a cyclic quadrilateral

Then, following these principles, it will be shown that, without specifying the circumference, but given the sides of a quadrilateral of fixed diagonals, the diameter can be calculated. For this purpose, it will be shown that the area of the quadrilateral can be obtained without the employment of the diagonals and diameter. (Earlier) this had been demonstrated in deriving the square of the area of a triangle. It is now shown how that is possible, in the same manner, in the case of a quadrilateral.

Now, construct a quadrilateral inside a circle (i.e., a cyclic quadrilateral). The four corners of the quadrilateral should touch (the circumference of) the circle. Then the four sides of the quadrilateral will be four chords of the circle. And by these four chords the circle would have been fully covered. In this quadrilateral, construct one diagonal from one corner to the (opposite) corner. This diagonal will then be the common base of the two triangles formed. The area of a quadrilateral specified like this is obtained by the procedure enunciated in the verse

> *sarvadoryutidalaṃ catuḥsthitaṃ bāhubhirvirahitaṃ ca tadvadhāt* |
> *mūlamasphuṭaphalaṃ caturbhuje spaṣṭamevamuditaṃ tribāhuke* ||
>
> Add all the sides and halve it and keep the result in four places. Subtract one side each from each of the above results. Multiply together the four remainders and find the root (of the product). In the case of the quadrilateral the said root will give the rough area and in the case of the triangle, it will give the exact area.'
>
> (*Līlāvatī*, 167)

Here, take the two sides on one side of the chosen diagonal as the two sides of a triangle, take the diagonal as the base, and derive the perpendicular, as explained earlier. In the same manner, derive the perpendicular for the triangle on the other side of the diagonal. Then, multiply the sum of the perpendiculars by half the diagonal. The result will be the area of the quadrilateral, since the area of a triangle is got by multiplying the perpendicular by half the base. This has been stated in the verse:

> *lambaguṇaṃ bhūmyardhaṃ spaṣṭaṃ tribhujaphalaṃ bhavati* |
>
> In a triangle, the product of the perpendicular and half the base will give the exact area.
>
> (*Līlāvatī*, 164)

Now, consider the quadrilateral with the following sides:

> *pañcāśad ekasahitā vadanaṃ yadīyaṃ bhūḥ pañcasaptatimitā ca mito'ṣṭaṣaṣṭyā* |
> *savyo bhujādviguṇaviṃśatisammito'nyastasminphalaśravaṇalambamiti pracakṣva* ||
>
> In a quadrilateral with face 51, base 75, left side 68, and the other side, twice 20 (i.e., 40) tell the area, diagonals and perpendiculars.
>
> (*Līlāvatī* 178)

> *atreśakoṇagāmīṣṭaḥ karṇaḥ saptasaptatisaṃkhyāḥ* |
>
> Here, the diagonal (from) north-east is 77.

Here, it has been stated that the western side is taken as the base and the eastern side as the face. The diagonal from the north-east corner to the south-west corner is 77. This is taken as the desired diagonal and as the base of both the triangles. This set-up will make it easy to remember (i. e., to keep track of the discussion below).

7.15.1 Area in terms of the *Lamba-nipātāntara* and *Lamba-yoga* (interstice between the altitudes and the sum of altitudes)

A perpendicular dropped from the south-east corner will meet the chosen diagonal at a point a little to the south of the midpoint (of the diagonal), and the perpendicular dropped from the north-west corner will meet the diagonal at a point a little to the north of its midpoint. Now the interstice between the points where these perpendiculars meet the diagonal is called *lamba-nipātāntara* (interstice between the perpendiculars). Since this is a part of the base (diagonal) it will be at right angles to the perpendiculars. Both the perpendiculars will have the same direction. So, extend one perpendicular to one side and the other perpendicular to the other side so that the two perpendiculars are extended equally. At the tips of the perpendiculars mark the *lamba-nipātāntara* also. Now will be formed a rectangle.

When the square of the sum of the perpendiculars and the square of the *lamba-nipātāntara* are added and the root of the sum found, it will be the diagonal of the rectangle which touches the tips of the perpendiculars. This will (really) be the second diagonal to the cyclic quadrilateral. This is called *itara-karṇa* ('other diagonal'). Now, when the square of the *lamba-nipātāntara* is subtracted from the square of the other diagonal, the result will be the square of the sum of the perpendiculars (*lamba-yoga*). The square of the *lamba-yoga* (sum of the perpendiculars) and the square of half the *iṣṭa-karṇa* (chosen diagonal), when multiplied together will give the square of the area of the (cyclic) quadrilateral.

7.15.2 Derivation of the *Lamba-nipātāntara*

Now, in the example of the quadrilateral, with specified sides given in the verse *pañcāśad ekasahitā* etc., the perpendicular dropped from the conjunction of the face and the southern side, will meet the base (diagonal), a little to the south of the midpoint, since the southern side (40) is shorter than the face (51). It is the rule that, of the two sides that meet the tip of the perpendicular, it is towards the shorter side that the perpendicular will fall.

The segments of the base, on the two sides of the point where the perpendicular fall, are called *ābādhā*-s (base-segments). These two will be related only to that perpendicular. Now, the perpendicular dropped from the point of conjunction of the base of the quadrilateral and the northern side, going towards from southwest to the northeast meets the desired diagonal-base, a little to the north of its midpoint, since the northern side (68) is shorter than the base of the quadrilateral (75). In this set-up, amongst the base-segments associated with the two perpendiculars, the difference between the northern base-segments will be the *lamba-nipātāntara* (interstice between the two perpendiculars). Here, since, one foot of the perpendicular is to the south of the midpoint of the desired diagonal-base and the other foot is on the northern side thereof, the *lamba-nipātāntara* would also be equal to the sum of the distances from the said midpoint to the feet of the two perpendiculars. Hence, the *lamba-nipātāntara* can be derived either by subtracting the base-segments of the two perpendiculars in any one direction, or by adding up the distances of the feet of the perpendiculars from the midpoint of the base-diagonal. Now, even when the southern side is changed as the face and the (present) face is interchanged as the southern side, the desired diagonal will continue to be the base. Then both the perpendiculars fall on the northern side of the midpoint of the base. Hence the *lamba-nipātāntara* would be the difference between the distances between the feet of the perpendiculars and the mid-point of the base. If this is derived from the base-segments, there will be no difference, since the *lamba-nipātāntara* is the difference between the base-segments on any one side.

Now, when the quadrilateral is divided into two triangles by the desired diagonal, suppose that of the two sides of each of the two triangles, the shorter sides touch one tip of the diagonal and the longer sides touch the other tip. Then, the two perpendiculars will fall on the base, viz., the desired diagonal, towards that side of its midpoint where the shorter sides are. Hence, the difference between the distances of the feet of the two perpendiculars from the midpoint of the base would be the *lamba-nipātāntara*. On the other hand, in cases where the tips of the larger side of one triangle and the smaller side of the other triangle meet at both the tips of the diagonal, then the perpendiculars fall on the two sides of the midpoint of the base-diagonal, since the rule is that the foot of the perpendicular will be towards the shorter side.

Here, the *lamba-nipātāntara* would be the sum of the distances of the feet of the perpendiculars from the midpoint of the base.

The distance between the mid-base and the foot of the perpendicular is half the difference between the *ābādhā*-s (base-segments). If the shorter base-segment is marked off from the tip of the longer base-segment, the result will be the difference between the two base-segments. The mid-base-point will be at the centre of this. Thus, it results that half the difference between the base-segments is the distance between the mid-base and the foot of the perpendicular. Therefore, the sum or difference of half the differences the (two pairs of) base-segments will be equal to the *lamba-nipātāntara*.

Now, when the difference of the squares of the base-segments of a perpendicular is divided by the base, which is their sum, the result will be the difference between the segments. And the result of dividing, in the same manner, half the difference of the said squares will be half the difference between the segments. Now, the difference between the squares of the base-segments and the difference of the squares of the two sides, other than the base, of a triangle are equal, for the reason that the said two sides of the triangle form the hypotenuse for the *bhujā* and *koṭi* formed by the perpendicular and the base-segments. Here, when the square of the shorter of the two sides is subtracted from the square of the longer side, it will be the same as subtracting (from the square of the longer side, both) the squares of the shorter base-segment and the perpendicular. In this, when first the square of the perpendicular is subtracted from the square of the longer side, what would remain is the square of the longer base-segment. From that the square of the shorter base-segment is subtracted. Hence, the difference between the squares of the two sides and the difference between the squares of the two base-segments are equal.

Now, amongst the two sides of the desired diagonal, take the square of the larger side and subtract from it the square of the shorter side and halve the remainder. Similarly, find the difference between the squares of the sides on the other side of the diagonal and halve the remainder. When these two remainders are added together or subtracted from one another and the result divided by the diagonal, which is the sum of the base-segments, the quotient will be the *lamba-nipātāntara*.

Therefore, if it is desired to add the difference between the squares of the sides on one side of the diagonal to the difference between the squares of the sides on the other side of the diagonal (the procedure is as follows): Now, there are two triangles on different sides of the diagonal; add the square of the longer side of one triangle to the square of the longer side of the other triangle. From this subtract the sum of the squares of the two shorter sides. The remainder will be the sum of the differences between the respective squares of the sides. Here, in both cases, in both the longer sides, there would be some remainder (when the respective shorter sides have been subtracted from them). Since these remainders are positive, the two longer sides might be taken as positive. Hence it is possible to subtract the sum of the negatives (i.e., the shorter sides) from the sum of the positives.

Suppose it is needed to get the difference between the two differences of the squares. Now, of the two differences of the squares, consider that square-difference which is the smaller of the two; if this difference is the remainder from the square of some side, then the square of that side can be taken as a full negative. The reason is that, what is (negatively) left here is being subtracted from the square of the longer side of the other triangle. This would mean that this negative-side-square is subtracted from the square of the smaller side related to it as also from the square of the larger side of the other triangle. Thus the negative quantities are constituted by the sum of this negative-side-square and the square of the smaller side of the other triangle. And, the positive quantities are the sum of the squares of the other sides. When one is subtracted from the other, the remainder will be positive. This is the way when the differences of the squares of sides are subtracted one from the other. It is also said:

> *antarayoge kārye rāśidvayayormahadyutestyājyā* |
> *itarayutirantare cennyūnādhikayogato'nyayutiḥ* ||

> When the *antara-yoga* of two sets of two numbers is required, then from the larger sum of the numbers (of the two sets) is to be subtracted the other sum of numbers. If their *antara* (difference) is required from one sum large or small, the other sum should be subtracted.

Now, conceive of a situation like this: Of the two sides associated with the two perpendiculars drawn to the diagonal, let the longer sides be on one side of the perpendiculars, say south, and the shorter sides on the other side, i.e., north. In this case, calculate, according to the rule set out above, the sum of the squares of the base and face (of the quadrilateral) and the sum of the squares of the southern and northern sides, and subtract one from the other. The remainder will be the difference of the difference of squares. On the other hand, let it be the case where in one triangle the side on one side of the perpendicular is longer and in the other the side on the other side is longer, and it is required to derive the sum of the square-differences of the sides, according to the above-said rule. Since the squares of the longer sides have to be added, here, the squares of the base and the face and the squares of the southern and northern sides have to be added. Hence, the rule is that in all cases the sum of the squares of the two sets of opposite sides should be found. The difference between two sums of the squares of the opposite sides should be found and halved. When this difference is divided by the diagonal, the *lamba-nipātāntara* will be got.

7.15.3 First result for the area

When the said half-difference is squared, and divided by the square of the diagonal, the square of the *lamba-nipātāntara* will be got. When this square is subtracted from the square of the other diagonal, the result will be the square of the *lamba-yoga*, the sum of the two perpendiculars. When the square of the sum of the perpendiculars and the square of the desired diagonal are multiplied and divided by four, the result will be the square of the area of the quadrilateral.

Now, the square of the *lamba-nipātāntara* plus the square of the sum of the perpendiculars will be the square of the other diagonal. If that is to be multiplied by the square of the desired diagonal and calculations made, the square of the *lamba-nipātāntara*, which is subtractive, should also be multiplied by the square of the desired diagonal and then the subtraction made, since addition and subtraction of numbers can be made only if they have a common denominator. Thus, it follows that this should be subtracted from the product of the squares of the two diagonals. Here, the square of the *lamba-nipātāntara* is found thus: The squares of the opposite sides are first found, added together and halved. The difference between the two is squared and the result divided by the square of the desired diagonal. (The square of the *lamba-nipātāntara* so found) is then multiplied by the square of the desired diagonal. Thus, half the sum of the squares of the opposite sides and their difference are found and squared. That is subtracted from the product of the squares of the desired diagonal and the other diagonal.

One fourth of the remainder will be the square of the area (of the quadrilateral). Here, we have to divide by four the difference of the squares. When they are halved, squared and the difference found, it will be one fourth the square difference. Hence, half the product of the diagonals and half the difference of half the sum of the squares of the opposite sides can be squared and one subtracted from the other. Then also the square of the area (of the quadrilateral) will result.

By the same rule, it is possible that the sum of the squares of halves of the opposite sides be subtracted one from the other. There is the rule:

> *pratibhujadalakṛtiyutyoryad antaraṃ yacca karṇaghātadalam* |
> *vargāntarapadam anayoścaturbhujakṣetraphalam adhikam* ||

> Find the difference between the sums of the squares of halves of the opposite sides. Find also the product of the two diagonals and halve it. Square the above two separately, subtract one from the other, and find the root. The result will be a little more than the area of the quadrilateral.

7.15.4 Second result for the area

It had been stated earlier that the squares of the two diagonals was to be derived through the addition of the products of the sides adjoining the diagonals. (This follows the rule): When the products of two results are required, multiply the two multipliers by the two multiplicands, and divide by the product of the two divisors. What is got will be the product of the two results.

(This rule might be applied here): (First) multiply, separately, the two sides which touch the tip of the desired diagonal and the two sides which meet the base-point of the diagonal and add the two products. This will be the multiplicand for the desired diagonal. Similarly the multiplicand for the other diagonal will be the sum of the products of the sides adjoining that diagonal. Now, the multiplicand of the desired diagonal will be the divisor for the other diagonal and the multiplicand of the other diagonal will be the divisor for the desired diagonal. Therefore, since the products of the two multiplicands and of the two divisors are equal, the product of the two multipliers will itself be equal to the product of the results. Then again, the multiplier in the case of both the diagonals is the two pairs of opposite sides multiplied separately and added together; the square thereof would be equal to the product of the squares of the two diagonals. Actually, however, the diagonals would have been multiplied together before squaring, since multiplying the numbers and then squaring them, and squaring the numbers and then multiplying them would give the same result. Hence, it is definite that when the product of one set of opposite sides is added to the product of the other set of opposite sides and squared, it will be equal to the square of the product of the diagonals. Therefore, the square of the *lamba-nipātāntara* multiplied by the square of the desired diagonal is subtracted from this product of the squares of the two diagonals; the result will be the product of the square of the desired diagonal and the square of the sum of the perpendiculars. One-fourth of this would be the square of the area of the quadrilateral.

Now, the product of the square of the *lamba-nipātāntara* and the square of the desired diagonal would be the square of half the difference of the sum of the squares of the two sets of opposite sides, since half the sum of the difference of two numbers is equal to half the difference of their sum. Since this has to be subtracted from the product of the squares of the diagonals divided by four, (the same result can be obtained) also by first dividing them by four and then doing the subtraction. Again, since these two which are in the form of squares have to be divided by four, their halves can be squared and the subtraction done, for one fourth of a square (of a number) is equal to the square of half (the number). Hence, add together the square of half the base and of half the face. Add together also the square of half the southern side and the square of half the northern side. Then find out the difference between these two sums. Find also half the product of the two diagonals. Square these two and find their difference. The result will be the square of the (area of the) quadrilateral. This has been stated by the passage *pratibhujadalakṛtiyutyoryadantaram. . .* .

The difference between these two squares can be found also by multiplying their sum by their difference, according to the rule *yogāntarahatirvargāntaram* ('the product of the sum and difference of two numbers is the difference of their squares'). The method of finding the sum and difference in the above (is as under): The product of the base and the face and the product of the southern and northern sides should be added together and halved, and placed in two places. To one add the difference between the sum of the squares and from the other subtract. The results will be the relevant sum and difference. This sum and difference of the sum of squares refer to the difference of the sum of squares of the halves of the face and the base, and the sum of squares of the halves of the southern and northern sides. Now, when to a number the difference of two other numbers has to be added, add to the number the larger of the latter two numbers and from the sum subtract the smaller number. Then it will be as if the difference has been added. On the other hand, when from a number the difference between two numbers has to be subtracted, then, to the number add the smaller number and subtract the larger number. Then it will be that the subtraction has been done.

Or, the sum and difference can be effected in the following manner. Find half the product of the base and the face, and apply to it the sum of the squares of their halves. Similarly find half of the product of the southern and northern sides, and apply to it the sum of the squares of their halves. Then add the two results. This will be either of the required sum or difference (as the case may be). Here, add to the (earlier) product the sum of the squares of half the base and the face. And subtract from the (earlier) product the sum of the squares of half the southern and northern sides. Take the sum of these two as the first number. The second number should (be derived thus): Subtract the sum of the squares of half the base and the face from the product of these two sides. Similarly add the sum of the squares of half the southern and northern sides to the product of those sides. The second number is the sum of the two. Now, when half of the product of opposite sides from which the sum of the squares of half of these is to be subtracted, there the half of the product will be double the product of the halves. On the other hand, the sum of the (corresponding) squares would be greater by the square of the difference. Hence, the sum of the squares should not be subtracted from double the product. So the square of the difference of half these opposite sides would be negative. In the other product, however, it will be the sum of the squares of the opposite sides, since double the product and the sum of the squares are being added here. This is according to the rule:

> *vargayogo dvayo rāśyoḥ dvighnaghātena saṃyutaḥ |*
> *hīno vā tatpade rāśyoryogabhedau prakīrtitau ||*
>
> Double the product of two numbers added to or subtracted from their sum of squares and the root found, would be the sum or difference of the two numbers.

Here, half the base and face have been added together and the square of their sum found. From this has been subtracted the square of the difference of half the southern and northern sides. Take this as the first number. The second number would be the square of the sum of half the southern and northern sides from which the square of the difference between half the base and face is subtracted. When these two are multiplied, the square of the area of the quadrilateral is obtained.

7.15.5 Final result for the area

Here also, the said two (*rāśi*-s) are differences of squares. The two (numbers) can be calculated also using the products of sum and difference. Since these differences of squares are to be multiplied, it will be that the results of two additions and two subtractions, all the four, are multiplied together. And the result will form the square of the area (of the quadrilateral).

Hence, now place, at two places, the sum of the base and the face. From one subtract half the difference of the southern and northern sides, and add the same to the other. These two shall form two numbers. Then place, at two places, the sum of half the southern and northern sides; add to one, half the difference between the base and the face and subtract it from the other. These results give two other numbers. These four numbers are to be multiplied together to get the square of the area (of the quadrilateral).

The said four numbers can be calculated as follows. Find the sum of the four sides of the quadrilateral, halve it and place at four places. From each subtract one side, in order. The four numbers thus got are the required four numbers. (The reason is as follows): Here, half the sum of the four sides is the sum of half of each of the four sides. From this one full side is subtracted. Since the sum contains its half, that half will get subtracted. As regards the other half, it will get subtracted from half the opposite side if that were the longer (of the two) and the difference will remain. If half the opposite side were shorter, the difference of the two would have been subtracted from the sum of the halves of the other two sides as well. In other words, when the face is subtracted from half the sum of all the (four) sides (*sarvadoryutidalam*), the remainder will be the sum of half the southern and northern sides and the difference between half the base and face. Similarly (in the second of the above proposed four subtractions), when the base-side is subtracted the result will be one in which the difference would have been removed. When from half the sum of all the sides the smaller of the southern and northern sides is subtracted the result will be the sum of half the base and the face and the difference of the other two sides. When the longer of the two sides is thus subtracted, it would be that the said difference is removed. Then multiply together all the four results. The area of the quadrilateral would be obtained. Thus has it been said:

> *sarvadoryutidalaṃ catuḥsthitaṃ bāhubhirvirahitaṃ ca tadvadhāt* |
> *mūlam asphuṭaphalaṃ caturbhuje spaṣṭamevamuditaṃ tribāhuke* ||
>
> Half the sum of all the sides is to be placed at four places and from each, one side is subtracted and the results multiplied together. The root found would be the rough area of the quadrilateral. In the case of the triangle (also) it will be the definitive (area).
>
> (*Līlāvatī*, 167)

7.15.6 Area of triangles

Working in the same manner, the area of the triangle will result. There, the sum of half the base and half the sum of the sides will be the *sarvadoryutidalam* ('half the sum of the sides'). Put it in four places. From three of these subtract one side each. From the last nothing is to be subtracted.

Now, the product of the simple 'half the sum of the sides' and the same with the base subtracted from it will be mostly equal to the square of the perpendicular. This will also be the difference between the squares of half the sum of the base-segments and half the sum of the (other) two sides. The difference between the squares of a base-segment and the (corresponding) side is equal to the square of the perpendicular and this is the reason for its closeness (to the product mentioned). The product of the other two 'half the sum of the sides', (viz., the second and the third) from which the two sides have been subtracted will be mostly equal to the square of half the base. When this and the earlier result, nearly equal to the square of the perpendicular, are multiplied together the square of the area of the triangle will be got. Here, the amount of decrease in the square of half the base is compensated by the increase in the square of the perpendicular. Hence the result got is the square of the triangle.

The rationale of the above is stated below: In a triangle the two sides form also the hypotenuses to the common perpendicular (to the base) which forms their common *koṭi*. Hence the square of each side will be equal to the sum of the square of the common perpendicular and the square of the respective base-segment. Hence the difference between the squares of the two base-segments will be equal to the difference of the squares of the two sides which are the hypotenuses. Hence, if half the sum of the squares of the two base-segments is subtracted from half the sum of the squares of the two sides, the remainder will be just the square of the perpendicular.

Now, if the square of half the sum of the base-segments is subtracted from the square of half the sum of the sides, the remainder will be more than the square of the perpendicular. Now, take half the difference between the two sides and take also half the difference between the two base-segments. Square these two quantities and find the difference. This is clearly the amount of excess over the square of the perpendicular.

Now, in the case of two numbers, twice the product added to the square of the difference is the sum of the squares. Hence, the product added to half the square of the difference will be half the sum of the squares. Thus, in the square of half the sum there will be the product together with the one-fourth of the square of the difference. Hence, it transpires that half the sum of squares will be greater than the square of half the sum by the quantum of the square of half the difference. Therefore in the instance under consideration, the square of half the difference of the two sides will be less than the square of half their sum; similarly the square of half the difference between the base-segments will be less than the square of half the base, which latter is half the sum of the base-segments, the relative difference being equal to half the sum of the squares. Here, the square of half the difference of the two base-segments is larger than the square of half the difference of the two sides. Hence, it is necessary that the other be subtracted from the square of half the sum of the base-segments. (In the subtraction of a larger number from a smaller number) what is deficient in the minuend (i.e. the number from which subtraction is to be made) will be the excess in the remainder after subtraction. According to this rule, the square of the perpendicular will be in excess by the difference between the square of half the difference between the base-segments, and the square of half the difference between the sides. This will be the case when the squares of halves of the sum of quantities are subtracted one from the other.

Here, the difference between the squares of the sides of the triangle and the difference between the squares of the base-segments are equal. Hence, the result of the product of the sum of the sides by the difference of the sides, and the product of the sum of the base-segments and the difference between the base-segments, are equal, for the reason that the product of the sum of and difference of two numbers is equal to the difference between their squares. Since the two products are equal, a kind of *pramāṇa, icchā*, and their *phala*-s kind of relation-ship can be envisaged amongst these four numbers. Now, it is definite that the product of the *pramāṇa-phala* and *icchā* and the product of *icchā-phala* and *pramāṇa* are equal. In the present case, if the sum of the sides is considered as the *pramāṇa*, the *pramāṇa-phala* will be the difference between the base-segments, *icchā* would be the sum of the base-segments, and the *icchā-phala* would be the difference between the sides. The same relationship would subsist even among their squares and the differences of their squares. Here, it is also definite that the relation between the difference between sides and the difference between the base-segments, would be the same as the relation between the sum of the sides and the sum of the base-segments. The same relationship exists amongst their halves. Amongst the squares of the halves also the same is the relation. Thus, if half the square of half the sum of the sides is equal to the square of half the sum of the base-segments, then, half the square of the difference between the base-segments will be the square of half the difference of the sides. Similar is the relationship amongst the difference between the squares of half sums and the difference between the squares of half their differences.

Here a rule of three can be visualised as follows: The *pramāṇa* is the square of half the sum of the base-segments; *pramāṇa-phala* is the square of half the difference between the sides; *icchā*, would be the difference between the squares of half the sum of the sides and half the sum of the base-segments; the *icchā-phala* would be then the difference of the squares of half the difference between the base-segments and of half the difference between the sides. This *icchā-phala* is, here, the excess in the square of the perpendicular (mentioned above).

Therefore, the deficiency in the square of half the base should be compensated by utilising the above multipliers and divisors. Here, square of half the base is the multiplicand, the multiplier is the square of half the difference between the sides, and the divisor is the square of half the sum of the base-segments. Here, since the multiplicand is the same as the divisor, the multiplier and the result will also be the same. And, that is the square of half the difference between the two sides. Now, the square of half the difference between the sides has to be subtracted from the square of half the base. When, with this square of half the base, the square of the perpendicular to which is added the difference of the squares of half the differences, the square of the area of the triangle is got. (Here is the process involved in the above): Now, (first) is derived the square of half the base which is deficient by the square of half the difference between the sides. Then, from among the two sides subtracted from the 'half-sum-of-all-the-sides' (*sarvadoryuti-*

dala), of these two, that from which the shorter side had been subtracted will contain in it half the base with half the difference of the sides. And in the 'half-sum-of-all-the-sides' from which the longer side had been subtracted will contain in it, half the base less half the difference between the sides. Then, when these two, viz., one of which is half the base less half the difference between the sides and the other with the same added to it, are multiplied, the result will be the square of half the base less the square of half the difference between the sides: The above is according to the rule:

> *iṣṭonayugrāśivadhaḥ kṛtiḥ syādiṣṭasya vargeṇa samanvito vā* |
>
> Suppose a number has added to it a desired number and also subtracted from it. The product of the two together with the square of the desired number would give the square of the number.
>
> (*Līlāvatī*,20)

Now, the square of the perpendicular contains added to it the difference of the squares of half the differences. Now, to separate the said difference of squares of half the differences, that particular multiplier and divisor which are used, the same multiplier and divisor should be made the multiplier and divisor merely of the square of the half of the base, and not the multiplier and the divisor for the square of the perpendicular. For example: When 5 (the multiplicand) is multiplied by 3 (the multiplier), if actually the multiplicand is taken as 6, being the multiplicand increased by its one-fifth, the multiplication should be done with the multiplier, 3, with one-sixth of it reduced from it, i.e., by $2\frac{1}{2}$. In the same manner, here, too, one has to derive the result that has to be subtracted from merely the square of half the base. It therefore follows that the area of the triangle derived by using the rule *sarvadoryutidala* ('half the sum of all the sides') is indeed accurate.

7.16 Derivation of the *Sampāta-śara*, arrow of the intercepted arc when two circles intersect

Now there is another rule of a similar nature:

> *grāsone dve vṛtte grāsaguṇe bhājayet pṛthaktvena |*
> *grāsonayogalabdhau sampāta-śarau parasparataḥ ||*
>
> (When one circle intersects another circle), multiply the diameters of the two circles each diminished by the erosion (*grāsa*) and divide (each result) by the sum of the diameters of the two circles after each has been diminished by the decrease. Then are obtained the arrows of the area (of the two circles) intercepted by each other.
>
> (*Āryabhaṭīya, Gaṇita*, 18)

Construct a smaller circle in such a manner that a little of it overlaps a portion of a bigger circle. Draw a diameter line passing through the centres of the two circles and extending up to their circumferences. Join the points at which the circles intersect to get a line perpendicular to the diameter-line. This line will be a chord common to both the circles. The diameter-bits, from the point where this chord and the diameter-line meet, to the two circumferences, are the *śara*-s (arrows, Rversines). There the *śara* of the smaller circle will be larger and that of the larger circle will be smaller. Diameter minus *śara* (of the two circles) will be otherwise, that of the smaller circle being smaller and that in the larger circle being larger.

Here, the product of the respective *śara* and diameter-minus-*śara* will be the square of the common half-chord. The rule here is:

> *vyāsāt śaronāt śarasaṅguṇācca mūlaṃ dvinighnaṃ bhavatīha jīvā |*
>
> The root of the product of the diameter-minus-*śara* and the *śara*, multiplied by two will be the full-chord.
>
> (*Līlāvatī*, 204)

Hence, the *śara* in the larger circle will be smaller than the *śara* in the smaller circle, in proportion as the diameter-minus-*śara* in the smaller circle is smaller than that in the larger circle, since their products are equal. Just as in a triangle, the sum of the sides and the sum of the base-segments are proportionately related to half the difference between the base-segments and that between the sides. The relationship here is similar to that. Here, the sum of the two *śara*-s is called *grāsa* (overlap). The relationship, between the diameter-minus-*grāsa*-s (in the two circles), is the same as the relationship between the diameter-minus-*śara*-s (in them). Here, when the larger *śara* has been subtracted from the larger diameter-minus-*śara*, and the smaller *śara* from the smaller diameter-minus-*śara*, the remainders are the respective diameter-minus-*grāsa*. Hence, diameter-minus-*śara* is similar to the diameter-minus-*grāsa*. When the *śara*-s are not known separately, they can be derived by the application of the rule of three with the diameter-minus-*grāsa* of the two circles as *pramāṇa-phala*, the sum of the two diameter-minus-*grāsa*-s as the *pramāṇa* and the *grāsa* as *icchā*. The *śara* in one circle can be got from the diameter-minus-*grāsa* of the other and the other *śara* (from the second diameter-minus-*grāsa*). Thus the method of deriving the *śara* from the *grāsa* (has been stated).

7.17 Derivation of the shadow

There is another rule of similar import:

> *chāyayoḥ karṇayorantare ye tayorvargaviśleṣabhaktā rasādrīṣavaḥ |*
> *saikalabdhe padaghnaṃ tu karṇāntaraṃ bhāntareṇonayuktaṃ dale staḥ prabhe ||*
>
> Find the difference between the two shadows. Find the difference between the two shadow-hypotenuses. Square the two differences and subtract one from the other, with that divide 576 (= 12 × 12 × 4). Add 1 to the quotient and find the root. With this root multiply the difference between the hypotenuses. When this product is added to the difference between the shadows or subtracted therefrom and halved, (the length of) the two shadows are got.
>
> (*Līlāvatī*, 238)

On level ground, place a (lighted) lamp higher than the 12 inch gnomon. At some distance from it, place the 12-inch gnomon. Place another gnomon of the same height at a still more distance than the first one. It will be seen that the shadow cast by the nearer gnomon is shorter and that by the distant gnomon is longer. Here, the distance from the tip of the shadow to the upper tip of the gnomon is called shadow-hypotenuse (*chāyā-karṇa*). (It is also noted that) the shadow-hypotenuse is longer when the shadow is longer, since the (heights of) the gnomons are equal.

Now, consider the sum of the two shadows as the base, the hypotenuses as the sides and the gnomon as the altitude. Consider also the difference between the shadows as the difference between the base-segments and the differences between the hypotenuses as the difference between the sides. Now, square these two differences and subtract one from the other and take the remainder of the above as the *pramāṇa*; take as *pramāṇa-phala* the difference of the squares of the sum of the shadows and the sum of the hypotenuses; and, take as *icchā* the square of the difference between the hypotenuses. Then apply the rule of three. The square of the sum of the shadows will result as the *icchā-phala*. (It is to be noted that) when the *pramāṇa-phala* is divided by the *pramāṇa* and the multiplication is done after taking the square root, then the difference between the hypotenuses has to be multiplied. The result will be the sum of the shadows. It has therefore to be derived in that manner.

Now, the square of the sum (of the shadows) is the square of the gnomon multiplied by 4, with the difference of the squares of the differences added to it. Since the divisor is to be added to the dividend, 1 should be added to the quotient to get the same result. Hence only four times the square of the gnomon is divided. The application of the rule of three follows from the same kind of explanation given above. This is the similarity here with the earlier derivation of the square of the area.

7.18 Area of the surface of a sphere

Two rules have been enunciated earlier, viz., first, to the effect that from the sum of *piṇḍajyā*-s (Rsines) the sum of the *khaṇḍāntara*-s (second order Rsine differences) can be derived, and secondly that if the circumference and the diameter in one circle are known it is possible to apply the rule of three to derive them for the desired circle. It is explained here how these two can be used to obtain the surface area of a sphere.

Now, a right-round sphere is called a *gola*. Conceive of two circles at the centre of the sphere, one east-west, and the other, north-south. Conceive also some circles at short distances towards the north-south of the central east-west circle. The distances of all the parts of these circles to the east-west circle should be the same. Hence, each of these circles will be a little smaller than the previous circle. Continuing in the same manner, conceive of a number of circles of different sizes, the gap between successive circles being the same, each circle touching the lateral sides of the sphere. Continue the process till the northern and southern extremeties of the sphere are reached. The interstices between these circles will be equal and clearly visible on the north-south circle. Such being the situation, cut the gap between two circles which is circular in form at any place, and stretch the piece flat. It would, then, be seen that a quadrilateral of equal altitude (*sama-lamba*, trapezium) is formed, with the circumference of the longer circle as the base, that of the smaller circle as the face and the arc-bits of the interstice on the north-south circle as the sides. Now, cut the (triangular) external extension on one side of the strip and fix it, upside down, at the end of the extension at the other end of the strip. There will then be formed a rectangle with half the sum of the face and base of the earlier figure as the length and the perpendicular distance between them as the breadth. Now conceive of the other interstices (between the adjacent circles) also as rectangles. The breadth of all (the rectangles) will be equal, but the length (of the rectangles) will be varied. Now, the area (of a rectangle) is the product of its length and breadth. Since, in the present case, the breadth is the same (for all the rectangles) if we add up all the lengths and multiply by the breadth, the result will be the surface area of the sphere.

The problem now is to know the number of interstices, (in other words, the number of rectangular strips), and their lengths and breadth. Now, the radii of the several circles conceived will be the half-chords (Rsines) of a circle of the radius of the sphere. Therefore, if these Rsines are multiplied by the circumference of the sphere and divided by the radius of the sphere, the results will be (the circumference of the) circles with the respective Rsines as their radii. And, taking the Rsines of the middle of the interstices, we get the lengths of the said rectangles. When the sum of these Rsines is multiplied (by the circumference of the circle and divided by the radius of the sphere) the sum of the lengths of all the rectangles will be got. Multiply this by the (common) breadth. The result will be the sum of the areas (of all the rectangles). Now, the several interstices of the circles on the north-south circle will be the chord-bits in the circumference of the sphere. And the (common) Rsine of these arc-bits will be the breadth of all the rectangles.

Now, to the method of deriving the sum of the Rsines: With the sum of the second differences (*khaṇḍāntara-yoga*) multiply the square of the radius of the sphere and divide by the square of the full-chord of the arc-bit. The result is the sum of Rsines (*ardhajyā-yoga*). Then, multiply it by the breadth of the rectangle; this breadth is the Rsine of the arc-bit. The sum of the second differences (*khaṇḍāntara-yoga*) is the first *khaṇḍa-jyā*. Since the arc-bits are very minute, they will practically be equal to the full-chord. These two are to be the multipliers and the square of the full-chord is the divisor. But neither multiplication nor division is necessary here, and the result will only be the square of the radius. It has then to be multiplied by the circumference and divided by the radius. The result will be the radius (multiplied by the circumference). Since the surface areas of both the hemispheres have to be found, the radius should be doubled. Thus, it results that when the diameter of the sphere is multiplied by the circumference of the sphere, the surface area of the sphere is got.

7.19 Volume of a sphere

Here-in-below is stated the derivation of the volume of the interior of a sphere. Now, cut the sphere (into slices) along circles as envisaged above for calculating its surface area. A number of flat circular slices will result. While deriving the surface area, if the circles had been envisaged east-west, the pieces shall have to be cut on the north-west circumference, and that too, at equal distances. The thickness of the slices should (also) be equal. This being the case, after obtaining the area of every circle (a section of each slice), and taking the thickness of each as one unit, and adding the results, the volume of the sphere can be obtained.

7.19.1 The area of the circle

Now is stated the method to derive the square of the area of a circle. Cut the circle equally into two across a diameter. In both halves cut (equal) sections from the centre to the circumference. The divisions would be spread out at the circumference and pointed at the centre. Then, taking hold of the ends of the two halves, straighten them up and join one into the other, so that the pointed parts of one go into the cavities of the other. This arrangement will result in the shape of a rectangle having half the circumference of the circle as length and the radius as breadth. Thus, by multiplying half the circumference by the radius is obtained the area of the circle.

7.19.2 Derivation of the volume of a sphere

Hence, by multiplying the square of the Rsines (the radii of each of the several circular slices into which the whole body of the sphere has been sliced) by the circumference of the sphere and dividing by the diameter of the sphere, the surface area of the respective slices will be got. The addition of all these will give the volume of the sphere (since the thickness of each slice has been taken as the unit).

Now, for the derivation of the squares of the Rsines. When the *śara* and the diameter-minus-*śara* are multiplied, the result will be the square of the Rsine, since the sum of the *koṭi* and *karṇa* is diameter-minus-*śara* and the difference between them is the *śara*. Now, when the *śara* and diameter-minus-*śara* are separately squared, added and subtracted from the square of the diameter, and the result halved, the square of the Rsine is got, for the rule is that the difference between the square of the sum and the sum of squares (of two numbers) would be twice the product (of the said numbers).

Now, (by conceiving of the number of slices of the sphere to be large), the circles should grow gradually smaller and smaller and their (common) thickness made infinitesimal (*aṇu-prāya*). Then, the first *śara* would be just one atom. The further *śara*-s will increase by one atom each. Hence, one, two, etc., (*ekādyekottara*) sums of atoms will be the first, second, etc. *śara*-s. Hence, the sum of squares of the *śara*-s is the sum of squares of consecutive numbers (*varga-saṅkalita*). Here, the diameter provides the number of terms of the series (*gaccha*). The diameter is divided infinitesimally and the *varga-saṅkalita* is done. Twice the result of this summation would be the sum of the squares of the *śara* and the sum of the squares of the diameter-minus-*śara*. Here, the decreasing series from 1 to the radius is that of the *śara* and increasing one from the radius is that of the diameter-minus-*śara*. If however, it is taken that the increasing series is *śara* and the decreasing series is considered as diameter-minus-*śara*, then, the sum of the squares of the *śara* and the sum of the squares of diameter-minus-*śara* would be equal. Hence, it was directed to double the summation of (squares of) consecutive numbers.

It might also be taken that both (the *śara* and the diameter-minus-*śara*) are *śara*-s, one is the larger *śara*, the other is the smaller *śara*; and that, for both, the chord is common. In that case, the product of the *śara* and the diameter-minus-*śara* is the square of the Rsine. There is the rule:

> *vṛtte śarasaṃvargo'rdhajyāvargassa khalu dhanuṣoḥ* |
>
> In a circle (when a chord divides it into two arcs), the product of the *śara*-s of the two arcs is equal to the square of the half-chord.
>
> (*Āryabhaṭīya, Gaṇita*, 17)

Then again, the square of the Rsine will result when the square of the *śara* and that of the diameter-minus-*śara* have both been subtracted from the square of the diameter and the result halved, for the reason that the difference between the sum of the squares (of two numbers) and the square of their sum would give twice their product. Therefore, the square of the diameter should be multiplied by the desired number of the square of Rsines. The result will be the cube of the diameter which has been divided into infinitesimal parts. Since the division subsequently has to be made by the infinitesimal, the above result will be only the cube of the diameter. Then, from that, twice the *varga-saṅkalita* has to be subtracted. Now, the *varga-*

saṅkalita is one-third the cube. Since that has to be doubled and subtracted, the remainder will be one-third the cube. Since this has to be halved the result would be one-sixth the cube. Therefore the cube of the diameter divided by six would be the sum of the squares of all the Rsines (the radii of the infinitesimal slices) of the sphere. This has, now, to be multiplied by the circumference and divided by the diameter. Hence the diameter need not be cubed in the beginning; it would be enough to square it, since a division shall have to be done later (by the diameter itself). Thus the square of the diameter multiplied by the circumference and divided by 6 would give the volume of the sphere. Thus has been explained, the volume of the sphere and its surface area, which are obtained in the context of the summation (*saṅkalita*) of square of Rsines, and using the addition of the squares of *śara*-s.

[Thus ends Chapter Seven entitled Derivation of Sines]

To be treated as – Blank page (introduced deliberately)

Gaṇita-Yukti-Bhāṣā

Explanatory Notes

Chapters 1 – 7

To be treated as – Blank page (introduced deliberately)

Prologue

Yuktibhāṣā is written in an extremely lucid style and there is not really much need for any further explanation regarding the meaning or import of the text. The following explanatory notes are appended to the English translation mainly to elucidate the processes set forth in the text by means of equations, diagrams and notations currently employed in mathematics and astronomy. They are in the form of supplementary explanatory notes which are to be read along with the translation and are not meant to be an independent exposition of the contents of *Yuktibhāṣā*. Also while writing these explanatory notes we have restricted our objective more or less exclusively to elucidating the text, except for offering a few comments which are generally relegated to the footnotes.[1]

While preparing these notes for the Mathematics part (Chapters 1-7) of *Yuktibhāṣā*, we have made extensive use of the notes in Malayalam given in the seminal edition of the *Gaṇitādhyāya* of *Yuktibhāṣā* by Ramavarma (Maru) Thampuran and A. R. Akhileswarayyar.[2] We have also made liberal use of many of the modern studies of *Yuktibhāṣā* especially the pioneering works of C. T. Rajagopal and his collaborators[3] and the recent study by S.Parameswaran.[4]

---

[1]In order to place the contents of *Yuktibhāṣā* in the larger tradition of *upapatti* or Proofs in Indian Mathematics, an Epilogue on this subject is appended at the end of the Explanatory Notes in this Volume. Similarly, in order to elucidate the model of planetary motion discussed in the Astronomy part of *Yuktibhāṣā* an Epilogue on Nīlakaṇṭha's Revision of the Traditional Indian Planetary Model is appended at the end of the Second Volume.

[2]H. H. Ramavarma (Maru) Thampuran and A. R. Akhileswarayyar, Eds., *Yuktibhāṣā*, Mangalodayam Ltd., Thrissur 1948.

[3]See for instance, the following: K. Mukunda Marar, 'Proof of Gregory's Series', Teacher's Magazine **15**, 28-34, 1940; K. Mukunda Marar and C. T. Rajagopal, 'On the Hindu Quadrature of the Circle', J.B.B.R.A.S. **20**, 65-82, 1944; K. Mukunda Marar and C. T. Rajagopal, 'Gregory's Series in the Mathematical Literature of Kerala', Math Student **13**, 92-98, 1945; A. Venkataraman, 'Some interesting proofs from *Yuktibhāṣā*', Math Student **16**, 1-7, 1948; C. T. Rajagopal 'A Neglected Chapter of Hindu Mathematics', Scr. Math. **15**, 201-209, 1949; C. T. Rajgopal and A. Venkataraman, 'The Sine and Cosine Power Series in Hindu Mathematics', J.R.A.S.B. **15**, 1-13, 1949; C. T. Rajagopal and T. V. V. Aiyar, 'On the Hindu Proof of Gregory's Series', Scr. Math. **17**, 65-74, 1951; C. T. Rajagopal and T. V. V. Aiyar, 'A Hindu Approximation to Pi', Scr.Math. **18**, 25-30, 1952. C. T. Rajagopal and M. S. Rangachari, 'On an Untapped Source of Medieval Keralese Mathematics', Arch. for Hist. of Ex. Sc. **18**, 89-101, 1978; C. T. Rajagopal and M. S. Rangachari, 'On Medieval Kerala Mathematics', Arch. for Hist. of Ex. Sc. **35**(2), 91-99, 1986.

[4]S. Parameswaran, *The Golden Age of Indian Mathematics*, Kochi 1998.

It is generally believed that the remarkable work of the Kerala School of Astronomy and Mathematics was first brought to the notice of modern scholarship by C. M. Whish in 1830s.[5] However it appears that from the early decades of the 19^{th} century many British observers had noticed and reported on the Indian mathematicians' knowledge of several infinite series.[6] Incidentally Whish had noted in his paper that "A further account of Yucti Bhasa, the demonstrations of the rules for the quadrature of the circle by infinite series, with the series for the sines, cosines and their demonstrations, will be given in a separate paper". However he does not seem to have published any further paper on this subject.

The work of Kerala School was completely ignored by modern scholarship for over a century till it was resurrected by the pioneering work of C. T. Rajagopal and his collaborators in the 1940's. Following the work of Rajagopal and his collaborators, there have been a number of studies which discuss some of the proofs in the Mathematics Part of *Yuktibhāṣā*, and these have contributed to a better understanding and appreciation of the work of the Kerala School of Mathematics.[7] We have made use of some of these studies also, while preparing these Explanatory Notes.

---

[5] C. M. Whish 'On the Hindu Quadrature of the Circle, and the infinite series of the proportion of the circumference of the diameter exhibited in the four Shastras, the Tantrasangraham, Yucti Bhasa, Carana Paddhati and Sadratnamala', Trans. Roy. As. Soc. (G.B.) **3**, 509-523, 1834. As regards the year of publication of this article, refer to *fn.*6 on page xxxiii.

[6] See, for instance, John Warren, *Kāla Saṅkalita*, Madras 1825, p 92-3, 330-1.

[7] Apart from the work of Parameswaran cited earlier, we may here cite the following: T. A. Sarasvati Amma, *Geometry in Ancient and Medieval India*, Varanasi 1979; T.Hayashi, T. Kusuba and M. Yano, 'The Correction of the Mādhava Series for the Circumference of a Circle', Centauras, **33**, 149-174, 1990; Ranjan Roy, 'The Discovery of the Series formula for π by Leibniz, Gregory and Nīlakaṇṭha', Math. Mag. **63**, 291-306, 1990; V. J. Katz, 'Ideas of Calculus in Islam and India', Math. Mag. **68**, 163-174, 1995; V. J. Katz, *A History of Mathematics*, 2nd Ed., Addison Wesley Longman, 1998; G. C. Joseph, *The Crest of the Peacock: The Non-European Roots of Mathematics*, 2nd Ed., Princeton 2000; C. K. Raju, 'Computers, Mathematics Education, and the Alternative Epistemology of the Calculus in the *Yuktibhāṣā*', Phil. East and West **51**, 325-362, 2001; D. F. Almeida, J. K. John and A. Zadorozhnyy, 'Keralese Mathematics: Its Possible Transmission to Europe and the Consequential Educational Implications', J. Nat. Geo. **20**, 77-104, 2001; D. Bressoud, 'Was Calculus Invented in India?', College Math. J. **33**, 2-13, 2002; J. K. John, 'Derivation of the *Saṃskāras* applied to the Mādhava Series in *Yuktibhāṣā*', in M. S. Sriram, K. Ramasubramanian and M. D. Srinivas (eds.), *500 Years of Tantrasaṅgraha: A Landmark in the History of Astronomy*, Shimla 2002, p 169-182; G. G. Emch, R. Sridharan, and M. D. Srinivas (eds.), *Contributions to the History of Mathematics*, New Delhi, 2005. Some aspects of the Astronomy Part of *Yuktibhāṣā* are discussed in K. V. Sarma and S. Hariharan, '*Yuktibhāṣā* of Jyeṣṭhadeva: A book of Rationale in Indian Mathematics and Astronomy in Analytical Appraisal', IJHS, **26**, 185-207, 1991.

Chapter 1

The Eight Mathematical Operations

1.5 Multiplication: In general

1.5.2 First method of multiplication

This may be illustrated by the following example, where 234 is the multiplier and 647 is the multiplicand.

2	3	4		
		6	4	7
1	2			
	1	8		
		2	4	
1	4	0	4	
2	3	4		
		4	7	
1	4	0	4	
		8		
		1	2	
			1	6
1	4	9	7	6

The multiplier and multiplicand are to be placed as shown with the first place of the multiplier above the last place of the multiplicand. The digit (6) at the last place of the multiplicand is first multiplied by the digit (2) at the last place of the multiplier, then by the next digit (3) and finally by the digit (4) at the first place of the multipiler.

Then the digit at the last place of the multiplicand is discarded and the first place of the multiplier is placed above the penultimate place of the multiplicand. The digit in the penultimate place of the multiplicand is multiplied by the different digits of the multiplier.

1	4	9	7	6	
2	3	4			
		7			
1	4	9	7	6	
		1	4		
			2	1	
				2	8
1	5	1	3	9	8

The process is repeated till the different digits of the multiplier multiply the digit at the first place of the multiplicand .

If all the products are added, with the correct place values in mind, the product of the multiplier and the multiplicand is obtained.

1.5.3 Second method of multiplication

This can be illustrated by the following example where, again, 234 is the multiplier and 647 is the multiplicand.

$$\begin{array}{rcrcr}
647 & \times & 200 & = & 129400 \\
647 & \times & 30 & = & 19410 \\
647 & \times & 4 & = & 2588 \\
\hline
647 & \times & 234 & = & 151398
\end{array}$$

1.5.4 Third method of multiplication

This can be illustrated by considering the same example as above.

$$\begin{array}{rcrcr}
647 & \times & 110 & = & 71170 \\
647 & \times & 124 & = & 80228 \\
\hline
647 & \times & 234 & = & 151398
\end{array}$$

1.5.5 Representation of the product as an area

Figure 1.1 represents the product $11 \times 7 = 77$.

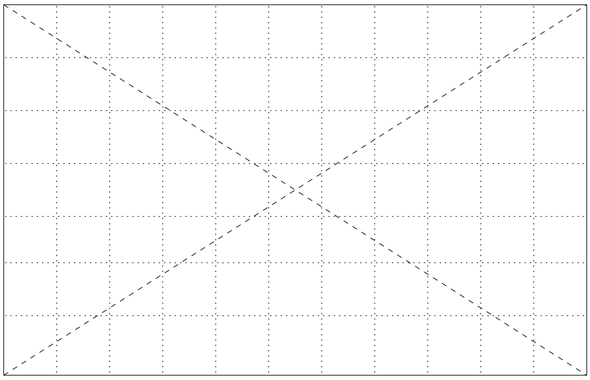


Figure 1.1: Product as an area.

1.6 Multiplication: Special methods

1.6.1 Multiplication: First special method

Let a be the multiplicand and b the multiplier and p the desired number added or subtracted from b. Then,

$$a\ b = a(b \mp p) \pm ap. \tag{1.1}$$

This is illustrated in Figure 1.2 for multiplicand 9, multiplier 5, when desired number 2 is subtracted from 5.

$$9 \times 5 = 9 \times (5 + 2) - 9 \times 2.$$

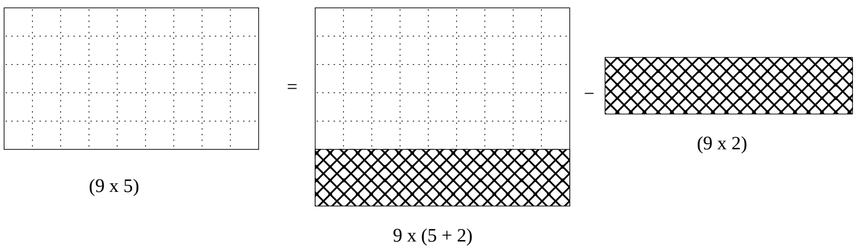


Figure 1.2: Illustrating the first special method.

1.6.2 Multiplication: Second special method

Let a be the multiplicand and b the multiplier and p a desired number substracted from a and q is a desired number added to b. Then

$$ab = (a-p)(b+q) - (a-p)q + pb. \tag{1.2}$$

This is illustrated in Figure 1.3 for multiplicand 9, multiplier 5, when desired number 2 is subtracted from 9 and desired number 3 is added to 5.

$$9 \times 5 = (9-2) \times (5+3) - (9-2) \times 3 + 2 \times 5.$$

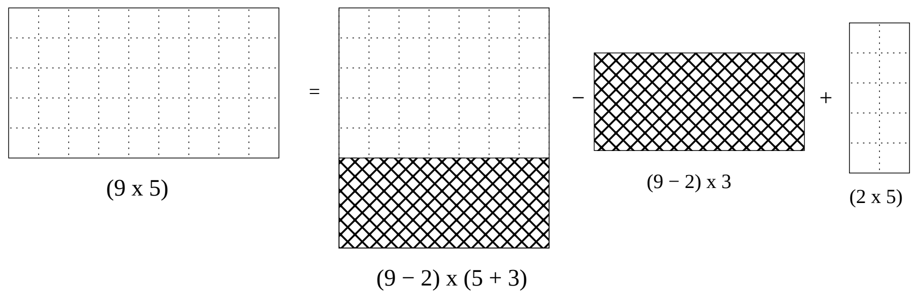


Figure 1.3: Illustrating the second special method.

1.6.3 Multiplication: Third special method

Let a be the multiplicand and b the multiplier and let the quotient of b divided by desired number d be added to (or subtracted from) b to give a new multiplier. Then we have to subtract from (or add to) this new product the quotient of it when divided by $d \pm 1$ (the divisor ± 1) to get the product of a and b.

$$ab = a\left(b \pm \frac{b}{d}\right) - (\pm)a\left(\frac{b \pm \frac{b}{d}}{d \pm 1}\right). \tag{1.3}$$

This is illustrated for $b = 12 = d$. Now,

$$a\left(12 + \frac{12}{12}\right) = a \times 13.$$

Hence, what is to be subtracted from the above, is

$$\frac{(a \times 13)}{13} = a\left(\frac{12+\frac{12}{12}}{12+1}\right).$$

In other words

$$a\left(12+\frac{12}{12}\right) - a\frac{\left(12+\frac{12}{12}\right)}{12+1} = a \times 13 - \frac{(a \times 13)}{13} = a \times 12.$$

Similarly

$$a\left(12-\frac{12}{12}\right) + a\frac{\left(12-\frac{12}{12}\right)}{12-1} = a \times 11 + \frac{a \times 11}{11} = a \times 12.$$

1.6.4 Multiplication: Fourth special method

Let a be the multiplicand and b the multiplier and let the quotient of b divided by a desired number d be multiplied by a number m and the result added to (or subtracted from) b to give a new multiplier. Then we have to subtract from (or add to) this new product m times the quotient of it when divided by $d \pm m$ (the divisor $\pm m$) to get the product of a and b.

$$ab = a\left(b \pm m\frac{b}{d}\right) - (\pm)\, m\left(a\frac{\left(b \pm m\frac{b}{d}\right)}{d \pm m}\right). \tag{1.4}$$

This is illustrated for $b = 12 = d$ and $m = 5$.

$$a\left(12+5\times\frac{12}{12}\right) - 5 \times a\frac{\left(12+5\times\frac{12}{12}\right)}{12+5} = a \times 17 - 5 \times \frac{a \times 17}{17} = a \times 12.$$

Similarly

$$a\left(12-5\times\frac{12}{12}\right) + 5 \times a\frac{\left(12-5\times\frac{12}{12}\right)}{12-5} = a \times 7 + 5 \times \frac{a \times 7}{7} = a \times 12.$$

1.6.5 Multiplication: Fifth Special method

Let a be the multiplicand and b the multiplier and let b be divisible by d and the quotient be q. Then

$$ab = a\left(\frac{b}{d}\right)d = a\,q\,d\,. \tag{1.5}$$

In particular, for $b = 12 = 3 \times 4$,

$$a \times 12 = (a \times 3) \times 4. \tag{1.6}$$

1.8 Square

1.8.1 First method of squaring

The process can be illustrated by considering the following example.

$$\begin{array}{ccccc}
1 & 2 & 3 & & \\
\cline{1-3}
1 & 4 & 6 & & \\
 & & 2 & 3 & \\
\cline{1-4}
1 & 4 & 6 & & \\
 & & 4 & 12 & \\
 & & & & 3 \\
\hline
1 & 4 & 6 & & \\
 & & 4 & 12 & \\
 & & & & 9 \\
\hline
1 & 5 & 1 & 2 & 9
\end{array}$$

Suppose the number to be squared is 123. First, place the square of the (first) digit 1 in the last place below itself. Then, below each of the succeeding digits, place twice the product of the digit with the last digit.

Then discard the digit 1, move the rest of the digits 23 by one place and repeat the process.

Then discard the next digit 2 and move the remaining digit 3 by one place and repeat the process.

Adding the different results we get the value of the square $(123)^2 = 15129$.

Note that in the above process the squares of the different digits 1^2, 2^2, 3^2, occur at the odd places.

1.8.2 Second method of squaring

This method is based on successively partitioning the number into two components. For instance, if the number is $a + b$ where a stands for the number corresponding to the digit at the last place, and b represents the number obtained by replacing the last digit by zero, then

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2. \tag{1.7}$$

This can be seen from the *kṣetra* in Figure 1.4.

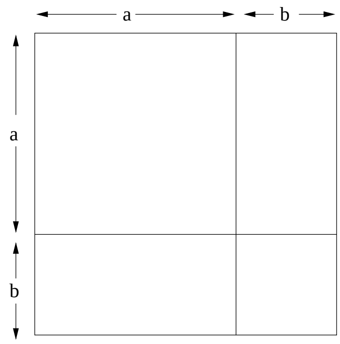


Figure 1.4: Square of a sum.

The square of a number such as 123 can be obtained by successively partitioning the number as follows.

$$(123)^2 = (100 + 23)^2 = (100)^2 + 2 \times 100 \times 23 + (23)^2$$

$$(23)^2 = (20 + 3)^2 = (20)^2 + 2 \times 20 \times 3 + 3^2.$$

This can be seen from the *kṣetra* in Figure 1.5 where, for the sake of convenience, we have displayed the square $(12 + 8 + 5)^2$.

1.8.3 Third method of squaring

Let a number be divided into the sum of two components $a + b$. Then its square is given by

$$(a + b)^2 = 4ab + (a - b)^2. \tag{1.8}$$

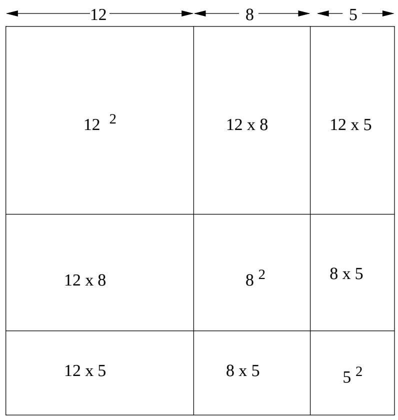


Figure 1.5: Square of a triple sum.

This can be seen from the *kṣetra* in Figure 1.6. In the square of side $a + b$, four rectangles of sides a,b are placed as shown. This leaves a central square of side $a - b$.

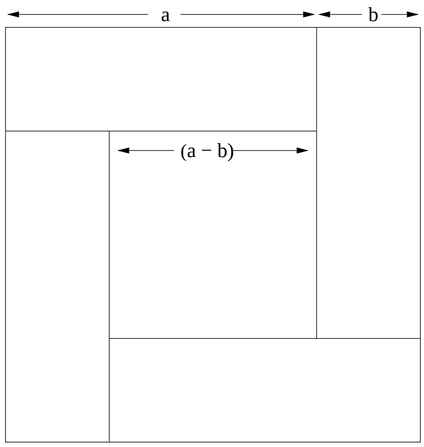


Figure 1.6: Third method of squaring.

Since it has already been shown that

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

it follows that

$$a^2 + b^2 = 2ab + (a - b)^2. \tag{1.9}$$

1.8.4 *Bhujā-koṭi-karṇa-nyāya*

Now it can be shown that the sum of the squares of the sides of a rectangle is equal to the square of its diagonal. This result (the so called Pythagoras Theorem) is referred to as the *Bhujā-koṭi-karṇa-nyāya*. For this consider the *kṣetra* in Figure 1.7, which is the same as the Figure 1.6, except that we draw those diagonals of the rectangles which do not meet the corners of the (larger) square.

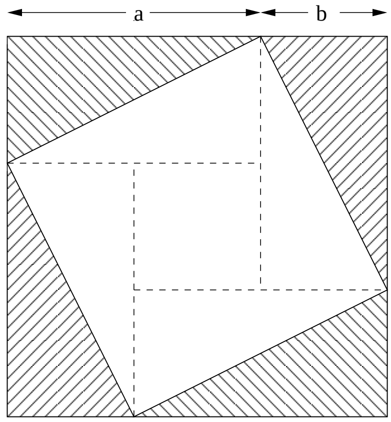


Figure 1.7: *Bhujā-koṭi-karṇa-nyāya*.

If we now cut along these diagonals, what remains is the square of the diagonal and what has been cut off are four triangles each of area $\frac{1}{2}ab$. Thus,

$$(Diagonal)^2 = (a+b)^2 - 4\left(\frac{1}{2}\right) a\, b = a^2 + b^2.$$

1.8.5 Fourth method of squaring

If it is desired to find the square of a, add and subtract from it a number b and take the product of the resulting numbers. Then the square of a can be obtained by adding the square of b to this product.

$$a^2 = (a+b)(a-b) + b^2. \tag{1.10}$$

This can be seen from the *kṣetra* in Figure 1.8.

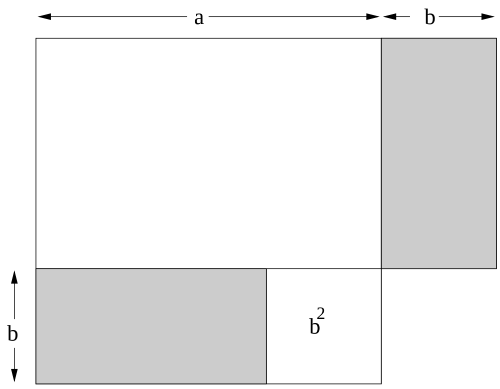


Figure 1.8: Fourth method of squaring.

1.8.6 Difference of squares of two numbers is the product of their sum and difference

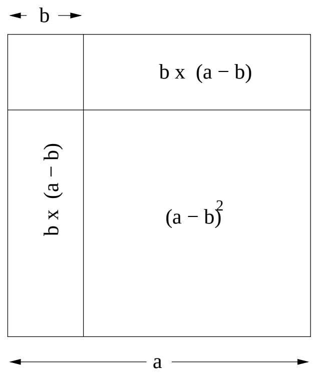


Figure 1.9: Difference of squares.

Let a be a number and b a component of it. Consider the *kṣetra* in Figure 1.9, which is similar to the one we used earlier while dicussing the method of squaring by partitioning a number into two components. We see that the difference between the squares of the larger number a and its component b is equal to the sum of the square of the difference $(a - b)$ together with the two rectangles with sides b and $a - b$. Thus

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= (a-b)^2 + 2b(a-b) \\ &= (a-b)(a-b+2b) \\ &= (a-b)(a+b). \end{aligned} \quad (1.11)$$

1.8.7 Sum of the progression of odd numbers is a square

From the above result that the difference in the squares of two numbers is the product of their sum and difference, it follows that

$$\begin{aligned} 1^2 - 0^2 &= (1+0)(1-0) = 1, \\ 2^2 - 1^2 &= (2+1)(2-1) = 3, \\ 3^2 - 2^2 &= (3+2)(3-2) = 5. \end{aligned}$$

and so on. Hence

$$\begin{aligned} 1 &= 1^2, \\ 1+3 &= 2^2, \\ 1+3+5 &= 3^2. \end{aligned}$$

Therefore the sum of the progression of odd numbers is a square. This is an arithmetic progression with initial term 1 and common difference 2. This feature can also be seen in the corresponding *śreḍhī-kṣetra* in Figure 1.10.

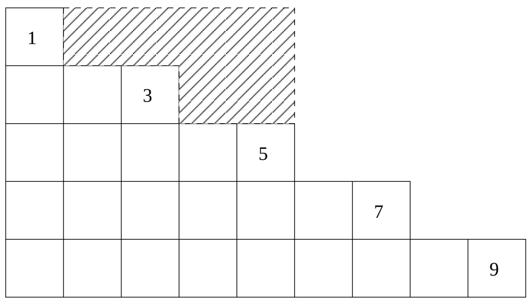


Figure 1.10: *Śreḍhī-kṣetra*.

1.9 Square-root

First, the process for calculating the square may be reformulated as follows, where the calculation starts with the first place or the last digit (instead of the last place or the first digit as was described earlier in Section 1.8.1).

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & 1 & 2 & 3 \\ \cline{3-5}
 & & 6 & 12 & 9 \\
 & 1 & 2 & & \\ \cline{2-4}
 & & 6 & 12 & 9 \\
 & 4 & 4 & & \\
1 & & & & \\ \hline
 & & 6 & 12 & 9 \\
 & 4 & 4 & & \\
1 & & & & \\ \hline
1 & 5 & 1 & 2 & 9
\end{array}
$$

Suppose that the number to be squared is 123. First, place the square of the(last) digit 3 in the first place below itself. Then, below each of the preceding digits, place twice the product of the digit with the last digit.

Then discard the last digit 3 of the number, move the rest of the digits 12 by one place above and repeat the process.

Then discard the last digit 2 and move up the remaining digit 1 by one place and repeat the process.

Adding the different results we get the value of the square
$(123)^2 = 15129$.

The process of obtaining the square-root is exactly the reverse process (*vyasta-vidhi*) of the above and is illustrated by the same example.

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & 1 & 2 & 3 \\ \hline
1 & 5 & 1 & 2 & 9 \\
1 & & & & \\ \hline
 & 5 & 1 & & \\
 & 4 & & & \\ \hline
 & 1 & 1 & & \\
 & & 4 & & \\ \hline
 & & 7 & 2 & 9 \\
 & & 7 & 2 & \\ \hline
 & & & & 9 \\
 & & & & 9 \\ \hline
\end{array}
$$

When calculating the square-root of 15129 subtract from the last odd place (1) the nearest square (1) and place its root (1) above the number in the line which will represent the square root.

Divide the next place by twice the root found so far, $2 \times 1 = 2$, and place the quotient (2) next to the first digit placed above. Subtract the square $2^2 = 4$ from the next place.

Divide the next place by twice the number at the root's place ($2 \times 12 = 24$) and place the quotient (3) as the next digit of the root. Subtract the square of the quotient ($3^2 = 9$) from the next place.

Since there are no more digits, the number found in the root's place is the square root. That is $\sqrt{15129} = 123$.

1.10 Root of sums and difference of squares

To calculate the square root of $a^2 \pm b^2$, the procedure is similar to the one stated above and involves working out a sequence of divisors. First divisor is $2a$. Divide b^2 by this and from the remainder subtract the square of the quotient. This will be the next dividend. The next divisor is $2a\pm$ twice the quotient, added or subtracted at the appropriate place. The process is to be repeated. Half the divisor at the last step is the root.

It has also been remarked that we can also think of the given number as being partitioned into sum of two squares (*sthāna-vibhāga*) and follow the above process.[1]

[1]Note that the same process can be employed for finding the root of $a^2 \pm b$, and also for calculating successive approximations to the roots.

Chapter 2

The Ten Questions and Answers

Let a and b be two numbers and, for convenience, let us assume that $a \geq b$. Let,

$$\begin{aligned} p &= a+b, \qquad q = a-b, \qquad r = ab \\ s &= a^2+b^2 \qquad t = a^2-b^2. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Given any two of the five quantities p, q, r, s, t, how to find a and b? These are the ten questions.

Qn. 1. If p, q are given then,

$$a = \frac{(p+q)}{2} \qquad and \qquad b = \frac{(p-q)}{2}. \tag{2.2}$$

Qn.2. If p, r are given, then

$$(p^2-4r)^{\frac{1}{2}} = [(a+b)^2 - 4ab]^{\frac{1}{2}} = a-b = q. \tag{2.3}$$

And, we can follow the rest of the procedure as in Qn.1 to calculate a, b from p, q.

Qn.3. If p, s are given, then

$$(2s-p^2)^{\frac{1}{2}} = [2\,(a^2+b^2) - (a+b)^2]^{\frac{1}{2}} = a-b = q. \tag{2.4}$$

And, we can follow the rest of the procedure as in Qn.1 to calculate a, b from p, q.

Qn.4. If p, t are given, then

$$\frac{t}{p} = \frac{(a^2-b^2)}{a+b} = (a-b) = q. \tag{2.5}$$

And, we can follow the rest of the procedure as in Qn.1 to calculate a, b from p, q.

Qn.5. If q, r are given, then

$$(q^2 + 4r)^{\frac{1}{2}} = [(a - b)^2 + 4ab]^{\frac{1}{2}} = a + b = p. \tag{2.6}$$

And, we can follow the rest of the procedure as in Qn.1 to calculate a, b from p, q.

Qn.6. If q, s are given, then

$$(2s - q^2)^{\frac{1}{2}} = [2(a^2 + b^2) - (a - b)^2]^{\frac{1}{2}} = a + b = p. \tag{2.7}$$

And, we can follow the rest of the procedure as in Qn.1 to calculate a, b from p, q.

Qn.7. If q, t are given, then

$$\frac{t}{q} = \frac{(a^2 - b^2)}{a - b} = (a + b) = p. \tag{2.8}$$

And, we can follow the rest of the procedure as in Qn.1 to calculate a, b from p, q.

Qn.8. If r, s are given, then first calculate

$$(s - 2r)^{\frac{1}{2}} = [(a^2 + b^2) - 2ab]^{\frac{1}{2}} = (a - b) = q. \tag{2.9}$$

Then calculate

$$(q^2 + 4r)^{\frac{1}{2}} = [(a - b)^2 + 4ab]^{\frac{1}{2}} = a + b = p. \tag{2.10}$$

And, we can follow the rest of the procedure as in Qn.1 to calculate a, b from p, q.

Qn.9. If r, t are given, then calculate

$$(t^2 + 4r^2)^{\frac{1}{2}} = [(a^2 - b^2)^2 + 4(ab)^2]^{\frac{1}{2}} = a^2 + b^2 = s. \tag{2.11}$$

Then we can follow the procedure as in Qn.1, to calculate a^2, b^2 as

$$a^2 = \frac{(s + t)}{2}, \qquad b^2 = \frac{(s - t)}{2}, \tag{2.12}$$

from which a, b can be calculated.

Qn.10. If s, t are given, then, as in Qn.9,

$$a^2 = \frac{(s+t)}{2}, \qquad b^2 = \frac{(s-t)}{2}, \tag{2.13}$$

from which a, b can be calculated.

Chapter 3

Arithmetics of Fractions

If we have to add or subtract one-fourth(denoted $\frac{1}{4}$) and one fifth (denoted $\frac{1}{5}$), we have to render them into same denomination (*savarṇana*). This is done by noting that one-fifth of one-fourth and one-fourth of one-fifth are both identical, namely one-twentieth (denoted $\frac{1}{20}$). This is represented in Figure 3.1.

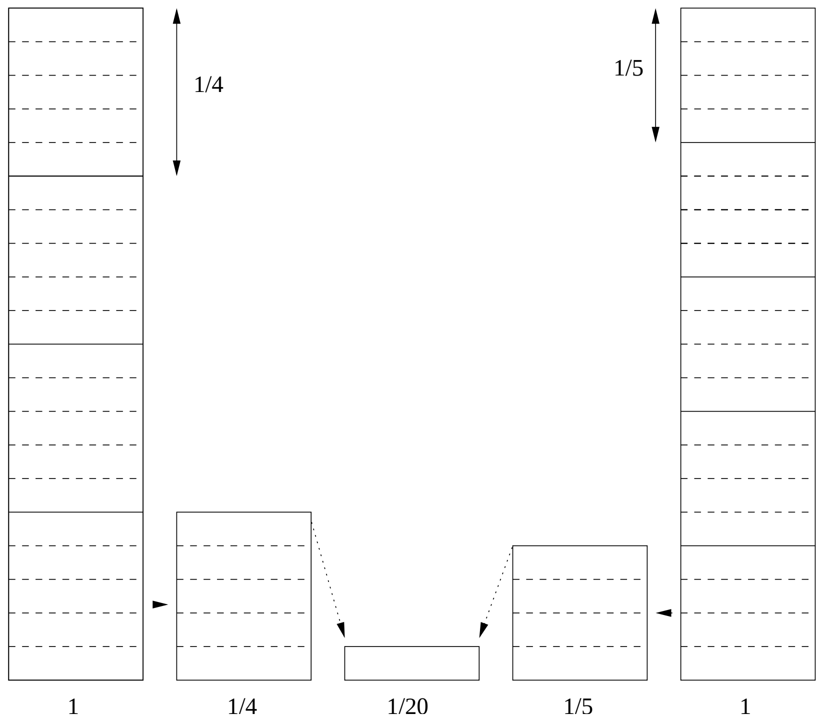


Figure 3.1: *Savarṇana*.

Thus

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{5}{20}+\frac{4}{20}=\frac{9}{20}, \tag{3.1}$$

and

$$\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{5}{20}-\frac{4}{20}=\frac{1}{20}. \tag{3.2}$$

Chapter 4

Rule of Three

4.1 Nature of rule of three

The typical problem involving the rule of three is the following: When 5 measures of paddy is known to yield 2 measures of rice (and when it is presumed that the same relation will persist always (*vyāpti*)) how many measures of rice will be obtained from 12 measures of paddy?

Here *pramāṇa* $= 5$, *pramāṇa-phala* $= 2$, *icchā* $= 12$ and we have to find the *icchā-phala*.

If for 5 measures of paddy 2 measures of rice are obtained, then for 1 measure of paddy $\frac{2}{5}$ measures of rice $(\frac{\textit{pramāṇa-phala}}{\textit{pramāṇa}})$ will be obtained. Therefore for 12 measures of paddy $12 \times \frac{2}{5} = \frac{24}{5}$ measures of rice will be obtained.

$$\textit{icchā-phala} = \frac{\textit{icchā} \times \textit{pramāṇa-phala}}{\textit{pramāṇa}}. \tag{4.1}$$

This is the rule of three.

It is said that most of mathematical computations are pervaded by *trairāśika-nyāya*, the rule of three, and *bhujā-koṭi-karṇa-nyāya*, the relation between the base, height and the diagonal of a rectangle (Pythagoras Theorem).

Chapter 5

Kuṭṭākāra

5.1 Computation of current *Kali* day

The following is the method of computing *ahargaṇa* A, the number of civil days elapsed since the beginning of *Kaliyuga* by using the rule of three twice. Let s be the number of solar years elapsed since the beginning of *Kaliyuga*, m the number of lunar months elapsed since the beginning of current solar year and d the number of civil days elapsed in the current month. Let S be the number of solar years in a *yuga*, which is also *yuga-bhagaṇa* or the number of revolutions of the Sun in a *yuga*. If M the number of lunar months in a *yuga* (which is also the difference between the *yuga-bhagaṇa*-s of the moon and the Sun), then,

$$A_m = M - 12\ S, \tag{5.1}$$

is the number of *adhimāsa*-s, intercalary months in a *yuga*, which correspond to 12 S solar months in a *yuga*. Similarly, if D is the number of civil days in a *yuga*, then

$$A_d = 30\ M - D, \tag{5.2}$$

is the *avamadina*, the number of omitted lunar days in a *yuga*, corresponding to 30 M lunar days in a *yuga*. Now, by rule of three, the number of elapsed intercalary months a_m corresponding to $12s + m$ elapsed solar months, is given by

$$a_m = \frac{(12\ s + m)A_m}{12\ S}, \tag{5.3}$$

Thus the number of elapsed lunar months is $12\ s+m+a_m$ and the number of elapsed lunar days is $30(12\ s+m+a_m)+d$. The number of elapsed omitted lunar days a_d, corresponding to the above number of lunar days, can now be obtained by rule of three as

$$a_d = \frac{[30(12\ s + m + a_m) + d]\ A_d}{30\ M}. \tag{5.4}$$

Then the *ahargaṇa* A elapsed since the beginning of *Kaliyuga* is given by[1]

$$A = 30(12\ s + m + a_m) + d - a_d. \tag{5.5}$$

5.2 Computation of mean planets

If B is the *yuga-bhagaṇa* of a planet in a *yuga*, D is the number of civil days in a *yuga* and A is the *ahargaṇa* or the number of civil days elapsed since the beginning of *Kaliyuga*, then the *bhagaṇa* L, corresponding to the mean position of the planet for this number of elapsed civil days, is given by the rule of three as

$$L = \frac{A \times B}{D}. \tag{5.6}$$

5.3 *Kuṭṭākāra* in planetary computations

5.3.1 *Bhagaṇa-śeṣa* and other remainders

When the product of the *ahargaṇa* A and the number of revolutions of the planet in a *yuga* B is divided by the number of civil days in a *yuga* D, the quotient b gives the number of completed revolutions of the planet. The remainder b_s is the *bhagaṇa-śeṣa*.

$$L = \frac{A \times B}{D} = b + \frac{b_s}{D}. \tag{5.7}$$

When this remainder (*bhagaṇa-śeṣa*) is multiplied by 12 and divided by D, the quotient r will give the number of *rāśi*-s or signs and remainder r_s is *rāśi-śeṣa*.

$$\frac{12 \times b_s}{D} = r + \frac{r_s}{D}. \tag{5.8}$$

When this remainder (*rāśi-śeṣa*) is multiplied by 30 and divided by D, the quotient a will give the number of *aṃśa* or *bhāga* or degrees and the remainder a_s is *aṃśa-śeṣa* or *bhāga-śeṣa*.

$$\frac{30 \times r_s}{D} = a + \frac{a_s}{D}. \tag{5.9}$$

[1]Note that in this computation a_m and a_d have to be taken as integers and their true values may sometimes differ from the computed values by one.

When this remainder (*aṃśa-śeṣa*) is multiplied by 60 and divided by D, the quotient k will give the number of *kalā* or minutes and the remainder k_s is the *kalā-śeṣa*.

$$\frac{60 \times a_s}{D} = k + \frac{k_s}{D}. \tag{5.10}$$

Now, given the *kalā-śeṣa* k_s, and knowing the completed revolutions b, signs r, degrees a, and minutes k, we can calculate the elapsed *ahargaṇa* A as follows. First we obtain the *aṃśa-śeṣa*

$$a_s = \frac{(D\,k + k_s)}{60}. \tag{5.11}$$

Then we calculate the *rāśi-śeṣa*

$$r_s = \frac{(D\,a + a_s)}{30}. \tag{5.12}$$

Then we calculate the *bhagaṇa-śeṣa*

$$b_s = \frac{(D\,r + r_s)}{12}. \tag{5.13}$$

From that we obtain the *Ahargaṇa*

$$A = \frac{(D\,b + b_s)}{B}. \tag{5.14}$$

5.3.2 *Kuṭṭākāra* for *Ahargaṇa*

The *kuṭṭākāra* process can be employed to find values of *ahargaṇa* A, given the value of any of the *śeṣa*-s b_s, r_s, a_s or even k_s, when the values of b, r, a and k are not known, from the condition that they are all integers. In fact, given k_s, the *kuṭṭākāra* process gives possible values of k, a, r, and b also, apart from A. The first equation to be solved is

$$\frac{(60\,a_s - k_s)}{D} = k, \tag{5.15}$$

where the dividend (*bhājya*) 60, divisor (*bhājaka*) D, and the remainder (*kṣepa*) k_s are known, and the process of *kuṭṭākāra* is used to find the desired 'multiplier' (*sādhya*, *guṇa*) a_s and also the 'result' (*labdhi*) k. The value of

a_s, thus found, is used in the next step to find $r_s,\ b_s$ and finally A by solving the following equations using the same *kuṭṭākāra* process.

$$\frac{30\ r_s - a_s}{D} = a, \tag{5.16}$$

$$\frac{12\ b_s - r_s}{D} = r, \tag{5.17}$$

$$\frac{B\ A - b_s}{D} = b. \tag{5.18}$$

In the process $a,\ r$, and b are also found apart from the *ahargaṇa* A.

5.3.3 *Bhagaṇa-śeṣa* of mean Sun

According to *Tantrasaṅgraha*, the number of revolutions of the Sun in a *yuga* S, is 43,20,000 and the number of civil days in a *yuga* D, is 157,79,17,200. On dividing both by the common factor 7,500, we get the intermediate *yuga* (*avāntarayuga*) of 576 years with 210,389 days (*tatsama* and *dhījagannūpura* in the *kaṭapayādi* notation). We shall take these reduced (*apavartita*) revolutions and civil days. Then, for *ahargaṇa* A, the completed revolutions b and *bhagaṇa-śeṣa* b_s of mean Sun, would be given by

$$\frac{(A \times 576)}{210389} = b + \frac{b_s}{210389}. \tag{5.19}$$

At the beginning of any intermediate *yuga*, since $A = 0$, the *bhagaṇa-śeṣa* $b_s = 0$; for $A = 1,\ b_s = 576$; for $A = 2,\ b_s = 2 \times 576$, and so on. After one year, for $A = 365$, since

$$365 \times 576 = 210340 = 210389 - 149, \tag{5.20}$$

the *bhagaṇa-śeṣa* $b_s = -149$, which is a negative remainder (*ūna-śeṣa*). Hence the remainder is different for every day in the intermediate *yuga*. Given a value b_s (positive or negative integer) for the *bhagaṇa-śeṣa*, the *kuṭṭākāra* process is used to find a suitable *ahargaṇa* A such that

$$\frac{(A \times 576 - b_s)}{210389} = b, \tag{5.21}$$

where b is an integer.

5.3.4 An example

Consider the case when there is a negative remainder of 100. That is

$$\frac{(A \times 576 + 100)}{210389} = b. \tag{5.22}$$

We can verify that $A = 7305$ provides a solution with $b = 20$. But how do we arrive at that?

We will have to think of reducing the problem (a systematic procedure for that, namely the *kuṭṭākāra* process, will be enunciated in the next section). For instance, we had seen that for $A = 365$, the remainder is -149. Now after three years, i.e., for $A = 1095$, the remainder will be $-3 \times 149 = -447$. Thus, for the next day, i.e., for $A = 1096$, the remainder will be $(576 - 447) = 129$. Now, since $5 \times (129 - 149) = -100$, we can see that negative remainder of -100 will be obtained for $A = 5 \times (1096 + 365) = 7305$.

5.4 *Kuṭṭākāra* process

The process can be illustrated by considering the example cited from *Līlāvatī*, 247, which is to solve for integral values of x, y, the following equation.

$$\frac{(221\ x\ + 65)}{195} = y. \tag{5.23}$$

Here 221 is the *bhājya*, 195 is the *bhājaka* (or *hāra*) and 65 is the *kṣepa*. The first step is to make *bhājya* and *hāra* mutually prime to each other (*dṛḍha*) by dividing them by their greatest common factor (*apvartāṅka*). The *apvartāṅka* is found by the process of mutual division (the so called Euclidean algorithm) to be 13.

$$\begin{array}{rrrrrrr}
195\,) & 221 & (1 & & & & \\
 & \underline{195} & & & & & \\
 & 26 &) & 195 & (7 & & \\
 & & & \underline{182} & & & \\
 & & & 13 &) & 26 & (2 \\
 & & & & & \underline{26} & \\
 & & & & & 0 &
\end{array}$$

Now dividing *bhājya*, *hāra* and *kṣepa* by this (*apvartāṅka*), we get the *dṛḍha-bhājya*, *hāra* and *kṣepa* to be 17, 15 and 5 respectively. Thus, the problem is reduced to the solution of the equation

$$\frac{(17x+5)}{15} = y.$$

Now by mutually dividing the *dṛḍha-bhājya* and *hāra*, the *vallī* (or column) of quotients (which are the same as before) is formed, below which are set the *kṣepa* 5 and zero.

$$\begin{array}{llll} 15\ ) & 17 & (1 & \\ & \underline{15} & & \\ & 2) & 15 & (7 \\ & & \underline{14} & \\ & & 1 & \end{array}$$

The penultimate number 5 is multiplied by the number above 7 and the last number 0 added to it and this result 35 is put in the place of the number (7) above the penultimate number. The last number 0 is discarded. The process is repeated till only two numbers 40, 35 are left in the *vallī*.

$$\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 40 \\ 7 & 35 & 35 \\ 5 & 5 & \\ 0 & & \end{array}$$

$$5 \times 7 + 0 = 35$$
$$35 \times 7 + 5 = 40$$

Since the number of quotients is even,[2] we abrade 40 by reduced dividend 17 and 35 by reduced divisor 15 to get *labdhi*, $y = 6$ and the *guṇa*, $x = 5$.

$$40 = 2 \times 17 + 6$$
$$35 = 2 \times 15 + 5$$

$$y = 6$$
$$x = 5$$

5.4.1 The process of *apavartana*

When we mutually divide two numbers, we can easily see that the remainder at any stage is such that any common factor of the two numbers divides the remainder also. Further, if the last remainder divides the previous remainder, then it also divides the remainder previous to that and so on. Hence, the greatest common factor (*apavartāṅka*) of two members can be obtained as the last (non-zero) remainder in the process of mutual division.

[2]When the number of quotients is odd, the *labdhi* and *guṇa* found this way have to be deducted from the corresponding reduced dividend and divisor.

From the *kuṭṭaka* equation (5.23), it is also clear that, for the problem to have any solution, the *kṣepa* will have to be divisible by this greatest common factor of the dividend and divisor. In our equation with dividend 221 and divisor 195, the *kṣepa* 65 is alright as it is divisible by the greatest common factor 13 of the dividend and the divisor.

5.4.4 Derivation of *guṇa* and *labdhi*

To understand the process by which the values of *guṇa* x and *labdhi* y were obtained in the above example (5.23), let us form two sequences: One involving the final two terms 40, 35, left in the *vallī*, and the last terms which have been discarded in the process, namely 5, 0 in our example. The other sequence is made up of the dividend 17, divisor 15 and the successive remainders in mutual division, namely 2, 1.

40	17
35	15
5	2
0	1

In the first sequence, the odd terms from below 0, 35 are the *guṇa* and the even terms 5, 40 are the *labdhi*. And, correspondingly, the odd terms of the second sequence 1, 15 are the divisors and the even terms 2, 17 are the dividends. Thus we have[3]

$$\begin{aligned} \frac{(2 \times 0 + 5)}{1} &= 5, \\ \frac{(2 \times 35 + 5)}{15} &= 5, \\ \frac{(17 \times 35 + 5)}{15} &= 40. \end{aligned}$$

[3]A more detailed demonstration (*upapatti*) of the *kuṭṭaka* process along these lines is given in the commentary *Bījanavāṅkurā* on *Bījagaṇita* of Bhāskarācārya by Kṛṣṇa Daivajña, who shows that the last two terms of the *vallī*, at each successive stage, correspond to the *labdhi* and *guṇa* when the dividend and the divisor are given by successive remainders (starting in the reverse from the end), which are obtained in the mutual division of the original divisor and the dividend. A translation of this *upapatti* is given in Appendix B of the Epilogue.

5.4.5 *Kuṭṭākāra* for mean Sun

Now is considered the *kuṭṭākāra* for the mean Sun, taking the *ṛṇa-kṣepa* to be equal to 1. First, consider the equation,

$$\frac{(576\,x-1)}{210389}=y, \tag{5.24}$$

which is the same as

$$\frac{(210389\,y+1)}{576}=x. \tag{5.25}$$

By mutual division of 210389 and 576 the *vallī* is constructed as shown below, and we have the solution $y=259$ and $x=94602$.

$$\begin{array}{rlrlrlrlrlrlrl}
576 &) & 210389 & (365 & & & & & & & & & & \\
 & & \underline{210389} & & & & & & & & & & & \\
 & & 149 &) & 576 & (3 & & & & & & & & \\
 & & & & \underline{467} & & & & & & & & & \\
 & & & & 129 &) & 149 & (1 & & & & & & \\
 & & & & & & \underline{129} & & & & & & & \\
 & & & & & & 20 &) & 129 & (6 & & & & \\
 & & & & & & & & \underline{120} & & & & & \\
 & & & & & & & & 9 &) & 20 & (2 & & \\
 & & & & & & & & & & \underline{18} & & & \\
 & & & & & & & & & & 2 &) & 9 & (4 \\
 & & & & & & & & & & & & \underline{8} & \\
 & & & & & & & & & & & & 1 &
\end{array}$$

365	365	365	365	365	365	94602
3	3	3	3	3	259	259
1	1	1	1	67	67	
6	6	6	58	58		
2	2	9	9			
4	4	4				
1	1					
0						

If we look at the two sequences mentioned above, namely, one formed by the divisor, dividend and the sequence of remainders viewed as divisors and dividends and the other formed by the last entry in each row of the *vallī*, viewed as *guṇa* and *labdhi*, we get the sequence of relations:

94602	210389
259	576
67	149
58	129
9	20
4	9
1	2
0	1

$$
\begin{aligned}
\tfrac{(1\times 1)-1}{2} &= 0\\
\tfrac{(9\times 1)-1}{2} &= 4\\
\tfrac{(9\times 9)-1}{20} &= 4\\
\tfrac{(129\times 9)-1}{20} &= 58\\
\tfrac{(129\times 67)-1}{149} &= 58\\
\tfrac{(576\times 67)-1}{149} &= 259\\
\tfrac{(576\times 94602)-1}{210389} &= 259
\end{aligned}
$$

Similarly, we can solve the *kuṭṭākāra* for the mean Sun with *kṣepa* 1, namely

$$\frac{(576x+1)}{210389} = y, \tag{5.26}$$

and obtain $x = 115787$ and $y = 317$.[4]

[4]The importance of these solutions for *kṣepa* 1 is that the solutions for the equation with arbitrary *kṣepa* k, namely $\frac{(576x+k)}{210389} = y$, can be found right away as $x = 115787\ k$, and $y = 317\ k$, in terms of the solutions of the equation (5.26) where *kṣepa* is 1.

Chapter 6

Circle and Circumference

6.1 *Bhujā*^{2} + *Koṭi*^{2} = *Karṇa*^{2}

In any rectangle, the longer side (taken as the lateral side) is the *koṭi* and the shorter side (taken as the vertical side) is the *bhujā*. Then the square of the *karṇa*, the diagonal, is equal to the sum of the squares of the *bhujā* and the *koṭi*.

In order to prove this *bhujā-koṭi-karṇa-nyāya*, consider Figure 6.1. Here $ABCD$ and $BPQR$, are squares with sides equal to the *bhujā* and *koṭi* respectively. The square $BPQR$ is placed on the south such that the eastern sides of both the squares fall on the same line and the south side of the *bhujā*-square lies along the north side of the *koṭi*-square. As stated above, it is assumed that the *bhujā* is smaller than the *koṭi*.

Mark M on AP such that

$$AM = BP = \textit{Koṭi}.$$

Hence

$$MP = AB = \textit{Bhujā}, \qquad \text{and} \qquad MD = MQ = \textit{Karṇa}.$$

Cut along MD and MQ, such that the triangles AMD and PMQ just cling at D, Q respectively. Turn them around to coincide with DCT and QRT. Thus is formed the square $DTQM$, with its side equal to the *karṇa*. It is thus seen that

$$\begin{aligned} \textit{Karṇa}\text{-square } DTQM = \textit{Bhujā}\text{-square } ABCD \\ + \textit{Koṭi}\text{-square } BPQR. \end{aligned} \tag{6.1}$$

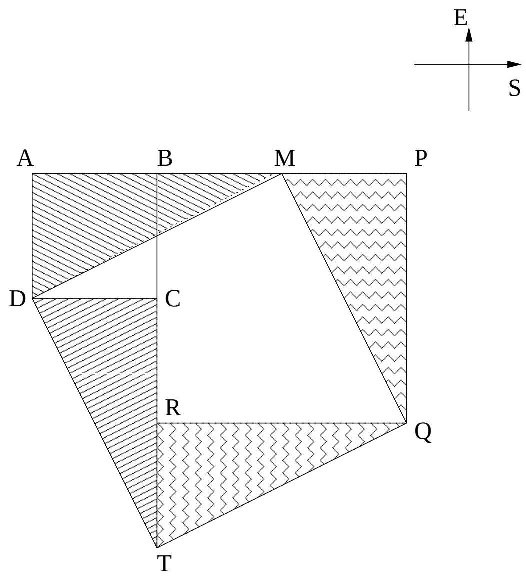


Figure 6.1: *Bhujā-koṭi-karṇa-nyāya.*

6.2 Circumference of a circle approximated by regular polygons

In Figure 6.2 we show the quadrant OEA_1S of the square which circumscribes a circle of radius $r = OE$. OE is the east line and OS the south line. OA_1 is the *karṇa*, the diagonal or hypotenuse joining the centre to the south-east corner, which meets the circle at C_1. ES is the other diagonal which meets (and bisects) the diagonal OA_1 perpendicularly at D_1. Here, we denote half the side of the circumscribing square by l_1 and the *karṇa* by k_1. That is,

$$l_1 = OE = A_1E = r. \tag{6.2}$$

$$k_1 = OA_1 = \sqrt{2}r. \tag{6.3}$$

In the triangle OA_1E, the diagonal OA_1 can be thought of to be the base (*bhūmi*), then OE and EA_1 will be the sides (*bhujā*), ED_1 will be the altitude (*lamba*), and OD_1 and A_1D_1 will be the base-segments (*ābādhā*). In this case, the base-segments are both equal to

$$a_1 = A_1D_1 = \frac{k_1}{2} = \frac{r}{\sqrt{2}}. \tag{6.4}$$

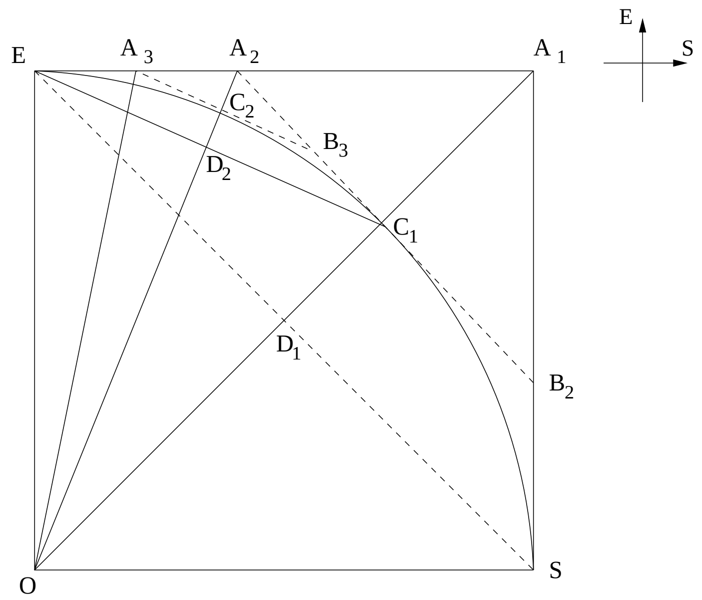


Figure 6.2: Circumference approximated by regular polygons.

Let A_2 be the point on A_1E such that C_1A_2 is parallel to ED_1. Now A_1A_2 is determined by the rule of three (based on the similarity of the triangles $A_1A_2C_1$ and A_1ED_1):

$$A_1A_2 = (A_1C_1)\left(\frac{A_1E}{A_1D_1}\right) = (k_1 - r)\left(\frac{l_1}{a_1}\right). \tag{6.5}$$

Mark the point B_2 on A_1S such that $A_1A_2 = A_1B_2$. If we cut along A_2B_2, then the side of a circumscribing regular octagon will result. Half the side of this circumscribing regular octagon, $A_2C_1 = EA_2 = l_2$, is given by

$$\begin{aligned} l_2 = A_2E &= A_1E - A_1A_2 \\ &= l_1 - (k_1 - r)\left(\frac{l_1}{a_1}\right). \end{aligned} \tag{6.6}$$

Join OA_2, the diagonal to the corner of octagon, and let it meet the circle at C_2. Now, in the triangle OA_2E the diagonal OA_2 can be thought of to be the base (*bhūmi*), then OE and EA_2 will be the sides (*bhujā*), ED_2 will be the altitude (*lamba*), and OD_2 and A_2D_2 will be the base-segments (*ābādhā*). The *karṇa*, $k_2 = OA_2$, is found from

$$k_2^2 = (OE)^2 + (EA_2)^2 = r^2 + l_2^2. \tag{6.7}$$

The smaller base-segment, $a_2 = A_2D_2$, can be found as follows. Since ED_2 is the perpendicular (*lamba*) to the base OA_2, from the *bhujā-koṭi-karṇa-nyāya* we have

$$\begin{aligned} (EA_2)^2 - (A_2D_2)^2 &= (OE)^2 - (OD_2)^2 \\ &= (ED_2)^2. \end{aligned} \tag{6.8}$$

Therefore, the difference of the squares of the *ābādhā*-s is equal to the difference of the squares of the *bhujā*-s. That is

$$(OD_2)^2 - (A_2D_2)^2 = (OE)^2 - (EA_2)^2. \tag{6.9}$$

Since the sum of the *ābādhā*-s is equal to the *karṇa*

$$OD_2 + A_2D_2 = OA_2 = k_2, \tag{6.10}$$

we get

$$\begin{aligned} OD_2 - A_2D_2 &= \frac{(OD_2)^2 - (A_2D_2)^2}{OD_2 + A_2D_2} \\ &= \frac{(OE)^2 - (EA_2)^2}{OA_2} \\ &= \frac{(r^2 - l_2^2)}{k_2}. \end{aligned} \tag{6.11}$$

Hence

$$a_2 = A_2D_2 = \frac{\left(k_2 - \dfrac{(r^2 - l_2^2)}{k_2}\right)}{2}. \tag{6.12}$$

Let A_3 be the point on A_1E such that C_2A_3 is parallel to ED_2. Now A_2A_3 is determined by the rule of three (based on the similarity of the traingles $A_2A_3C_2$ and A_2ED_2):

$$A_2A_3 = (A_2C_2)\left(\frac{A_2E}{A_2D_2}\right) = (k_2 - r)\left(\frac{l_2}{a_2}\right). \tag{6.13}$$

Then, half the side of the circumscribing sixteen-sided regular polygon, $EA_3 = l_3$, is given by

$$\begin{aligned} l_3 = A_3E &= A_2E - A_2A_3 \\ &= l_2 - (k_2 - r)\left(\frac{l_2}{a_2}\right). \end{aligned} \tag{6.14}$$

Following the same sequence of steps, we can calculate half the side of the circumscribing 32-sided regular polygon, l_4 and so on.[1]

Knowing the side of a circumscribing regular polygon, we can find its perimeter. It is said that when the number of corners of the polygon is increased indefinitely up to uncountable (*asaṅkhyā*), the resulting figure will essentially be the circle (*vṛtta-prāya*). Thus the circumference of the circle with the given diameter can be found. It is also stated that the circumference of any arbitrary circle can be determined this way, using the proportionality between the circumference and the diameter.

6.3 Circumference of a circle without calculating square-roots

6.3.1 Dividing the circumference into arc-bits: Approximating the arc-bits by *Jyārdha*-s (Rsines)

In Figure 6.3 we show the quadrant $OEAS$ of the square which circumscribes a circle of radius $r = OE$. OE is the east line and OS the south line. Divide the tangent EA into n equal parts by marking the points $A_o \equiv E,\ A_1,\ A_2....A_n \equiv A$, at equal distances given by,

$$\frac{EA}{n} = \frac{r}{n}.$$

It is noted that more the number of points (larger the n), more accurate will be the circumference determined by this method.

[1] If we have already calculated l_n, half the side of the circumscribing regular polygon of 2^{n+1} sides (and also k_{n-1}, a_{n-1}, the previous *karṇa* and base-segment), then we can calculate l_{n+1} (and $k_n,\ a_n$) using the relations:

$$\begin{aligned} k_n^2 &= r^2 + l_n^2, \\ a_n &= \frac{\left[k_n - (\frac{r^2 - l_n^2}{k_n})\right]}{2}, \\ l_{n+1} &= l_n - (k_n - r)\left(\frac{l_n}{a_n}\right). \end{aligned}$$

These lead to the simple recursion relation $l_{n+1} = \frac{r}{l_n}[\sqrt{(r^2 + l_n^2)} - r]$, with the initial condition $l_1 = r$.

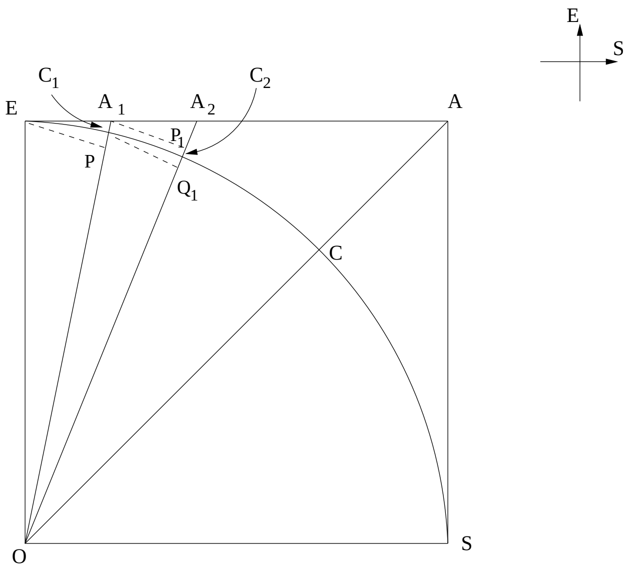


Figure 6.3: Dividing the circumference into arc-bits.

Join the hypotenuses *karṇa*-s $OA_1,\ OA_2, \ldots OA_n \equiv OA$, and let them meet the circle at $C_1,\ C_2, \ldots C_n \equiv C$. The quadrant of the circle is divided into n arc-bits, $EC_1,\ C_1C_2, \ldots C_{n-1}C_n$, which lie between successive hypotenuses. Each of the *karṇa*-s, $k_i = OA_i$, is given by

$$\begin{aligned} k_i^2 = OA_i^2 &= OE^2 + EA_i^2 \\ &= r^2 + \left(\frac{ir}{n}\right)^2. \end{aligned} \tag{6.15}$$

Draw the perpendicular EP from the east point E to the first hypotenuse OA_1. The triangles EPA_1 and OEA_1 are similar. Hence

$$\frac{EP}{EA_1} = \frac{OE}{OA_1}. \tag{6.16}$$

Therefore

$$EP = EA_1 \times \frac{OE}{OA_1} = \left(\frac{r}{n}\right)\left(\frac{r}{k_1}\right). \tag{6.17}$$

The similarity of the triangles EPA_1 and OEA_1 can be understood by noting that the *karṇa* of one triangle is parallel to the *bhujā* of the other and vice versa, and the *karṇa* of one is perpendicular to the *koṭi* of the other and vice versa. It is also illustrated by considering the junction of the slanting beam and the joining tie in the roof of a square hall *maṇḍapa* as in Figure 6.4.

Now, draw the perpendicular A_1P_1 from the tip A_1 of the first hypotenuse to the second hypotenuse OA_2. Again the triangles $A_1P_1A_2$ and OEA_2 are similar. Hence

$$\frac{A_1P_1}{A_1A_2} = \frac{OE}{OA_2}. \tag{6.18}$$

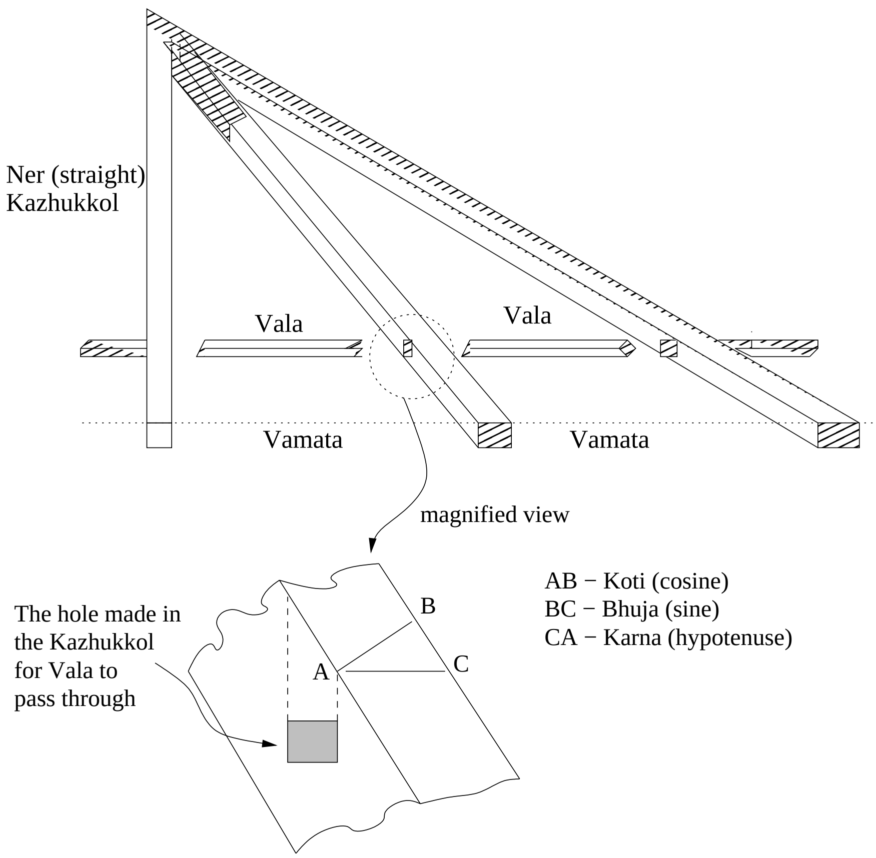


Figure 6.4: Slanting beam and joining tie in a *Maṇṭapa*.

Therefore

$$\begin{aligned} A_1P_1 &= A_1A_2 \times \frac{OE}{OA_2} \\ &= A_1A_2 \times \left(\frac{r}{k_2}\right) \\ &= \left(\frac{r}{n}\right)\left(\frac{r}{k_2}\right). \end{aligned} \tag{6.19}$$

Now, draw the perpendicular C_1Q_1 from the point C_1 where the first hypotenuse meets the circle to the second hypotenuse OA_2. The triangle OC_1Q_1 which lies inside the circle is similar to the triangle OA_1P_1. Hence $C_1Q_1 = b_1$, which is also the *jyārdha* (Rsine) of the arc-bit C_1C_2, is given by

$$\begin{aligned} b_1 = C_1Q_1 &= A_1P_1 \times \frac{OC_1}{OA_1} \\ &= A_1A_2\left(\frac{r}{k_2}\right) \times \left(\frac{r}{k_1}\right) \\ &= \left(\frac{r}{n}\right)\left(\frac{r^2}{k_1k_2}\right). \end{aligned} \tag{6.20}$$

Similarly, it can be shown that the *jyārdha* or Rsine, $b_i = C_iQ_i$, of the arc-bit C_iC_{i+1}, is given by the corresponding segment A_iA_{i+1} of the side of the square multiplied by the square of the radius and divided by the product of the two diagonals (OA_i and OA_{i+1}) meeting the ends of the segment. For this, first the perpendicular distance $d_i = A_iP_i$, from the tip of the hypotenuse OA_i to the hypotenuse OA_{i+1}, is calculated using the fact that the triangles $A_iP_iA_{i+1}$ and OEA_{i+1} are similar (see Figure 6.5):

$$\begin{aligned} d_i = A_iP_i &= A_iA_{i+1} \times \frac{OE}{OA_{i+1}} \\ &= A_iA_{i+1}\left(\frac{r}{k_{i+1}}\right) \\ &= \left(\frac{r}{n}\right)\left(\frac{r}{k_{i+1}}\right). \end{aligned} \tag{6.21}$$

Then the Rsine, $b_i = C_iQ_i$, is calculated using the fact that the triangles OC_iQ_i and OA_iP_i are similar

$$\begin{aligned} b_i = C_iQ_i &= A_iP_i \times \frac{OC_i}{OA_i} \\ &= A_iA_{i+1}\left(\frac{r}{k_{i+1}}\right) \times \left(\frac{r}{k_i}\right) \\ &= \left(\frac{r}{n}\right)\left(\frac{r^2}{k_ik_{i+1}}\right). \end{aligned} \tag{6.22}$$

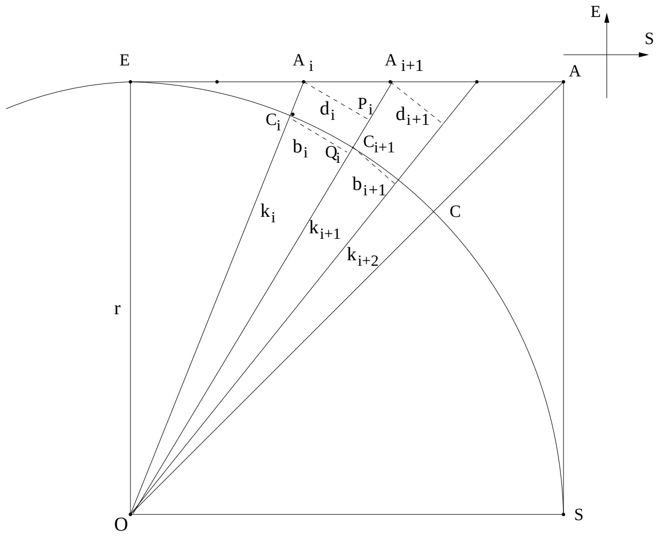


Figure 6.5: Circumference approximated by Rsines.

6.3.2 Circumference in terms of the *Karṇa*-s (hypotenuses)

It is said that when the size $\left(\frac{r}{n}\right)$ of the equal segments into which the side of the square is divided is very small (n is very large), then these Rsines will be almost the same as the arc-bits. Then, one-eighth the circumference of the circle (the arc EC, between the first and last hypotenuses) can be approximated by the sum of the Rsines

$$\begin{aligned} \frac{C}{8} &\approx b_o + b_1 + \ldots + b_{n-1} \\ &= \left(\frac{r}{n}\right)\left[\left(\frac{r^2}{k_o k_1}\right) + \left(\frac{r^2}{k_1 k_2}\right) + \ldots + \left(\frac{r^2}{k_{n-1} k_n}\right)\right], \end{aligned} \tag{6.23}$$

where $b_o = EP$ is the Rsine of arc-bit EC_1 and $k_o = r$. When n is very large,

$$k_i \approx k_{i+1}, \tag{6.24}$$

and hence

$$\frac{1}{(k_i k_{i+1})} \approx \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k_i^2} + \frac{1}{k_{i+1}^2}\right). \tag{6.25}$$

Hence, the above expression for one-eighth the circumference of the circle becomes

$$\begin{aligned}\frac{C}{8} \;\approx\; & \left(\frac{r}{n}\right) r^2 \left(\frac{1}{2}\right) \left[\left(\frac{1}{k_0^2} + \frac{1}{k_1^2}\right) + \left(\frac{1}{k_1^2} + \frac{1}{k_2^2}\right) + \ldots \right. \\ & \left. \ldots + \left(\frac{1}{k_{n-1}^2} + \frac{1}{k_n^2}\right) \right]. \end{aligned} \tag{6.26}$$

We have already noted that the first hypotenuse $k_0 = r$, and it can be easily seen that the last hypotenuse is given by $k_n^2 = 2r^2$. Now, when n is very large, the above expression (6.26) simplifies to

$$\frac{C}{8} \approx \left(\frac{r}{n}\right) \left[\left(\frac{r^2}{k_1^2}\right) + \left(\frac{r^2}{k_2^2}\right) + \left(\frac{r^2}{k_3^2}\right) + \ldots + \left(\frac{r^2}{k_n^2}\right) \right], \tag{6.27}$$

as the two expressions (6.26) and (6.27) differ by the amount

$$\begin{aligned} \left(\frac{r}{n}\right) \left(\frac{1}{2}\right) \left[\left(\frac{r^2}{k_o^2}\right) - \left(\frac{r^2}{k_n^2}\right) \right] &= \left(\frac{r}{n}\right) \left(\frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{2}\right) \\ &= \left(\frac{r}{n}\right) \left(\frac{1}{4}\right), \end{aligned} \tag{6.28}$$

which becomes negligible when n is large.

6.3.3 *Śodhya-phala*-s: Iterative corrections

As we have seen above, each of the Rsines b_i of the arc-bits is approximated by

$$b_i = \left(\frac{r}{n}\right) \left(\frac{r^2}{k_{i+1}^2}\right). \tag{6.29}$$

Thus the segment $\left(\frac{r}{n}\right)$ is multiplied by the "multiplier", namely the square of the radius, and divided by the "divisor", namely the square of the hypotenuse. Here the divisors, the *karṇa*-s k_i^2 given by (6.15), are larger than or equal to the multiplier r^2. This division can be expressed as a sequence of iterative corrections *śodhya-phala*-s as shown below.

Consider the product $a\left(\frac{c}{b}\right)$, where some quantity a is multiplied by the multiplier c, and divided by the divisor b, which is larger than the multiplier

c. We first rewrite this product in the following form

$$a\left(\frac{c}{b}\right) = a - a\,\frac{(b-c)}{b}. \tag{6.30}$$

Now, if in the expression $\left(\frac{b-c}{b}\right)$ we want to replace the division by b (the divisor) by division by c (the multiplier), then we have to make a subtractive correction (*śodhya-phala*)

$$\frac{(b-c)}{b} = \frac{(b-c)}{c} - \frac{(b-c)}{c}\;\frac{(b-c)}{b}. \tag{6.31}$$

Thus our original relation (6.30) becomes

$$a\left(\frac{c}{b}\right) = a - \left[a\frac{(b-c)}{c} - \left(a\frac{(b-c)}{c}\right)\frac{(b-c)}{b}\right]. \tag{6.32}$$

Now in the second correction term in (6.32), if we again replace the division by the divisor b, by the multiplier c, then we have to employ the relation (6.31) to get another subtractive term

$$a\left(\frac{c}{b}\right) = a - a\frac{(b-c)}{c} + a\left[\frac{(b-c)}{c}\right]^2 - a\left[\frac{(b-c)}{c}\right]^2\frac{(b-c)}{b}. \tag{6.33}$$

Thus, after taking m *śodhya-phala*-s we get

$$\begin{aligned} a\left(\frac{c}{b}\right) \;&=\; a - a\frac{(b-c)}{c} + a\left[\frac{(b-c)}{c}\right]^2 - \ldots + (-1)^{m-1}a\left[\frac{(b-c)}{c}\right]^{m-1} \\ &\quad +(-1)^m a\left[\frac{(b-c)}{c}\right]^{m-1}\frac{(b-c)}{b}. \end{aligned} \tag{6.34}$$

It is stated that if we keep on dividing only by the multiplier c, then there will be no end to these correction terms (*phala-paramparā*). It is also said that when the correction term becomes very small they can be discarded.[2]

[2] The resulting infinite series expansion is convergent for $0 \leq b-c < c$, which condition is satisfied in our case where $b = k_i^2$ and $c = r^2$, as they satisfy $r^2 \leq k_i^2 < 2r^2$ for $0 \leq i < n$. For the same reason, the correction terms in (6.34) become very small when m becomes very large. If we set $\frac{(b-c)}{c} = x$, then $\frac{c}{b} = \frac{1}{(1+x)}$. Hence, what is given above is the binominal series for $(1+x)^{-1}$ which is convergent for $-1 < x < 1$.

6.3.4 *Phala-yoga*-s and their series: *Phala-paramparā*

Using the above method, each of the Rsines of the arc-bits can now be expressed as

$$\begin{aligned} b_{i-1} &= \left(\frac{r}{n}\right)\left(\frac{r^2}{k_i^2}\right) \\ &= \left(\frac{r}{n}\right)\left[\frac{r^2}{\left(r^2+\left(\frac{ir}{n}\right)^2\right)}\right] \\ &= \left(\frac{r}{n}\right) - \left(\frac{r}{n}\right)\frac{1}{r^2}\left(\frac{ir}{n}\right)^2 + \ldots + (-1)^m\left(\frac{r}{n}\right)\frac{1}{r^{2m}}\left(\frac{ir}{n}\right)^{2m} \\ &\quad + \ldots \ . \end{aligned} \tag{6.35}$$

Now using this expansion for the Rsines in the expression for one-eighth of the circumference and keeping terms with the same powers of $\left(\frac{r}{n}\right)$ together, we get

$$\begin{aligned} \frac{C}{8} &= b_o + b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-1} \\ &= \left(\frac{r}{n}\right)[1+1+\ldots+1] \\ &\quad -\left(\frac{r}{n}\right)\left(\frac{1}{r^2}\right)\left[\left(\frac{r}{n}\right)^2+\left(\frac{2r}{n}\right)^2+\ldots+\left(\frac{nr}{n}\right)^2\right] \\ &\quad +\left(\frac{r}{n}\right)\left(\frac{1}{r^4}\right)\left[\left(\frac{r}{n}\right)^4+\left(\frac{2r}{n}\right)^4+\ldots+\left(\frac{nr}{n}\right)^4\right] \\ &\quad -\left(\frac{r}{n}\right)\left(\frac{1}{r^6}\right)\left[\left(\frac{r}{n}\right)^6+\left(\frac{2r}{n}\right)^6+\ldots+\left(\frac{nr}{n}\right)^6\right] \\ &\quad +\ldots \ . \end{aligned} \tag{6.36}$$

Each of the terms in (6.36) is a sum of results (*phala-yoga*) which we need to calculate when n is very large, and we have a series of them (*phala-paramparā*) which are alternatively positive and negative. Clearly the first term is just the sum of the *bhujā-khaṇḍa*-s, the bits into which the tangent or the eastern side of the square, of side equal to radius r was divided. Thus the first term is equal to the radius r. The next summation will involve *bhujā-varga-saṅkalita*, the sum of the squares of the *bhujā*-s or portions of the side of the square, increasing by one bit at a time. The next *phala-yoga* will involve *bhujā-varga-varga-saṅkalita* or sum of fourth powers of the *bhujā*-s and so on.

It is said that for the sake of accuracy (*sūkṣmatā*) of the result, the *bhujā-khaṇḍas* $\frac{r}{n}$, will have to be infinitesimal (*aṇu-parimāṇa*). It will be shown in Section 6.4 that when n is large, the successive sums (*phala-yoga*) are $\frac{r}{3}$, $\frac{r}{5}$, and so on. This leads to the expression for the circumference

$$\frac{C}{8} = r - \frac{r}{3} + \frac{r}{5} - \dots \ . \tag{6.37}$$

Or, equivalently if d is the diameter of the circle

$$C = 4d\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots\right). \tag{6.38}$$

which is the result enunciated in the verse of Mādhava, *vyāse vāridhinihate...* (cited also in *Yuktidīpikā* II. 271).[3]

6.3.6 *Śodhya-phala*-s : An example

Here, an example is given of how the iterative subtractive corrections can be obtained. The basic identity that is iterated is of the form

$$\frac{a}{b} = \left(\frac{a}{c}\right) - \left(\frac{a}{b}\right)\frac{(b-c)}{c}. \tag{6.39}$$

Here, if in the second term we divide by the "multiplier" c, instead of the "divisor" b, we have to subtract the next subtractive term

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{c} - \left[\left(\frac{a}{c}\right)\left(\frac{(b-c)}{c}\right) - \left(\frac{a}{c}\right)\left(\frac{(b-c)}{c}\right)\left(\frac{(b-c)}{b}\right)\right], \tag{6.40}$$

and so on. In the example given, $a = 100$, the divisor $b = 10$ and the multiplier $c = 8$. First it is noted that

$$\frac{100}{10} = \frac{100}{8} - \left(\frac{100}{10}\right)\left(\frac{(10-8)}{8}\right). \tag{6.41}$$

[3] This and several verses of Mādhava, which have been cited in *Yuktibhāṣā*, have also been cited by Śaṅkara in his commentary *Yuktidīpikā* on *Tantrasaṅgraha*. It may however be noted that *Yuktidīpikā* declares, at the end of each Chapter, that it is only presenting the subject as expounded by Jyeṣṭhadeva (in *Yuktibhāṣā*).

Then it is noted that if in the second term we take $\frac{100}{8}$ instead of $\frac{100}{10}$, then the second term becomes $\frac{25}{8}$ instead of $\frac{25}{10}$. So the subtraction is in excess and is to be *śodhya*, further reduced. Then it is explained that we get back the correct correction $\frac{25}{10}$, by subtracting from $\frac{25}{8}$ the product of that with $\frac{(10-8)}{10}$. Thus

$$\frac{100}{10} = \frac{100}{8} - \frac{100}{8}\left(\frac{(10-8)}{8}\right)\left[1 - \left(\frac{(10-8)}{10}\right)\right], \tag{6.42}$$

and so on.

6.4 *Saṅkalita*: Summation of series

The *bhujā-khaṇḍa*-s, the bits into which the tangent or the eastern side of the square of side equal to radius r was divided, are all equal to $\frac{r}{n}$. The *bhujā*-s are given by its integral multiples $\frac{r}{n}, \frac{2r}{n}, \ldots \frac{nr}{n}$. In the series expression (*phala-paramparā*) derived earlier for the circumference, there occur *saṅkalita*-s or summations of even powers of the *bhujā*-s such as the *bhujā-varga-saṅkalita*, $\left(\frac{r}{n}\right)^2 + \left(\frac{2r}{n}\right)^2 + ... + \left(\frac{nr}{n}\right)^2$, *bhujā-varga-varga-saṅkalita*, $\left(\frac{r}{n}\right)^4 + \left(\frac{2r}{n}\right)^4 + ... + \left(\frac{nr}{n}\right)^4$, and so on. If we take out the powers of *bhujā-khaṇḍa* $\frac{r}{n}$, the summations involved are that of even powers of the natural numbers, namely *edādyekottara-varga-saṅkalita*, $1^2 + 2^2 + ... + n^2$, *edādyekottara-varga-varga-saṅkalita*, $1^4 + 2^4 + ... + n^4$, and so on. A method is now given to estimate for large n the *sama-ghāta-saṅkalita*, or the sum of a general series of integral powers of the natural numbers.

6.4.1 *Mūla-saṅkalita*: The sum of natural numbers

The first summation, the *bhujā-saṅkalita*, may be written in the order from the final *bhujā* to the first *bhujā* as

$$S_n^{(1)} = \left(\frac{nr}{n}\right) + \left(\frac{(n-1)r}{n}\right) + ... + \left(\frac{r}{n}\right).$$

Now, conceive of the *bhujā-khaṇḍa* $\frac{r}{n}$ as being infinitesimal (*aṇu*) and at the same time as of unit-measure (*rūpa*), so that the radius will be the measure of n, the *pada*, or the number of terms. Then

$$S_n^{(1)} = n + (n-1) + ... + 1. \tag{6.43}$$

If each of the terms were of the measure of radius (n) then the sum would be nothing but n^2, the square of the radius. But only the first term is of the measure of radius, the next is deficient by one segment (*khaṇḍa*), the next by two segments and so on till the last term which is deficient by an amount equal to radius-minus-one segment.

$$\begin{aligned} S_n^{(1)} &= n + [n-1] + [n-2].... + [n-(n-2)] + [n-(n-1)] \\ &= n.n - [1 + 2 + ... + (n-1)]. \end{aligned} \tag{6.44}$$

When n is very large, the quantity to be subtracted from n^2 is practically (*prāyeṇa*) the same as $S_n^{(1)}$, thus leading to the estimate

$$S_n^{(1)} \approx n^2 - S_n^{(1)}, \tag{6.45}$$

or, equivalently

$$S_n^{(1)} \approx \frac{n^2}{2}. \tag{6.46}$$

It is stated that the result is more accurate, the smaller the segments, or larger the value of n. In fact, the well-known exact value of the sum of the first n natural numbers

$$S_n^{(1)} = \frac{n(n+1)}{2}, \tag{6.47}$$

is also quoted as another way of justifying the above estimate when n is very large. With the convention that the $\frac{r}{n}$ is of unit-measure, the above estimate (6.46) is stated in the form that the *bhujā-saṅkalita* is half the square of the radius.

6.4.2 *Varga-saṅkalita* : Summation of squares

With the same convention that $\frac{r}{n}$ is the measure of the unit, the *bhujā-varga-saṅkalita* will be

$$S_n^{(2)} = n^2 + (n-1)^2 + ... + 1^2. \tag{6.48}$$

In above expression, each *bhujā* is multiplied by itself. If instead, we consider that each *bhujā* is multiplied by the radius (n in our units) then that would give raise to the sum

$$n\,[n + (n-1) + ... + 1] = n\, S_n^{(1)}. \tag{6.49}$$

This sum is exceeds the *bhujā-varga-saṅkalita* by the amount

$$nS_n^{(1)} - S_n^{(2)} = 1.(n-1) + 2.(n-2) + 3.(n-3) + \ldots + (n-1).1.$$

This may be written as

$$\begin{aligned} nS_n^{(1)} - S_n^{(2)} = (n-1) + (n-2) + (n-3) \quad &+ \ldots \quad +1 \\ +(n-2) + (n-3) \quad &+ \ldots \quad +1 \\ +(n-3) \quad &+ \ldots \quad +1 \\ &+ \ldots \quad . \end{aligned} \tag{6.50}$$

Thus,

$$nS_n^{(1)} - S_n^{(2)} = S_{n-1}^{(1)} + S_{n-2}^{(1)} + S_{n-3}^{(1)} + \ldots . \tag{6.51}$$

The right hand side of (6.51) is called the *saṅkalita-saṅkalita* (or *saṅkalitaikya*), the repeated sum of the sums $S_i^{(1)}$ (here taken in the order $i = n-1,\ n-2, \ldots 1$). For large n, we have already estimated in (6.46) that $S_n^{(1)} \approx \frac{n^2}{2}$. Thus, for large n

$$nS_n^{(1)} - S_n^{(2)} = \frac{(n-1)^2}{2} + \frac{(n-2)^2}{2} + \frac{(n-3)^2}{2} + \ldots . \tag{6.52}$$

Thus, the right hand side of (6.52) (the *saṅkalita-saṅkalita* or the excess of $nS_n^{(1)}$ over $S_n^{(2)}$) is essentially $\frac{S_n^{(2)}}{2}$ for large n, so that we obtain

$$nS_n^{(1)} - S_n^{(2)} \approx \frac{S_n^{(2)}}{2}. \tag{6.53}$$

Again, using the earlier estimate (6.46) for $S_n^{(1)}$, we obtain the result

$$S_n^{(2)} \approx \frac{n^3}{3}. \tag{6.54}$$

Thus *bhujā-varga-saṅkalita* is one-third the cube of the radius.

6.4.3 *Ghana-saṅkalita* and *Varga-varga-saṅkalita*: Summation of third and fourth powers

The *ghana-saṅkalita* is given by

$$S_n^{(3)} = n^3 + (n-1)^3 + \ldots + 1^3. \tag{6.55}$$

Again, when we consider by how much $n\,S_n^{(2)}$ is in excess over this, we get

$$\begin{aligned} nS_n^{(2)} - S_n^{(3)} &= 1.(n-1)^2 + 2.(n-2)^2 + 3.(n-3)^2 \ldots + (n-1).1^2 \\ &= S_{n-1}^{(2)} + S_{n-2}^{(2)} + S_{n-3}^{(2)} + \ldots \quad . \end{aligned} \tag{6.56}$$

Here again, the right hand side of (6.56) is *varga-saṅkalita-saṅkalita*, the repeated summation of the summation of squares. As the sum of squares has already been estimated in (6.54) for large n, we get

$$\begin{aligned} nS_n^{(2)} - S_n^{(3)} &\approx \frac{(n-1)^3}{3} + \frac{(n-2)^3}{3} + \frac{(n-3)^3}{3} + \ldots \\ &\approx \left(\frac{1}{3}\right) S_n^{(3)}. \end{aligned} \tag{6.57}$$

Thus we get the estimate

$$S_n^{(3)} \approx \frac{n^4}{4}. \tag{6.58}$$

Similar reasoning leads to the following estimate in the case of *varga-varga-saṅkalita*

$$S_n^{(4)} \approx \frac{n^5}{5}. \tag{6.59}$$

6.4.4 *Samaghāta-saṅkalita* : General principle of summation

Essentially the same procedure is to be followed in the case of a general *samaghāta-saṅkalita*, (summation of equal powers) given by

$$S_n^{(k)} = n^k + (n-1)^k + \ldots + 1^k. \tag{6.60}$$

We first compute the excess of $nS_n^{(k-1)}$ over $S_n^{(k)}$ to be a *saṅkalita-saṅkalita* or repeated sum of the lower order *saṅkalita*-s $S_r^{(k-1)}$

$$nS_n^{(k-1)} - S_n^{(k)} = S_{n-1}^{(k-1)} + S_{n-2}^{(k-1)} + S_{n-3}^{(k-1)} + \ldots \quad . \tag{6.61}$$

If the lower order *saṅkalita* $S_n^{(k-1)}$ has already been estimated to be, say,

$$S_n^{(k-1)} \approx \frac{n^k}{k}, \tag{6.62}$$

then, the above relation (6.61) leads to

$$\begin{aligned} nS_n^{(k-1)} - S_n^{(k)} &\approx \frac{(n-1)^k}{k} + \frac{(n-2)^k}{k} + \frac{(n-3)^k}{k} + \ldots \\ &\approx \left(\frac{1}{k}\right) S_n^{(k)}. \end{aligned} \tag{6.63}$$

Thus we obtain the estimate[4]

$$S_n^{(k)} \approx \frac{n^{k+1}}{(k+1)}. \tag{6.64}$$

6.4.5 Repeated summations

Now are discussed *saṅkalita-saṅkalita* or *saṅkalitaikya* (repeated summations). There the first summation (*ādya-saṅkalita*) $V_n^{(1)}$ is just the *mūla-saṅkalita* or the basic summation of natural numbers, which has already been estimated in (6.46)

$$\begin{aligned} V_n^{(1)} = S_n^{(1)} &= n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 1 \\ &\approx \frac{n^2}{2}. \end{aligned} \tag{6.65}$$

The second summation (*dvitīya-saṅkalita* or *saṅkalita-saṅkalita* or *saṅkalitaikya*) is given by

$$\begin{aligned} V_n^{(2)} &= V_n^{(1)} + V_{n-1}^{(1)} + V_{n-2}^{(1)} + \ldots \\ &= S_n^{(1)} + S_{n-1}^{(1)} + S_{n-2}^{(1)} + \ldots \quad . \end{aligned} \tag{6.66}$$

As was done earlier, this second summation can be estimated using the estimate for $S_n^{(1)}$

$$V_n^{(2)} \approx \frac{n^2}{2} + \frac{(n-1)^2}{2} + \frac{(n-2)^2}{2} + \ldots \quad . \tag{6.67}$$

Therefore

$$V_n^{(2)} \approx \left(\frac{1}{2}\right) S_n^{(2)}. \tag{6.68}$$

[4]These are estimates for large n. Exact expressions for $S_n^{(1)}$, $S_n^{(2)}$ and $S_n^{(3)}$, have been known in Indian mathematics for a long time and may be found, for instance, in *Āryabhaṭīya, Gaṇita*, 21-22.

Using the earlier estimate (6.54) for $S_n^{(2)}$, we get an estimate for the *dvitīya-saṅkalita*

$$V_n^{(2)} \approx \frac{n^3}{6}. \tag{6.69}$$

Now the next repeated summation can be found in the same way

$$\begin{aligned} V_n^{(3)} &= V_n^{(2)} + V_{n-1}^{(2)} + V_{n-2}^{(2)} + \dots \\ &\approx \frac{n^3}{6} + \frac{(n-1)^3}{6} + \frac{(n-2)^3}{6} + \dots \\ &\approx \left(\frac{1}{6}\right) S_n^{(3)} \\ &\approx \frac{n^4}{24}. \end{aligned} \tag{6.70}$$

It is noted that proceeding this way we can estimate repeated summation $V_n^{(k)}$ of order k, for large n, to be[5]

$$\begin{aligned} V_n^{(k)} &= V_n^{(k-1)} + V_{n-1}^{(k-1)} + V_{n-2}^{(k-1)} + \dots \\ &\approx \frac{n^{k+1}}{1.2.3.\dots(k+1)}. \end{aligned} \tag{6.71}$$

6.5 Conclusion: Calculation of the circumference

Using the estimates for the various *samaghāta-saṅkalita*, summation of powers of the *bhujā*-s, we can derive the series for the circumference (6.37) mentioned earlier. We had in (6.36)

$$\begin{aligned} \frac{C}{8} &= \left(\frac{r}{n}\right)[1 + 1 + \dots + 1] \\ &- \left(\frac{r}{n}\right)\left(\frac{1}{r^2}\right)\left[\left(\frac{r}{n}\right)^2 + \left(\frac{2r}{n}\right)^2 + \dots + \left(\frac{nr}{n}\right)^2\right] \\ &+ \left(\frac{r}{n}\right)\left(\frac{1}{r^4}\right)\left[\left(\frac{r}{n}\right)^4 + \left(\frac{2r}{n}\right)^4 + \dots + \left(\frac{nr}{n}\right)^4\right] \\ &- \dots\dots . \end{aligned} \tag{6.72}$$

[5] These are again estimates for large n. Exact expressions for the first two summations, $V_n^{(1)}$ and $V_n^{(2)}$, are given in *Āryabhaṭīya, Gaṇita*, 21. Exact expression for the k-th order repeated summation $V_n^{(k)}$ has been given (under the name *vāra-saṅkalita*), by Nārāyaṇa Paṇḍita (c.1350) in his *Gaṇitakaumudī*, 3.19, and they are also given later in Chapter 7 of *Yuktibhāṣā*.

For large n, using the estimate (6.64), $S_n^{(k)} \approx \frac{n^{k+1}}{(k+1)}$, we arrive at the result of Mādhava cited earlier

$$\frac{C}{8} = r - \frac{r}{3} + \frac{r}{5} - \dots \;, \tag{6.73}$$

$$C = 4d\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots\right). \tag{6.74}$$

It is remarked that the magnitude of the succeeding terms becomes smaller and smaller, and when the terms become very small, then they can be discarded and the calculation be terminated; then the result will be mostly accurate.

6.6 *Cāpīkaraṇa*: Conversion of the Rsine to arc

If $s = r\theta$ is the arc (*dhanus*) of a circle of radius r subtending an angle θ at the centre, $r\sin\theta$ and $r\cos\theta$ are its *jyā* (Rsine) and *koṭi* (Rcosine) respectively, and if the *jyā* is less than the *koṭi*, then the arc is obtained by the rule *iṣṭajyātrijyayorghātāt...* (cited also in *Yuktidīpikā*, II. 206):[6]

$$s = r\left[\frac{jy\bar{a}(s)}{ko\d{t}i(s)}\right] - \left(\frac{r}{3}\right)\left[\frac{jy\bar{a}(s)}{ko\d{t}i(s)}\right]^3 + \left(\frac{r}{5}\right)\left[\frac{jy\bar{a}(s)}{ko\d{t}i(s)}\right]^5 - \dots . \tag{6.75}$$

This result is obtained in the same way as the series for one-eighth the circumference derived earlier. Consider the quadrant of the square $OEAS$ circumscribing the circle as in Figure 6.6.

Choose the (*bhujā*) *jyā* PQ of the given arc EP in such a way that its *koṭi* OQ and the *śara* (Rversine) QE are along the west-east line. Extend the radius OP to meet the square at B. The portion $EB = t$, of the eastern side of the square, is now divided into n equal parts and, following the same argument as before in Section 6.3.1, we arrive at the expression for the arc $EP = s$:

$$s \approx \left(\frac{t}{n}\right)\left[\left(\frac{r^2}{k_o^2}\right) + \left(\frac{r^2}{k_1^2}\right) + \left(\frac{r^2}{k_2^2}\right) + \dots + \left(\frac{r^2}{k_n^2}\right)\right], \tag{6.76}$$

[6] This corresponds to the result

$$s = r\theta = r\left(\frac{r\sin\theta}{r\cos\theta}\right) - \left(\frac{r}{3}\right)\left(\frac{r\sin\theta}{r\cos\theta}\right)^3 + \left(\frac{r}{5}\right)\left(\frac{r\sin\theta}{r\cos\theta}\right)^5 - \dots \;.$$

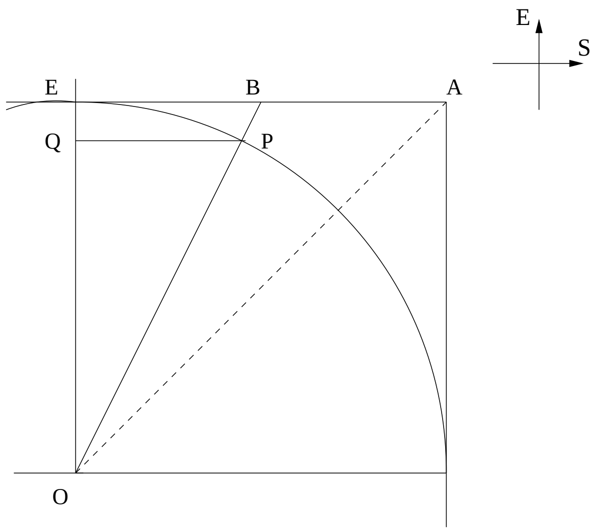


Figure 6.6: Conversion of the Rsine to arc.

where the hypotenuses k_i^2 are given by

$$k_i^2 = r^2 + \left(\frac{it}{n}\right)^2. \tag{6.77}$$

Calculating the *śodhya-phala*-s as before, we get[7]

$$\begin{aligned} s &= \left(\frac{t}{n}\right)[1+1+\ldots+1] \\ &- \left(\frac{t}{n}\right)\left(\frac{1}{r^2}\right)\left[\left(\frac{t}{n}\right)^2 + \left(\frac{2t}{n}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{nt}{n}\right)^2\right] \\ &+ \left(\frac{t}{n}\right)\left(\frac{1}{r^4}\right)\left[\left(\frac{t}{n}\right)^4 + \left(\frac{2t}{n}\right)^4 + \ldots + \left(\frac{nt}{n}\right)^4\right] \\ &- \ldots \, . \end{aligned} \tag{6.78}$$

Estimating the *saṅkalitas* $S_n^{(k)}$ as before, we get

$$s = r\left(\frac{t}{r}\right) - \left(\frac{r}{3}\right)\left(\frac{t}{r}\right)^3 + \left(\frac{r}{5}\right)\left(\frac{t}{r}\right)^5 - \ldots \, . \tag{6.79}$$

[7]Since $t < r$, we continue to have $r^2 < k_i^2 < 2r^2$, which ensures that the infinite series expansion converges.

If we note that

$$\frac{t}{r} = \frac{EB}{OE} = \frac{PQ}{OQ} = \frac{jy\bar{a}(s)}{ko\d{t}i(s)}, \tag{6.80}$$

then we obtain the series (6.75) given above.

6.7 Circumference by an alternate method

The above series (6.75) for the arc is used to obtain an alternative expression for the circumference of a circle, as given in the verse *vyāsavargād ravi-hatāt. . .* (cited also in *Yuktidīpikā*, II. 212)

$$C = \sqrt{12d^2}\left(1 - \frac{1}{3.3} + \frac{1}{3^2.5} - \frac{1}{3^3.7} + \ldots\right) \tag{6.81}$$

This result is obtained from the earlier result on *cāpīkaraṇa* by considering the *bhujā* and *koṭi* of an arc equal to one-twelfth of the circumference.

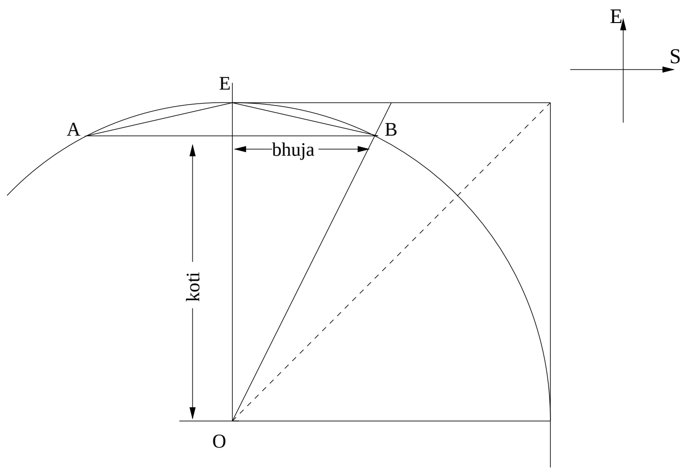


Figure 6.7: *Jyā* and *Koṭi* of one-twelfth of circumference.

In Figure 6.7, we mark off one-twelfth of the circle on either side of the east-west line and consider the full-chord (*samasta-jyā*) that touches these points A and B. This full-chord of one-sixth of the circumference of the circle, which is also the side of the inscribed regular hexagon, is equal to the radius.[8]

[8]This will be shown in the beginning of Chapter 7.

Hence for one-twelfth of the circumference, the associated *bhujā* or Rsine is given by half the radius, $\frac{r}{2}$, and the corresponding *koṭi* is $(\sqrt{3})\frac{r}{2}$. Thus we see that the ratio of the $(bhuj\bar{a})^2$ to the $(ko\d{t}i)^2$, which is the multiplier which generates the successive terms in (6.75), is given by

$$\left(\frac{jy\bar{a}(s)}{ko\d{t}i(s)}\right)^2 = \frac{1}{3}.$$

Therefore

$$\begin{aligned} C &= \left(\frac{12r}{\sqrt{3}}\right)\left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^2 - \ldots\right] \\ &= \sqrt{12d^2}\left[1 - \frac{1}{3.3} + \frac{1}{3^2.5} - \frac{1}{3^3.7} + \ldots\right]. \end{aligned} \tag{6.82}$$

6.8 *Antya-saṃskāra*: Final correction terms

We have the series for the circumference

$$\frac{C}{4d} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)} + (-1)^n\frac{1}{(2n+1)} + \ldots \ . \tag{6.83}$$

The denominators in this series keep increasing, but extremely slowly. Now is explained a way to perform a last correction, say after n-th term, so that the value of the circumference is obtained to a high degree of accurary, without having to evaluate a large number of terms.

Let $p = 2n - 1$ be the n-th odd number and let us take the correction term after the n-th term in the above series, $(-1)^{\frac{(p-1)}{2}}\frac{1}{p}$, to be of the form $(-1)^{\frac{(p+1)}{2}}\frac{1}{a_p}$. Since the series is alternating, the correction term will be subtractive if the last term is additive and vice versa. Thus

$$C = 4d\left[1 - \frac{1}{3} + \ldots + (-1)^{\frac{(p-1)}{2}}\frac{1}{p} + (-1)^{\frac{(p+1)}{2}}\frac{1}{a_p}\right]. \tag{6.84}$$

The correction will be really accurate, if the value of the circumference does not change whether we incorporate the correction after the $(n-1)$-th term or after the n-th term. That is

$$C = 4d\left[1 - \frac{1}{3} + \ldots + (-1)^{\frac{(p-3)}{2}}\frac{1}{p-2} + (-1)^{\frac{(p-1)}{2}}\frac{1}{a_{p-2}}\right]$$

$$= 4d\left[1 - \frac{1}{3} + \ldots + (-1)^{\frac{(p-3)}{2}}\frac{1}{p-2} + (-1)^{\frac{(p-1)}{2}}\frac{1}{p} + (-1)^{\frac{(p+1)}{2}}\frac{1}{a_p}\right]. \quad (6.85)$$

Thus, for the correction to be really accurate, the condition is

$$\frac{1}{a_{p-2}} + \frac{1}{a_p} = \frac{1}{p}\,. \quad (6.86)$$

It is first observed that we cannot satisfy this condition trivially by taking the correction denominators (correction divisors, *saṃskāra-hāraka*-s) both to be equal, say $a_{p-2} = a_p = 2p$. For, the correction has to follow a uniform rule of application and thus, if $a_{p-2} = 2p$, then $a_p = 2(p+2)$; or, if $a_p = 2p$, then $a_{p-2} = 2(p-2)$.

We can, however, have both a_{p-2} and a_p close to $2p$ by taking $a_{p-2} = 2p-2$ and $a_p = 2p+2$, as there will always persist this much difference between $p-2$ and p when they are doubled. Hence, the first (order) estimate of the correction divisor is given as, "double the even number above the last odd-number divisor p",

$$a_p = 2(p+1). \quad (6.87)$$

But, it can be seen right away that, with this value of the correction divisor, the condition for accuracy (6.86), stated above, is not exactly satisfied. Therefore a measure of inaccuracy (*sthaulya*) $E(p)$ is introduced

$$E(p) = \left(\frac{1}{a_{p-2}} + \frac{1}{a_p}\right) - \frac{1}{p}\,. \quad (6.88)$$

The objective is to find the correction denominators a_p such that the inaccuracy $E(p)$ is minimised. We have to estimate the inaccuracy for a correction divisor which bears a specific relation with the last odd-number divisor, whose numerical value, for the sake of generality, has to be left unspecified or unknown. And thus the method of *dhanarṇa-ṣaḍvidha* (computations with positive and negative quantities) in *avyakta-gaṇita* or algebra, will have to be employed with the last odd-number divisor p as the *avyakta-rāśi*, the unknown variable. For this purpose, a notation for expressing ratio of polynomials in a single unknown quantity (by placing them in two rows of square compartments one below the other) and the procedure for calculating sums and differences of such expressions by converting them to a common denominator (*samaccheda*) are set forth in the Text.

When we set $a_p = 2(p+1)$, the inaccuracy will be

$$E(p) \quad = \quad \frac{1}{(2p-2)} + \frac{1}{(2p+2)} - \frac{1}{p}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(2p^2+2p)}{(4p^3-4p)} + \frac{(2p^2-2p)}{(4p^3-4p)} - \frac{(4p^2-4)}{(4p^3-4p)} \\
&= \frac{4}{(4p^3-4p)} \\
&= \frac{1}{(p^3-p)} \,. \qquad (6.89)
\end{aligned}
$$

This estimate of the inaccuracy shows that the correction has over-corrected the value of the circumference, and hence there has to be a reduction in the correction, or an increase in the correction denominator. But, it will not do, if we merely add 1 to the correction denominator. For, if we take $a_p = 2p+3$, thereby leading to $a_{p-2} = 2p-1$, we get

$$
\begin{aligned}
E(p) &= \frac{1}{(2p-1)} + \frac{1}{(2p+3)} - \frac{1}{p} \\
&= \frac{(2p^2+3p)}{(4p^3+4p^2-3p)} + \frac{(2p^2-p)}{(4p^3+4p^2-3p)} \\
&\qquad - \frac{(4p^2+4p-3)}{(4p^3+4p^2-3p)} \\
&= \frac{(-2p+3)}{(4p^3+4p^2-3p)} \,. \qquad (6.90)
\end{aligned}
$$

The inaccuracy is now negative but, more importantly, it has a much larger numerator than the earlier one, because it has a term proportional to p. For large p, $E(p)$ given by (6.90) varies inversely as the square of p, while for the divisor given by (6.87), $E(p)$ as given by (6.89) varied inversely as the cube of p.[9]

If we want to obtain a better correction, then a number less than 1 has to be added to the above correction divisor. This is arrived at as follows: When, full unity was added, the two correction divisor terms together gave an extra contribution of $2p$ to the numerator of $E(p)$ and the $\frac{-1}{p}$ term gave an extra contribution of $(-4p-1)$. Thus if we try adding *rūpa* (unity) divided by the correction divisor itself, i.e., if we set $a_p = 2p+2+\frac{1}{(2p+2)}$, the contributions from the correction divisors get multiplied essentially by $\left(\frac{1}{2p}\right)$. Thus to get rid of the higher order contributions, we need an extra factor of 4, which

[9] It may be noted that among all possible correction divisors of the type $a_p = 2p+m$, where m is an integer, the choice of $m=2$ is optimal, as in all other cases there will arise a term proportional to p in the numerator of the inaccuracy $E(p)$.

will be achieved if we take the correction divisor to be

$$a_p = 2p + 2 + \frac{4}{(2p+2)} = \frac{(2p+2)^2 + 4}{(2p+2)} \,. \tag{6.91}$$

Then, correspondingly, we have

$$a_{p-2} = 2p - 2 + \frac{4}{(2p-2)} = \frac{(2p-2)^2 + 4}{(2p-2)} \,. \tag{6.92}$$

We can then calculate the inaccuracy to be

$$\begin{aligned} E(p) &= \frac{1}{2p - 2 + \dfrac{4}{2p-2}} + \frac{1}{2p + 2 + \dfrac{4}{2p+2}} - \left(\frac{1}{p}\right) \\ &= \frac{(2p^3 - 2p^2 + 4)}{(4p^4 + 16)} + \frac{(2p^3 + 2p^2 - 4)}{4p^4 + 16} - \frac{(16p^4 + 64)}{(16p^5 + 64p)} \\ &= \frac{-4}{(p^5 + 4p)} \,. \end{aligned} \tag{6.93}$$

Clearly, the *sthaulya* with this (second order) correction divisor has improved considerably, in that it is now proportional to the inverse fifth power of the odd number.[10] In the end of this chapter a still more accurate (third order) correction divisor will be given.

We may display the result obtained for the circumference with the correction term as follows. If only the first order correction is employed, we have

$$C = 4d\left[1 - \frac{1}{3} + \ldots + (-1)^{\frac{(p-1)}{2}}\frac{1}{p} + (-1)^{\frac{(p+1)}{2}}\frac{1}{(2p+2)}\right]. \tag{6.94}$$

If the second order correction is also taken into account, we have

$$\begin{aligned} C &= 4d\left[1 - \frac{1}{3} + \ldots + (-1)^{\frac{(p-1)}{2}}\frac{1}{p} + (-1)^{\frac{(p+1)}{2}}\frac{1}{(2p+2) + \dfrac{4}{(2p+2)}}\right] \\ &= 4d\left[1 - \frac{1}{3} + \ldots + (-1)^{\frac{(p-1)}{2}}\frac{1}{p} + (-1)^{\frac{(p+1)}{2}}\frac{\dfrac{(p+1)}{2}}{(p+1)^2 + 1}\right]. \end{aligned} \tag{6.95}$$

[10] It may be noted that if we take any other correction divisor $a_p = 2p+2+\frac{m}{(2p+2)}$, where m is an integer, we will end up having a contribution proportional to p^2 in the numerator of the inaccuracy $E(p)$, unless $m = 4$. Thus the above form (6.91) is the optimal second order choice for the correction divisor.

These can also be expressed in the following alternative forms:

$$C = 4d\left[1 - \frac{1}{3} + \ldots + (-1)^{(n-1)}\frac{1}{(2n-1)} + (-1)^n\frac{1}{4n}\right], \tag{6.96}$$

and

$$C = 4d\left[1 - \frac{1}{3} + \ldots + (-1)^{(n-1)}\frac{1}{(2n-1)} + (-1)^n\frac{n}{(4n^2+1)}\right]. \tag{6.97}$$

6.9 More accurate results for the circumference

Now, if the correction term is applied to an approximate circumference and the amount of inaccuracy (*sthaulya*) is found, and it is additive, then the result is higher. Then it will become more accurate when the correction term obtained from the next higher odd number is subtracted. And so on. This leads to the interesting possibility of obtaining better series results for the circumference by the method of *sthaulya-parihāra*, incorporating the correction terms from the beginning itself.

Let us recall that inaccuracy or *sthaulya* at each stage is given by

$$E(p) = \frac{1}{a_{p-2}} + \frac{1}{a_p} - \left(\frac{1}{p}\right). \tag{6.98}$$

The series for the circumference (6.74) can be expressed in terms of these *sthaulya*-s as follows:

$$\begin{aligned} C &= 4d\left[\left(1 - \frac{1}{a_1}\right) + \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_3} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_5} - \frac{1}{5}\right) - \ldots\right] \\ &= 4d\left[\left(1 - \frac{1}{a_1}\right) + E(3) - E(5) + E(7) - \ldots\right]. \end{aligned} \tag{6.99}$$

If we consider the second order correction divisor (6.92), then using the expression for the *sthaulya*-s (6.93), we get

$$\begin{aligned} C &= 4d\left(1 - \frac{1}{5}\right) - 16d\left[\frac{1}{(3^5+4.3)} - \frac{1}{(5^5+4.5)} + \frac{1}{(7^5+4.7)} - \ldots\right] \\ &= 16d\left[\frac{1}{(1^5+4.1)} - \frac{1}{(3^5+4.3)} + \frac{1}{(5^5+4.5)} - \ldots\right]. \end{aligned} \tag{6.100}$$

The above series is given in the verse *samapañcāhatayoḥ* ... (cited also in *Yuktidīpikā*, II. 287). Note that each term in the above series involves the fifth power of the odd number in the denominator, unlike the original series which only involved the first power of the odd number. Clearly, this transformed series gives more accurate results with fewer terms.

If we had used only the first order correction (6.87) and the associated *sthaulya* (6.89), instead of the second order correction employed above, then the transformed series is the one given in the verse *vyāsād vāridhinihatāt...* (cited also in *Yuktidīpikā*, II. 290)

$$C = 4d\left[\frac{3}{4} + \frac{1}{(3^3-3)} - \frac{1}{(5^3-5)} + \frac{1}{(7^3-7)} - \ldots\right]. \tag{6.101}$$

Note that the denominators in the above transformed series are proportional to the third power of the odd number.

If we take a non-optimal correction divisor, say of the form $a_p = 2p$, then the *sthaulya* is given by

$$\begin{aligned} E(p) &= \frac{1}{(2p-4)} + \frac{1}{2p} - \frac{1}{p} \\ &= \frac{1}{(p^2-2p)} \\ &= \frac{1}{(p-1)^2-1}. \end{aligned} \tag{6.102}$$

Then, the transformed series will be the one given in the verse *dvyādiyujāṃ vā kṛtayo...* (cited also in *Yuktidīpikā*, II. 292)

$$C = 4d\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{(2^2-1)} - \frac{1}{(4^2-1)} + \frac{1}{(6^2-1)} + \ldots\right]. \tag{6.103}$$

Reference is also made to the following two series given in the verse *dvyādeś-caturādervā...* (cited also in *Yuktidīpikā*, II. 293), as being similar in nature:

$$C = 8d\left[\frac{1}{(2^2-1)} + \frac{1}{(6^2-1)} + \frac{1}{(10^2-1)} + \ldots\right], \tag{6.104}$$

$$C = 8d\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{(4^2-1)} - \frac{1}{(8^2-1)} - \frac{1}{(12^2-1)} + \ldots\right]. \tag{6.105}$$

6.10 A very accurate correction

The correction term associated with the third order correction, which is said to be very accurate correction (*sūkṣmatara-saṃskāra*) is given by the verse *ante sama-saṅkhyādalavargaḥ...* (cited also in *Yuktidīpikā*, II. 295).[11]

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_p} &= \cfrac{1}{2p+2+\cfrac{4}{(2p+2)+\cfrac{16}{(2p+2)}}} \\ &= \frac{\left(\frac{(p+1)}{2}\right)^2+1}{((p+1)^2+5)\,\frac{(p+1)}{2}}\,. \end{aligned} \tag{6.106}$$

The corresponding expression for the circumference with the above correction term can also be expressed in the form[12]

$$C = 4d\left[1-\frac{1}{3}+\ldots+(-1)^{(n-1)}\frac{1}{(2n-1)}+(-1)^n\frac{(n^2+1)}{(4n^3+5n)}\right]. \tag{6.107}$$

[11]The inaccuracy or *sthaulya* associatd with this correction can be calculated to be

$$E(p) = \frac{2304}{(64p^7+448p^5+1792p^3-2304p)}\,.$$

The inaccuracy now is proportional to the inverse seventh power of the odd-number. Again it can be shown that the number 16 in (6.106) is optimally chosen, in that any other choice would introduce a term proportional to p in the numerator of $E(p)$, given above. It can also be shown that the successive optimal correction terms are indeed successive convergents of a continued fraction

$$\frac{1}{a_p} = \cfrac{1}{(2p+2)+\cfrac{2^2}{(2p+2)+\cfrac{4^2}{(2p+2)+\cfrac{6^2}{(2p+2)+\ldots}}}}\,.$$

[12]It may be noted that this correction term leads to a value of $\pi = \frac{C}{d}$, which is accurate up to 11 decimal places, when we merely evaluate terms up to $n = 50$ in the series (6.107). Incidentally the value of $\pi = \frac{C}{d}$, given in the rule *vibudhanetra...*, attributed to Mādhava in *Kriyākramakarī* (p.377), is also accurate up to 11 decimal places.

Chapter 7

Derivation of Sines

7.1 The side of a regular hexagon inscribed in a circle is equal to the radius

It is instructed that using the methods of the previous chapter the diameter of a circle whose circumference is given by 21,600 minutes be calculated; and halving the diameter the corresponding radius be found.[1] Then we are instructed to draw a circle of this radius.

In Figure 7.1 we consider a circle and draw the east-west line EW and north-south line NS through its centre O. Draw the full-chords NA, ND from the north point and SB, SC from the south point of length equal to the radius. Join the radii OA, OD, OB and OC. We then have four equilateral triangles OAN, ODN, OBS and OCS with sides equal to the radius. From A, B, drop the perpendiculars (*lamba*) AP, BQ to the north-south line. Since these bisect the base, it follows that

$$NP = PO = OQ = QS = \frac{r}{2}\ . \tag{7.1}$$

Hence, it follows that

$$AB = PQ = r. \tag{7.2}$$

Similarly it follows that $CD = r$. Hence it follows that $NABSCD$ is a regular hexagon, of side equal to the radius, which is inscribed in the circle.

[1] The standard units employed are 1 *bhāga* (degree) = 60 *kalā* (*liptā* or *ili*, minute); 1 *kalā* = 60 *vikalā* (second) and so on. If the diameter is $21600'$, then a fairly accurate value of radius is $3437'44''48'''22^{iv}29^{v}22^{vi}22^{vii}$ given in the *katapayādi* notation by the verse *śrīrudraḥ śridharaḥ śreṣṭho devo viśvasthalī bhṛguḥ*.

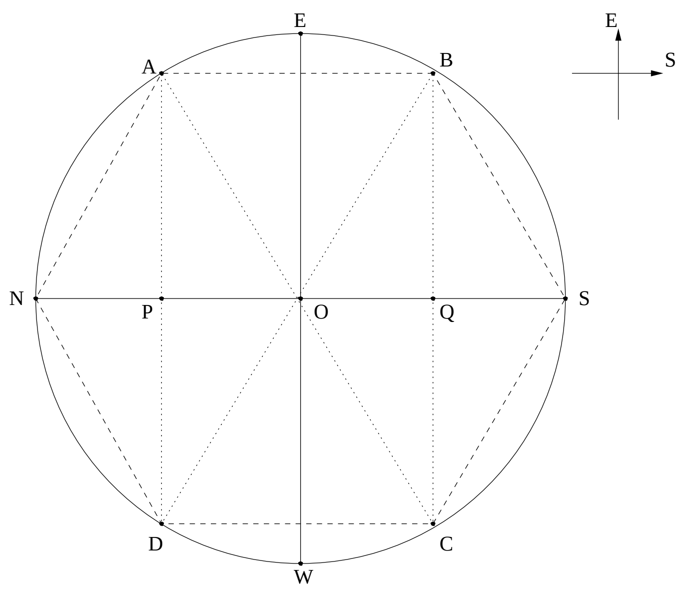


Figure 7.1: Regular hexagon inscribed in a circle.

Hence the *samasta-jyā* or the full-chord,[2] of two *rāśi*-s (60°) is the radius and hence Rsine (*ardha-jyā* or just *jyā*) of one *rāśi* is given by

$$Jy\bar{a}(EA) = \frac{r}{2}\,. \tag{7.3}$$

7.2 Derivation of Rsines

7.2.1 *Jyā, Koṭi* and *Śara* : Rsine, Rcosine and Rversine

Half the full-chord (*samasta-jyā*) of an arc is the half-chord (*ardha-jyā*) of half the arc. Since in planetary astronomy it is only the *ardha-jyā* that is used, it will be called just *jyā*, or Rsine of the half-arc.

In Figure 7.2, the arc EA is one *rāśi* (sign, arc corresponding to 30°). Then AP, the half-chord of double the arc is the *jyā* or Rsine. The Rsine of the

[2]The word *jyā* refers to the 'string' of a bow. In Figure 7.1 if AEB is considered as a bow, then the chord AB can be conceived of as the string of the bow.

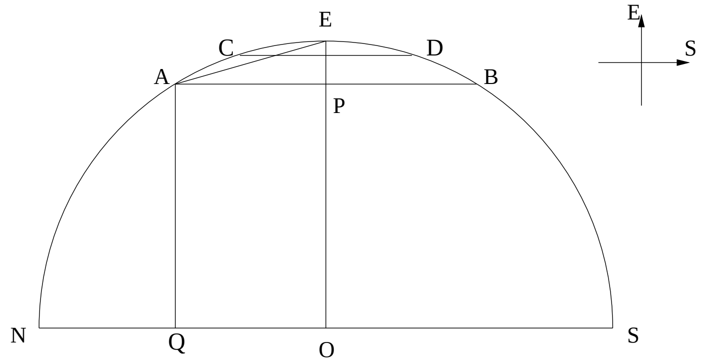


Figure 7.2: *Jyā*, *Koṭi* and *Śara*.

arc NA (the complimentary arc of EA), namely AQ, is the *koṭi* or Rcosine. If we mark the Rcosine along the east-west line as PO, then the bit of the radius remaining, PE, is the *śara* or Rversine.[3] If we mark the Rsine along the north-south line as OQ, then the bit of the radius remaining, QN, is the *koṭi-śara*, or the Rvercosine.

If $s = r\theta$, is the arc of a circle of radius r (in minutes), subtending angle θ (in radians) at the centre, then

$$\textit{Jyā}(s) \equiv R\sin(s) = r\sin(\theta) = r\sin\left(\frac{s}{r}\right), \tag{7.4}$$

$$\textit{Koṭi-jyā}(s) \equiv R\cos(s) = r\cos(\theta) = r\cos\left(\frac{s}{r}\right), \tag{7.5}$$

$$\begin{aligned}\textit{Śara}(s) &\equiv R\ \text{vers}(s) = r\ \text{vers}(\theta) = r\ \text{vers}\left(\frac{s}{r}\right)\\ &= r\left(1-\cos\left(\frac{s}{r}\right)\right).\end{aligned} \tag{7.6}$$

In most of what follows, it is assumed that the circumference of the circle is $21,600'$ or $360°$.

[3]The term *śara* means 'arrow'. In Figure 7.2, if we consider the arc AEB as a bow, then PE serves as *śara* or arrow joining the mid point of the full-chord with the middle of the arc AB.

7.2.2 Derivation of Rsines

Now, in Figure 7.2, consider the triangle APE, where AP, the Rsine, is the *bhujā* and PE, the Rversine, is the *koṭi*. Hence the full-chord (*samasta-jyā*) of one sign, AE, is given by

$$AE^2 = AP^2 + PE^2. \tag{7.7}$$

But the full-chord AE of one sign is twice the Rsine of half a sign. Thus

$$R\sin(EC) = \left(\frac{1}{2}\right)\left[R\sin^2(EA) + R\ \text{vers}^2(EA)\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{7.8}$$

The same relation will hold of any arc s:

$$R\sin\left(\frac{s}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)\left[R\sin^2(s) + R\ \text{vers}^2(s)\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{7.9}$$

There is also the standard relation

$$R\cos(s) = R\sin(90^\circ - s) = \left[r^2 - R\sin^2(s)\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{7.10}$$

where we have assumed that 90° is one-fourth the circumference. Equations (7.9) and (7.10) can be used along with the standard values[4]

$$R\sin(30^\circ) = \frac{r}{2}, \tag{7.11}$$

$$R\sin(45^\circ) = \left(\frac{r^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{7.12}$$

to derive a number of Rsines.[5]

[4] The $R\sin 30^\circ$ value has been derived in (7.3). The value of $R\sin(45^\circ)$ can be obtained by noting that the square of the full-chord (EN in Figure 7.2) of the corresponding double-arc of 90°, is given by $2r^2$.

[5] As will be explained later in Section 7.4.2, the object is to derive the 24 tabulated Rsines of arcs which are multiples of $225' = 3^\circ 45'$. Here the starting value (7.11) of $R\sin(30^\circ)$ is the 8^{th} tabulated sign. From this, the Rsine of the complementary arc 60°, or the 16^{th} tabulated Rsine, is obtained from (7.10). The Rsine of the half-arc, $R\sin 15^\circ$, or the 4^{th} tabulated Rsine is found using (7.9). In this way, by successive applications of (7.9) and (7.10), the 1^{st}, 2^{nd}, 4^{th}, 5^{th}, 7^{th}, 8^{th}, 10^{th}, 11^{th}, 13^{th}, 14^{th}, 16^{th}, 17^{th}, 19^{th}, 20^{th}, 22^{nd}, 23^{rd} and 24^{th} tabulated Rsines are all determined. The remaining tabulated Rsines are found by following the same procedure, starting from the value (7.12) of $R\sin(45^\circ)$, which is the 12^{th} tabulated Rsine.

7.3 Some technical terms and definitions

7.3.1 Rsine and Rcosine

Consider the quadrant of the circle from the east point to the north point. This quadrant may be divided into a convenient number, usually taken to be 24, of equal *cāpa-khaṇḍa*-s or arc-bits.

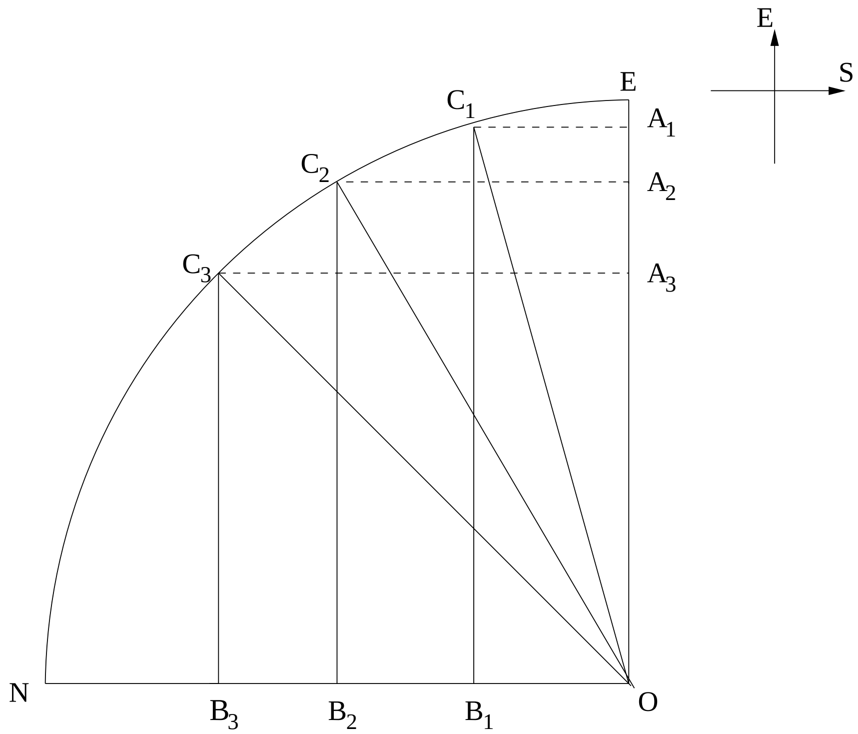


Figure 7.3: Rsines and Rcosines.

In Figure 7.3 are shown (not to scale) the first three arc-bits, EC_1, C_1C_2 and C_2C_3. The Rsines (*bhujā-jyā*) are parallel to the north-south line and the Rcosines (*koṭi-jyā*) and the Rversines (*śara* or *utkrama-jyā*) are parallel to the east-west line. C_1A_1, C_2A_2, C_3A_3 are the Rsines of the arcs EC_1, EC_2, and EC_3 respectively. C_1B_1, C_2B_2, C_3B_3 are the Rcosines of these arcs, and A_1E, A_2E, and A_3E are the Rversines of these arcs, respectively.

7.3.3 Rsine and Rcosine-differences

The Rsine-difference (*bhujā-khaṇḍa*) of the first arc-bit EC_1 is B_1O, which is the same as C_1A_1, the first Rsine itself. The Rsine-difference of the second arc-bit C_1C_2 is B_2B_1, which is equal to the portion of the second Rsine enclosed between its tip C_2 and the first Rcosine C_1B_1. The Rsine-difference of the third arc-bit C_2C_3 is B_3B_2, which is equal to the portion of the third Rsine enclosed between its tip C_3 and the second Rcosine C_2B_2.

The Rcosine-difference (*koṭi-khaṇḍa*) of the first arc-bit EC_1 is EA_1, which is the distance from the east point to the foot of the first Rsine. The Rcosine-difference of the second arc-bit C_1C_2 is A_1A_2, which is equal to the portion of the first Rcosine enclosed between its tip C_1 and the second Rsine C_2A_2. The Rcosine-difference of the third arc-bit C_2C_3 is A_2A_3, which is equal to the portion of the second Rcosine enclosed between its tip C_2 and the third Rsine C_3A_3. It is noted later that EA_1 is the first Rversine-difference (*śara-khaṇḍa*), which is also the first Rversine. A_1A_2 and A_2A_3 are the next two Rversine-differences.

Each of the Rsine-difference and Rcosine-difference pairs, B_1O and EA_1, B_2B_1 and A_1A_2, B_3B_2 and A_2A_3, will be *bhujā*-s and *koṭi*-s, with the corresponding full-chords of the arc-bit as the *karṇa*. Since the arc-bits are all equal, the corresponding full-chords (*samasta-jyā*-s) are all equal, though in each case, the *bhujā*-s and *koṭi*-s, the Rsine- and Rcosine-differences are all different. This is quite like the Rsines and Rcosines themselves which can be considered as *bhujā*-s and *koṭi*-s which, though differ from arc to arc, are such that the corresponding *karṇa* (the hypotenuse, which is the root of sum of their squares) is always equal to the radius.

7.3.4 Rsine and Rcosine in the quadrants

The east point on the circle is usually taken as the *Meṣādi*, the First Point of Aries, and from there the *rāśi*-s, the signs, are marked towards the north, such that the end of the *rāśi Mithuna* (Gemini) is at the north point. When a given arc (*iṣṭa-cāpa*) is reckoned from the east point and its tip is in different quadrants, then, the correspoinding *bhujā-cāpa* and *koṭi-cāpa* are given as follows (see Figure 7.4).

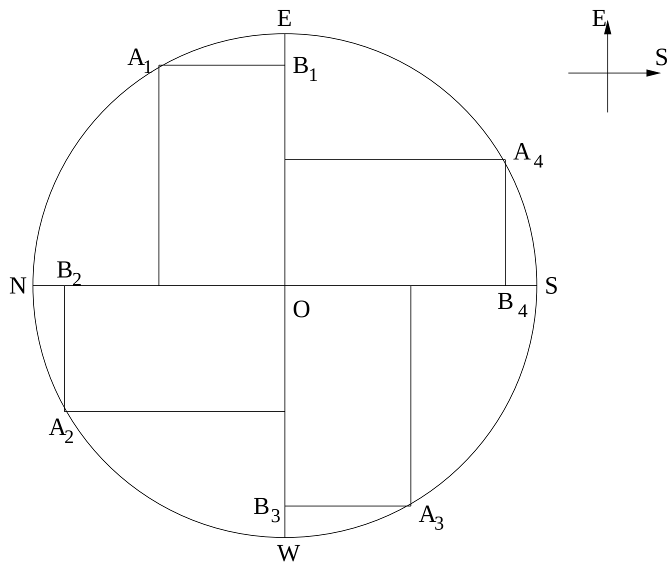


Figure 7.4: *Bhujā-cāpa* and *Koṭi-cāpa* in different quadrants.

In the first quadrant, if the given arc is EA_1, then EA_1 itself is the *bhujā-cāpa* and NA_1 is the *koṭi-cāpa*. In the second quadrant, if the given arc is EA_2, then WA_2 is the *bhujā-cāpa* and A_2N is the *koṭi-cāpa*. In the third quadrant, if the given arc is EA_3, then WA_3 is the *bhujā-cāpa* and A_3S is the *koṭi-cāpa*. In the fourth quadrant, if the given arc is EA_4, then EA_4 is the *bhujā-cāpa* and A_4S is the *koṭi-cāpa*.

7.4 Computation of Rsines

7.4.1 Tabular Rsines (*Paṭhita-jyā*)

Having divided the quadrant into a number of equal arc-bits, the corresponding Rsine-differences may be calculated and tabulated. These are called tabulated Rsine (differences), *paṭhita-jyā*, as has been done in earlier texts (*pūrva-śāstra*-s).[6] They can be tabulated in order, or in the inverse order as *utkrama-jyā*-s.

[6]Some texts such as the *Āryabhaṭīya* tabulate Rsine-differences, while other texts such as the *Sūryasiddhānta* tabulate the Rsines themselves.

If a given arc is a multiple of these arc-bits, then the corresponding Rsine can be found merely by adding these tabulated Rsine-differences. But if the desired arc falls in the interstices of these arc-bits, then a suitable part of the next Rsine-difference is to be added to the value of the Rsine of the nearest arc which is an integral multiple of the arc-bits.

It is noted that we will not get accurate results by just applying the "rule of three" that if an arc-bit corresponds to so much of Rsine-difference, how much a portion of it will correspond to. Such a result will only be rough. This can be seen by noting that while the arc-bits are all equal, the Rsine-differences are all different, so that the Rsine of two arc-bits is not twice the Rsine of a single arc-bit. The reason for this is explained as follows: The first arc is not curved, since the Rversine is very small. So the arc is practically equal to the Rsine. But, as the arc increases the curved nature will increase. There, the Rsine (*bhujā-jyā*) will have lesser length, since the Rversine increases in length. Therefore, the rule of three should not be applied to derive the Rsines.

7.4.2 Computation of accurate tabular Rsines

Before going to the calculation of Rsines when the desired arc falls in the interstice between the arc-bits, a method for calculating the tabulated Rsines is presented. For this purpose, consider the quadrant EN of the circle (of circumference $21600'$) to be divided into 24 equal arc-bits of $225'$ each. We shall show the first two arc-bits in Figure 7.5 where, for the sake of visual clarity, we have taken these arc-bits to be much larger than $225'$. EC_1 and C_1C_2 are the first two arc-bits. Draw the first two Rsines C_1B_1 and C_2B_2, as also the first two Rcosines C_1K_1 and C_2K_2. Further, let C_1K_1 and C_2B_2 intersect at G.

The chords of all the equal arc-bits are all equal and let this chord-length be denoted as α. It is equal to the square-root of the sum of the squares of the first Rsine C_1B_1 and the first Rversine EB_1.

Let M_1, M_2 be the mid-points of the arc-bits EC_1, C_1C_2. Let M_1P_1 and M_1Q_1 be the Rsine and Rcosine of arc EM_1, and M_2P_2 and M_2Q_2, those of arc EM_2. Let H be the point of intersection of M_1Q_1 and M_2P_2.

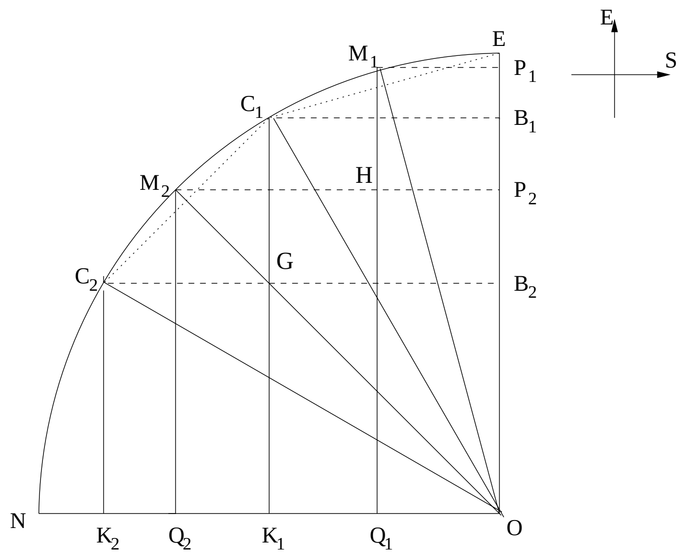


Figure 7.5: Computation of tabular Rsines.

Now, the arc EM_1 is of measure $112\frac{1}{2}'$. Since this arc may be considered small, we can approximate the corresponding Rsine, M_1P_1 by the arc itself. Thus

$$R\sin\left(112\tfrac{1}{2}'\right) = M_1P_1 \approx 112\tfrac{1}{2}'. \tag{7.13}$$

Then, the corresponding Rcosine, M_1Q_1 (which is also the Rsine of $23\frac{1}{2}$ arc-bits of $225'$) and the Rversine, EP_1, are given by

$$\begin{aligned} R\cos\left(112\tfrac{1}{2}'\right) = M_1Q_1 &= \left[r^2 - R\sin^2\left(112\tfrac{1}{2}'\right)\right]^{\frac{1}{2}}, \\ &\approx \left[r^2 - \left(112\tfrac{1}{2}'\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}, \qquad (7.14) \\ R\text{ vers}\left(112\tfrac{1}{2}'\right) = EP_1 &= r - R\cos\left(112\tfrac{1}{2}'\right) \\ &\approx r - \left[r^2 - \left(112\tfrac{1}{2}'\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}. \qquad (7.15) \end{aligned}$$

Now, the radius OM_1 bisects the chord EC_1 perpendicularly as M_1 is the midpoint of the first arc-bit. Now the triangles OM_1P_1 and C_1EB_1 are similar as the sides of one are perpendicular to the corresponding sides of the other. Hence, we have

$$\frac{OM_1}{C_1E} = \frac{M_1P_1}{EB_1} = \frac{OP_1}{C_1B_1}. \tag{7.16}$$

The chord $C_1E = \alpha$ is twice the Rsine of $112\frac{1}{2}'$. For evaluation of the expressions involving this chord, we shall make the same approximation as in (7.13), that is,

$$\alpha = C_1E = 2\ M_1P_1 \approx 225'. \tag{7.17}$$

From (7.16), we have the following expressions for the first Rsine, Rversine and Rcosine in terms of the values of these quantities for the half-arc-bit $112\frac{1}{2}'$, which have been evaluated above in (7.13)–(7.15):

$$R\sin(225') = C_1B_1 = C_1E \times \frac{OP_1}{OM_1} = \alpha\left[\frac{\left(R\cos\left(112\frac{1}{2}'\right)\right)}{r}\right], \tag{7.18}$$

$$R\ \mathrm{vers}(225') = EB_1 = C_1E \times \frac{M_1P_1}{OM_1} = \alpha\left[\frac{\left(R\sin\left(112\frac{1}{2}'\right)\right)}{r}\right], \tag{7.19}$$

$$R\cos(225') = OB_1 = r - EB_1 = r - \alpha\left[\frac{\left(R\sin\left(112\frac{1}{2}'\right)\right)}{r}\right]. \tag{7.20}$$

Now, in order to calculate the second Rsine, Rversine and Rcosine, we first evaluate the corresponding Rsine-differences etc., between the arcs EM_2 and EM_1. For this purpose we note that the triangles OC_1B_1 and M_2M_1H are similar, Therefore,

$$\frac{OC_1}{M_2M_1} = \frac{OB_1}{M_2H} = \frac{C_1B_1}{M_1H}\ . \tag{7.21}$$

If we note that M_2M_1 is full-chord α, then the Rsine-difference M_2H and Rversine-difference M_1H are given by

$$M_2H = M_2M_1 \times \frac{OB_1}{OC_1} = \alpha\left[\frac{(R\cos(225'))}{r}\right], \tag{7.22}$$

$$M_1H = M_2M_1 \times \frac{C_1B_1}{OC_1} = \alpha\left[\frac{(R\sin(225'))}{r}\right]. \tag{7.23}$$

Adding these differences to the Rsines etc. of $112\frac{1}{2}'$, we get the Rsines etc., of $1\frac{1}{2}$ arc-bits, that is $337\frac{1}{2}'$.

$$\begin{aligned} R\sin\left(337\tfrac{1}{2}'\right) = M_2P_2 &= M_1P_1 + M_2H \\ &= R\sin\left(112\tfrac{1}{2}'\right) + \alpha\left[\frac{(R\cos(225'))}{r}\right], \quad (7.24) \\ R\ \mathrm{vers}\left(337\tfrac{1}{2}'\right) = EP_2 &= EP_1 + M_1H \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= R \text{ vers}\left(112\tfrac{1}{2}'\right) + \alpha\left[\frac{(R\sin(225'))}{r}\right], &(7.25)\\
R\cos\left(337\tfrac{1}{2}'\right) = OP_2 &= r - EP_2 \\
&= R\cos\left(112\tfrac{1}{2}'\right) - \alpha\left[\frac{(R\sin(225'))}{r}\right]. &(7.26)
\end{aligned}
$$

The above values can now be used to calculate the second Rsines etc., by evaluating the Rsine-differences etc., between the arcs EC_2 and EC_1. For this purpose we note that the triangles OM_2P_2 and C_2C_1G are similar. Therefore,

$$
\begin{aligned}
C_2G &= C_2C_1 \times \frac{OP_2}{OM_2} = \alpha\left[\frac{\left(R\cos\left(337\tfrac{1}{2}'\right)\right)}{r}\right], &(7.27)\\
C_1G &= C_2C_1 \times \frac{M_2P_2}{OM_2} = \alpha\left[\frac{\left(R\sin\left(337\tfrac{1}{2}'\right)\right)}{r}\right]. &(7.28)
\end{aligned}
$$

Adding these differences to the Rsines etc. of $225'$, we get the Rsines etc., of 2 arc-bits, that is $450'$.

$$
\begin{aligned}
R\sin(450') = C_2B_2 &= C_1B_1 + C_2G \\
&= R\sin\left(337\tfrac{1}{2}'\right) + \alpha\left[\frac{(R\cos(225'))}{r}\right], &(7.29)\\
R \text{ vers}(450') = EB_2 &= EB_1 + C_1G \\
&= R \text{ vers}\left(337\tfrac{1}{2}'\right) + \alpha\left[\frac{(R\sin(225'))}{r}\right], &(7.30)\\
R\cos(450') = OB_2 &= r - EB_2 \\
&= R\cos\left(337\tfrac{1}{2}'\right) - \alpha\left[\frac{(R\cos(225'))}{r}\right]. &(7.31)
\end{aligned}
$$

Continuing this process we can calculate all the tabulated Rsine-differences, or equivalently, all the tabulated Rsines of multiples of the arc-bits $225'$. It is noted that in the process, we are also evaluating the Rsines of the mid-points of the arc-bits also, that is Rsines of odd multiples of $112\frac{1}{2}'$.[7]

[7] Note that the equations (7.18)–(7.31) are all exact relations. However, in order to evaluate the Rsines etc., we need to make a suitable approximation for the Rsine of the half-arc-bit $112\frac{1}{2}'$ and the full-chord α of the arc-bit $225'$, as given by equations (7.13) and (7.17).

7.4.3 Accurate Rsine and Rcosine at a desired point

When the desired arc is not a multiple of the arc-bit, then the Rsine etc. of the arc have to be obtained as corrections to the Rsines etc. of the nearest multiple of the arc-bit. The portion of the desired arc from its tip to the nearest tip of an arc-bit is called the *śiṣṭa-cāpa* or remainder arc. In Figure 7.6, let the tip of the i-th arc-bit C_i be closest to the tip of the desired arc EC. Then the *śiṣṭa-cāpa* is CC_i, which may be denoted by $\triangle$. The Rsine C_iB_i and Rcosine C_iK_i of the arc EC_i are tabulated Rsine and Rcosine values, which we assume are already calculated. To determine the Rsine, CB, and the Rcosine, CK, of the desired are EC, we need to calculate the corrections B_iB and K_iK. Let C_iK_i and CB meet at D.

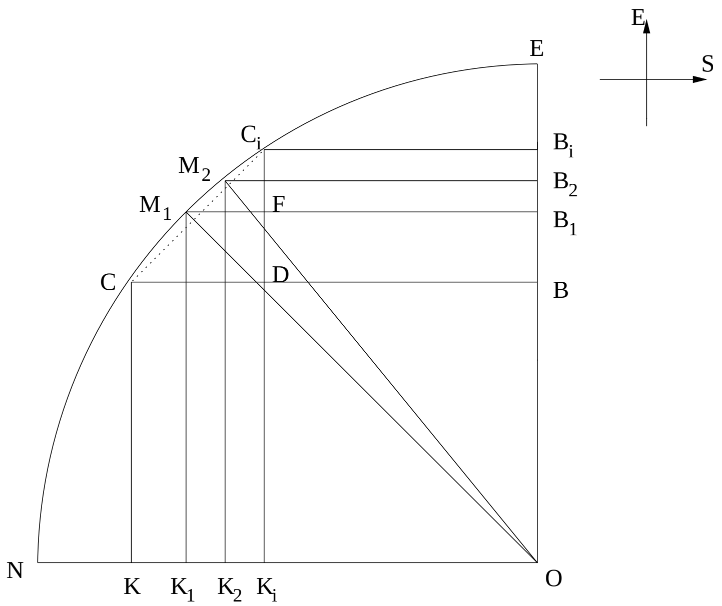


Figure 7.6: Rsine at a desired point.

If M_1 is the mid-point of the *śiṣṭa-cāpa* C_iC, and M_1B_1 and M_1K_1 are the Rsine and Rcosine of the arc EM_1, then we can follow the procedure outlined above, using the similarity of the triangles OM_1B_1 and CC_iD. We get

$$B_iB = C_iD = CC_i \times \frac{M_1B_1}{OM_1}, \tag{7.32}$$

$$K_iK = DC = CC_i \times \frac{OB_1}{OM_1}. \tag{7.33}$$

In the above, the chord CC_i of the *śiṣṭa-cāpa* can be approximated by the arc Δ itself.[8] But, we do not know the Rsine and Rcosine, M_1B_1 and OB_1, of the arc EM_1, which appear in (7.32), (7.33). For this purpose it is suggested that we may consider the mid-point M_2 of the arc C_iM_1, and the Rsine and Rcosine, M_2B_2 and M_2K_2, of the arc EM_2. If F is the point of intersection of C_iK_i and M_1B_1, then as before the triangles OM_2B_2 and M_1C_iF are similar and we get

$$B_iB_1 = C_iF = M_1C_i \times \frac{M_2B_2}{OM_2}\,, \tag{7.34}$$

$$K_iK_1 = FM_1 = M_1C_i \times \frac{OB_2}{OM_2}\,. \tag{7.35}$$

As before, the chord M_1C_i which appears in the above equations can be approximated by the corresponding arc $\frac{\Delta}{2}$. But again, we do not know the Rsine and Rcosine, M_2B_2 and OB_2, of the arc EM_2. At this stage, it is suggested that these may be approximated by the tabular Rsine and Rcosine, C_iB_i and OB_i, of the arc EC_i, because the portion of the arc left over, namely C_iM_2, may be considered negligible.[9]

From equations (7.32)–(7.35), we get

$$\begin{aligned} R\sin(EC) &= R\sin(EC_i+\Delta) = CB \\ &= C_iB_i + K_iK \\ &= R\sin EC_i + CC_i \times \frac{OB_1}{OM_1} \\ &= R\sin EC_i + CC_i \times \frac{(OB_i - B_iB_1)}{OM_1} \\ &= R\sin EC_i + \frac{CC_i}{r} R\cos EC_i - \frac{CC_i}{r}\left(\frac{M_1C_i}{r}\right) M_2B_2\,. \end{aligned} \tag{7.36}$$

[8]Note that the *śiṣṭa-cāpa* is always so chosen as to be less than or equal to half the arc-bit, or $112\frac{1}{2}'$, an arc which has already been assumed to be approximately equal to its Rsine, in (7.13), while calculating the tabulated Rsines.

[9]If, instead of going through all this, we had taken the arc C_iM_1 itself to be negligible and merely used equations (7.32) and (7.33) with the assumption that the Rsine and Rcosine, M_1B_i and OB_1, of the arc EM_1, may themselves be approximated by the tabulated Rsine and Rcosine, C_iB_i and OB_i of the arc EC_i, then we would obtain the first order approximations:

$$R\sin(EC_i+\Delta) \approx R\sin(EC_i) + \left(\frac{\Delta}{r}\right) R\cos(EC_i).$$

$$R\cos(EC_i+\Delta) \approx R\cos(EC_i) - \left(\frac{\Delta}{r}\right) R\sin(EC_i).$$

With the approximations that the chords CC_i and M_1C_i may be equated with Δ and $\frac{\Delta}{2}$, and the assumption that M_2B_2 may be approximated by the tabulated sine $R\sin(EC_i)$, we get

$$\begin{aligned} R\sin(EC_i + \Delta) \;\approx\;& R\sin EC_i \\ &+ \left(\frac{\Delta}{r}\right) R\cos EC_i - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\Delta}{r}\right)^2 R\sin EC_i\,. \end{aligned} \tag{7.37}$$

Similarly for the Rcosine of the arc EC we get,

$$\begin{aligned} R\cos(EC_i + \Delta) \;\approx\;& R\cos EC_i \\ &- \left(\frac{\Delta}{r}\right) R\sin EC_i - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\Delta}{r}\right)^2 R\cos EC_i\,. \end{aligned} \tag{7.38}$$

These are the approximations to the Rsine and Rcosine of a desired arc as given in the rule *iṣṭadoḥkoṭidhanuṣoḥ*... (*Tantrasaṅgraha*, 2.10). It is also suggested that if this approximation is not good enough, then we may iterate the above process one more step by considering the midpoint of the arc C_iM_2 and so on.[10]

7.5 Computations of *Jyā* and *Śara* by *Saṅkalita*-s

7.5.1 First and second order differences of Rsines

So far we had considered the tabular Rsines (*paṭhita-jyā*) obtained by dividing the quadrant of a circle into 24 equal arc-bits. We shall now consider the

[10]If we do not approximate the Rsine and Rcosine, M_2B_2 and OB_2, of the arc EM_2 by the nearest tabulated Rsine and Rcosine, but derive them in terms of the Rsine and Rcosine at the midpoint M_2 of the arc C_iM_2 and then make a similar approximation, we will get the third order approximation,

$$R\sin(EC_i+\Delta) \approx R\sin EC_i + \left(\frac{\Delta}{r}\right) R\cos EC_i - \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta}{r}\right)^2 R\sin EC_i + \frac{1}{2.4}\left(\frac{\Delta}{r}\right)^3 R\cos EC_i,$$

$$R\cos(EC_i+\Delta) \approx R\cos EC_i - \left(\frac{\Delta}{r}\right) R\sin EC_i - \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta}{r}\right)^2 R\cos EC_i + \frac{1}{2.4}\left(\frac{\Delta}{r}\right)^3 R\sin EC_i.$$

In this context, it should be noted that while the first order approximation, given in the previous footnote, and the second order approximation, given in equations (7.37) and (7.38), appear like the first and second order terms in a Taylor's series expansion, there is no reason that the further terms should correspond to the terms in a Taylor's series expansion.

more general case of a given arc (*iṣṭa-cāpa*) of arc-length s, which is divided into n equal arc-bits. At this stage, the general results derived are equally applicable to the particular case of the quadrant divided into 24 equal parts. Later, we shall obtain approximate results for the Rsine and Rversine of an arbitrary arc, which become more and more accurate as n becomes larger and larger.

We first define the constituent Rsines (*piṇḍa-jyā*, or more accurately *piṇḍa-bhujā-jyā*) and the corresponding Rcosines and Rversines. If $s = r\theta$, then the j-th *piṇḍa-jyā*, B_j is given by

$$B_j = R \sin\left(\frac{js}{n}\right) = r \sin\left(\frac{j\theta}{n}\right) = r \sin\left(\frac{js}{rn}\right). \tag{7.39}$$

The corresponding *koṭi-jyā* K_j, and the *śara* S_j, are given by

$$K_j = R \cos\left(\frac{js}{n}\right) = r \cos\left(\frac{j\theta}{n}\right) = r \cos\left(\frac{js}{rn}\right), \tag{7.40}$$

$$S_j = R \text{ vers}\left(\frac{js}{n}\right) = r\left[1 - \cos\left(\frac{j\theta}{n}\right)\right] = r\left[1 - \cos\left(\frac{js}{rn}\right)\right]. \tag{7.41}$$

In Figure 7.7, EC is the desired arc of length s, and C_jC_{j+1} is the $(j+1)$-th arc bit. Then the arc $EC_j = \frac{js}{n}$, and its *piṇḍa-jyā* $B_j = C_jP_j$, and the corresponding *koṭi-jyā* and *śara* are $K_j = C_jT_j$, $S_j = EP_j$. Similarly we have $B_{j+1} = C_{j+1}P_{j+1}$, $K_{j+1} = C_{j+1}T_{j+1}$, and $S_{j+1} = EP_{j+1}$.

Let M_{j+1} be the mid-point of the arc-bit C_jC_{j+1} and similarly M_j the mid-point of the previous (j-th) arc-bit. We shall denote the *piṇḍa-jyā* of the arc EM_{j+1} as $B_{j+\frac{1}{2}}$ and clearly

$$B_{j+\frac{1}{2}} = M_{j+1}Q_{j+1} .$$

The corresponding *koṭi-jyā* and *śara* are

$$K_{j+\frac{1}{2}} = M_{j+1}U_{j+1} \quad \text{and} \quad S_{j+\frac{1}{2}} = EQ_{j+1} .$$

Similarly,

$$B_{j-\frac{1}{2}} = M_jQ_j, \; K_{j-\frac{1}{2}} = M_jU_j \; \text{ and } \; S_{j-\frac{1}{2}} = EQ_j .$$

The full-chord of the equal arc-bits $\frac{s}{n}$ may be denoted α as before. Thus,

$$C_jC_{j+1} = M_jM_{j+1} = \alpha.$$

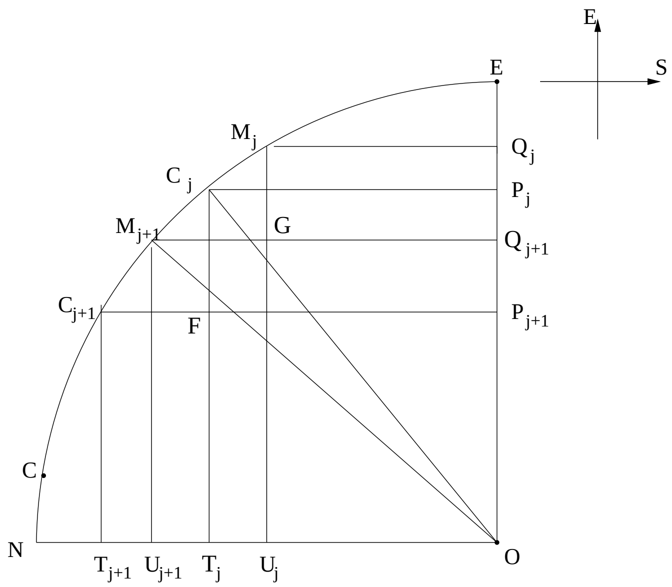


Figure 7.7: Computation of *Jyā* and *Śara* by *Saṅkalita*-s.

Let F be the intersection of C_jT_j and $C_{j+1}P_{j+1}$, and G of M_jU_j and $M_{j+1}Q_{j+1}$. As discussed before, the triangles $C_{j+1}FC_j$ and $OQ_{j+1}M_{j+1}$are similar, as their sides are mutually perpendicular. Thus we have

$$\frac{C_{j+1}C_j}{OM_{j+1}} = \frac{C_{j+1}F}{OQ_{j+1}} = \frac{FC_j}{Q_{j+1}M_{j+1}} \,. \tag{7.42}$$

Hence we obtain

$$B_{j+1} - B_j = \left(\frac{\alpha}{r}\right) K_{j+\frac{1}{2}}, \tag{7.43}$$

$$K_j - K_{j+1} = S_{j+1} - S_j = \left(\frac{\alpha}{r}\right) B_{j+\frac{1}{2}}. \tag{7.44}$$

Similarly, the triangles $M_{j+1}GM_j$ and OP_jC_j are similar and we get

$$\frac{M_{j+1}M_j}{OC_j} = \frac{M_{j+1}G}{OP_j} = \frac{GM_j}{P_jC_j}. \tag{7.45}$$

Thus we obtain

$$B_{j+\frac{1}{2}} - B_{j-\frac{1}{2}} = \left(\frac{\alpha}{r}\right) K_j, \tag{7.46}$$

$$K_{j-\frac{1}{2}} - K_{j+\frac{1}{2}} = S_{j+\frac{1}{2}} - S_{j-\frac{1}{2}} = \left(\frac{\alpha}{r}\right) B_j \,. \tag{7.47}$$

We define the Rsine-differences (*khaṇḍa-jyā*) Δ_j by

$$\Delta_j = B_j - B_{j-1} \,, \tag{7.48}$$

with the convention that $\Delta_1 = B_1$. From (7.43), we have

$$\Delta_j = \left(\frac{\alpha}{r}\right) K_{j-\frac{1}{2}} \,. \tag{7.49}$$

From (7.47) and (7.49), we also get the second order Rsine-difference (the differences of the Rsine-differences called *khaṇḍa-jyāntara*).[11]

$$\begin{aligned}
\Delta_j - \Delta_{j+1} &= (B_j - B_{j-1}) - (B_{j+1} - B_j) \\
&= \left(\frac{\alpha}{r}\right)\left(K_{j-\frac{1}{2}} - K_{j+\frac{1}{2}}\right) \\
&= \left(\frac{\alpha}{r}\right)\left(S_{j+\frac{1}{2}} - S_{j-\frac{1}{2}}\right) \\
&= \left(\frac{\alpha}{r}\right)^2 B_j \,.
\end{aligned} \tag{7.50}$$

Now, if the sum of the second-order Rsine-differences, are subtracted from the first Rsine-difference, then we get any desired Rsine-difference. That is

$$\Delta_1 - [(\Delta_1 - \Delta_2) + (\Delta_2 - \Delta_3) + \ldots + (\Delta_{j-1} - \Delta_j)] = \Delta_j \,. \tag{7.51}$$

From (7.50) and (7.51) we conclude that

$$\Delta_1 - \left(\frac{\alpha}{r}\right)^2 (B_1 + B_2 + \ldots + B_{j-1}) = \Delta_j \,. \tag{7.52}$$

7.5.2 Desired Rsines and Rversines from *Jyā-saṅkalita*

We can sum up the Rversine-differences (7.47), to obtain the *śara*, Rversine, at the midpoint of the last arc-bit as follows:

$$\begin{aligned}
S_{n-\frac{1}{2}} - S_{\frac{1}{2}} &= \left(S_{n-\frac{1}{2}} - S_{n-\frac{3}{2}}\right) + \ldots\ldots \left(S_{\frac{3}{2}} - S_{\frac{1}{2}}\right) \\
&= \left(\frac{\alpha}{r}\right)(B_{n-1} + B_{n-2} + \ldots + B_1) \,.
\end{aligned} \tag{7.53}$$

[11] This formula for the second order Rsine-difference, when applied to the tabulated Rsines obtained by dividing the quadrant of a circle into 24 parts, is nothing but the well-known relation given in the *Āryabhaṭīya* for the second order Rsine-differences. *Āryabhaṭīya* gives the approximate value $\left(\frac{1}{225'}\right)$ for the quantity $\left(\frac{\alpha}{r}\right)^2$ in (7.50); Nīlakaṇṭha (*Tantrasaṅgraha* 2.4) gives the more accurate value $233\frac{1}{2}'$ for the divisor, and Śaṅkara, in his commentary *Laghuvivṛtti*, refines it further to $233'32''$.

Using (7.50), the right hand side of (7.53) can also be expressed as a summation of the second order differences. From (7.52) and (7.53) it follows that the Rversine at the midpoint of the last arc-bit is also given by

$$\left(\frac{\alpha}{r}\right)\left(S_{n-\frac{1}{2}} - S_{\frac{1}{2}}\right) = (\Delta_1 - \Delta_n). \tag{7.54}$$

Now, since the first Rsine-difference $\Delta_1 = B_1$, any desired Rsine can be obtained by adding the Rsine-differences; these Rsine-differences have been obtained in (7.52). Before discussing the general result which is going to be obtained this way, a particular case, the eighth *piṇḍa-jyā*, is evaluated to elucidate the general result. From the definition (7.48) of the Rsine-differences, We have

$$B_8 = \Delta_8 + \Delta_7 + \ldots + \Delta_1\ . \tag{7.55}$$

By using (7.52), equation (7.55) becomes

$$\begin{aligned} B_8 &= 8\Delta_1 - \left(\frac{\alpha}{r}\right)^2 [(B_1 + B_2 + \ldots + B_7) + (B_1 + B_2 + \ldots + B_6) + \ldots + B_1] \\ &= 8B_1 - \left(\frac{\alpha}{r}\right)^2 (B_7 + 2B_6 + \ldots + 7B_1). \end{aligned} \tag{7.56}$$

In the same way, by making use of (7.52), the last *piṇḍa-jyā* can be expressed as follows:

$$\begin{aligned} B_n &= \Delta_n + \Delta_{n-1} + \ldots + \Delta_1 \\ &= n\Delta_1 - \left(\frac{\alpha}{r}\right)^2 [(B_1 + B_2 \ldots + B_{n-1}) + (B_1 + B_2 \ldots + B_{n-2}) + \ldots + B_1] \\ &= nB_1 - \left(\frac{\alpha}{r}\right)^2 [B_{n-1} + 2B_{n-2} + \ldots + (n-1)B_1]\,. \end{aligned} \tag{7.57}$$

Equations (7.53) and (7.57) express the Rsines and Rversines around the tip of the desired arc in terms of the summations and repeated summations (*saṅkalita*) of the *piṇḍa-jyā*-s, Rsines at the tips of the arc-bits. By employing (7.53), we can also re-express the expression (7.57) for the last (*piṇḍa-jyā*) in the form

$$B_n = nB_1 - \left(\frac{\alpha}{r}\right)\left[S_{n-\frac{1}{2}} + S_{n-\frac{3}{2}} + \ldots + S_{\frac{1}{2}} - nS_{\frac{1}{2}}\right] \tag{7.58}$$

The results (7.46)–(7.58), obtained so far, involve no approximations. It is now shown how better and better approximations to the Rsine and Rversine can be obtained by taking n to be very large or, equivalently, the arc-bit $\frac{s}{n}$ to be very small. Then, we can approximate the full-chord and the Rsine of the arc-bit by the length of the arc-bit $\frac{s}{n}$ itself. Also, as a first approximation, we can approximate the *piṇḍa-jyā*-s B_j in the equations (7.53), (7.57) or (7.58) by the corresponding arcs themselves. That is

$$B_j \approx \frac{js}{n} \,. \tag{7.59}$$

The result for the Rsine obtained this way is again used to obtain a better approximation for the *piṇḍa-jyā*-s B_j which is again substituted back into the equations (7.53) and (7.57) or (7.58) and thus by a process of iteration successive better approximations are obtained for the Rsine and Rversine. Now, once we take $B_j \approx \frac{js}{n}$, we will be led to estimate the sums and repeated sums of natural numbers (*ekādyekottara-saṅkalita*), when the number of terms is very large. This topic has been dealt with earlier in Chapter 6 and is briefly recalled here.

7.5.3 First, second, etc. repeated summations (*Ādya-dvitīyādi-saṅkalita*)

The first summation (*ādya-saṅkalita*) is that of the natural numbers

$$V_n^{(1)} = n + (n-1) + \ldots + 1. \tag{7.60}$$

This can be easily obtained from the series figure (*saṅkalita-kṣetra*, see Figure 7.8) to be

$$V_n^{(1)} = \frac{n(n+1)}{2} \,. \tag{7.61}$$

The second summation (*dvitīya-saṅkalita*) is given by

$$\begin{aligned} V_n^{(2)} &= V_n^{(1)} + V_{n-1}^{(1)} + \ldots + V_1^{(1)} \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n-1)n}{2} + \ldots + \frac{(1.2)}{2} \,. \end{aligned} \tag{7.62}$$

This summation is stated to be

$$V_n^{(2)} = \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3} \,. \tag{7.63}$$

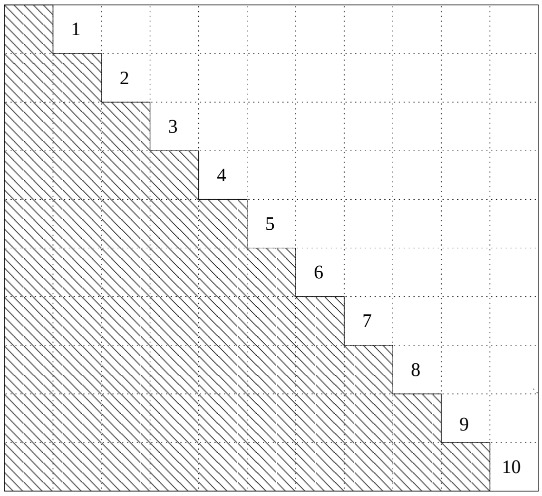


Figure 7.8: *Saṅkalita-kṣetra* for first summation.

Similarly the general k-th (repeated) summation is stated to be [12]

$$\begin{aligned} V_n^{(k)} &= V_n^{(k-1)} + V_{n-1}^{(k-1)} + \ldots + V_1^{(k-1)} \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+k)}{1.2.3.\ldots(k+1)} \,. \end{aligned} \tag{7.64}$$

What is needed for the evaluation of the Rsines and Rversines is the value of these summations for large n. They were derived earlier in Section 6.4.5 and are briefly recalled at this point. Clearly, for large n, the first summation is essentially half the square of the number terms n:

$$V_n^{(1)} \approx \frac{n^2}{1.2} \,. \tag{7.65}$$

Using the estimate (7.65) in (7.62) it follows that

$$V_n^{(2)} \approx \frac{n^2}{1.2} + \frac{(n-1)^2}{1.2} + \ldots \,. \tag{7.66}$$

Thus, what we have is essentially half the summation of squares (*varga-saṅkalita*). When n is large, the sum of squares has been shown to be

[12] As we noted earlier, the result for the second (repeated) summation is given in *Āryabhaṭīya*, *Gaṇita* 21. The general result (7.64) for the k-th (repeated) summation is also given by Nārāyaṇa Paṇḍita (c.1350) in his *Gaṇitakaumudī*, 3.19.

one-third the cube of the number of terms and thus we get

$$V_n^{(2)} \approx \frac{n^3}{1.2.3} \,. \tag{7.67}$$

This way we can show that for large n, the k-th order (repeated) summation is given by

$$V_n^{(k)} \approx \frac{n^{k+1}}{1.2.3.\ldots(k+1)} \,. \tag{7.68}$$

7.5.4 Successive corrections to *Jyā* and *Śara*

We first recall the equations (7.53) and (7.57) which give the Rsine and Rversine near the tip of the desired arc in terms of *saṅkalita*-s of the *piṇḍa-jyā*-s:

$$S_{n-\frac{1}{2}} - S_{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\alpha}{r}\right)(B_{n-1} + B_{n-2} + \ldots + B_1), \tag{7.69}$$

$$\begin{aligned} B_n &= nB_1 - \left(\frac{\alpha}{r}\right)^2 [(B_1 + B_2 + \ldots + B_{n-1}) \\ &\qquad + (B_1 + B_2 + \ldots + B_{n-2}) + \ldots + B_1]. \end{aligned} \tag{7.70}$$

As we noted earlier, these relations are exact. But now we shall show how better and better approximations to the Rsine and Rversine of any desired arc can be obtained by taking n to be very large or, equivalently, taking the arc-bit $\frac{s}{n}$ to be very small. Then both the full-chord α, and the first Rsine B_1 (the Rsine of the arc-bit), can be approximated by the arc-bit $\frac{s}{n}$ itself, and the Rversine $S_{n-\frac{1}{2}}$ can be taken as S_n and the Rversine $S_{\frac{1}{2}}$ may be treated as negligible. Thus the above relations become

$$S = S_n \approx \left(\frac{s}{nr}\right)(B_{n-1} + B_{n-2} + \ldots + B_1), \tag{7.71}$$

$$\begin{aligned} B = B_n &\approx s - \left(\frac{s}{nr}\right)^2 [(B_1 + B_2 + \ldots + B_{n-1}) \\ &\qquad + (B_1 + B_2 \ldots + B_{n-2}) + \ldots + B_1], \end{aligned} \tag{7.72}$$

where B and S are the Rsine and Rversine of the desired arc of length s and the results will be more accurate, larger the value of n.

It is possible to obtain another approximation for the Rsine by considering equation (7.58). When n is very large, it can be assumed that the Rversines at the mid-points are practically the same as the Rversines at the junctions of the arc-bits, and that the term involving $nS_{\frac{1}{2}}$ can be neglected.[13] We thus obtain

$$B = B_n \approx s - \left(\frac{s}{nr}\right)(S_n + S_{n-1} + \ldots + S_1). \tag{7.73}$$

Either of the equations (7.72) or (7.73) can be used in tandem with equation (7.71) to obtain successive corrections to Rsines and Rversines.

Now, as a first approximation, we take each *piṇḍa-jyā* B_j in (7.71) and (7.72) to be equal to the corresponding arc itself, that is

$$B_j \approx \frac{js}{n}\,. \tag{7.74}$$

Then we obtain for the Rversine

$$\begin{aligned} S &\approx \left(\frac{s}{nr}\right)\left[(n-1)\left(\frac{s}{n}\right) + (n-2)\left(\frac{s}{n}\right) + \ldots\right] \\ &= \left(\frac{1}{r}\right)\left(\frac{s}{n}\right)^2 [(n-1) + (n-2) + \ldots]. \end{aligned} \tag{7.75}$$

Now, from the estimate (7.65) for the *saṅkalita* on the right hand side of (7.75), we obtain

$$S \approx \left(\frac{1}{r}\right)\frac{s^2}{2}\,. \tag{7.76}$$

Equation (7.76) is the first *śara-saṃskāra*, correction to the Rversine. We now substitute our first approximation (7.74) to the *piṇḍa-jyā*-s B_j in (7.72), which gives the Rsine of the desired are as a second order repeated sum of the *piṇḍa-jyā*-s B_j. We then obtain

$$B \approx s - \left(\frac{1}{r}\right)^2\left(\frac{s}{n}\right)^3 [(1+2+\ldots+(n-1))+(1+2+\ldots(n-2))+\ldots]. \tag{7.77}$$

The second term in (7.77) is a *dvitīya-saṅkalita*, the second order repeated sum, and using the estimate (7.67), we obtain

$$B \approx s - \left(\frac{1}{r}\right)^2 \frac{s^3}{1.2.3}\,. \tag{7.78}$$

[13] Unlike the Rsines which are proportional to the arc-bit when the arc-bit is small, the Rversines are proportional to the square of the arc-bit and thus $nS_{\frac{1}{2}}$ can be neglected, unlike nB_1, when the arc-bit $\left(\frac{s}{n}\right)$ is very small.

Thus we see that the first correction obtained in (7.78) to the Rsine-arc-difference (*jyā-cāpāntara-saṃskāra*) is equal to the earlier correction to the Rversine (*śara-saṃskāra*) given in (7.76) multiplied by the arc and divided by the radius and 3.

Another way of deriving (7.78) is by employing the result (7.76) for the Rversines, for the *piṇḍa-śara-jyā*-s $S_{n,}$ S_{n-1} etc. which appear in (7.73); then we obtain

$$B \approx s - \left(\frac{1}{r}\right)^2 \left(\frac{s}{n}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right) [n^2 + (n-1)^2 + \ldots]. \tag{7.79}$$

Now, the second term in (7.79) can either be estimated using (6.54) as a summation of squares (*varga-saṅkalita*), or by using (7.67) as a *dvitīya-saṅkalita*, second order (repeated) summation, because each individual term there has been obtained by doing a summation as in (7.75). The equation (7.79) then reduces to (7.78). This procedure can be adopted also for deriving the higher order corrections to the Rsine-arc-difference.

It is noted that the results (7.76) and (7.78) are only approximate (*prāyika*), since, instead of the *saṅkalita* of the *piṇḍa-jyā*-s in (7.71) and (7.72), we have only carried out *saṅkalita* of the arc-bits. Now that (7.78) gives a correction to the difference btween the Rsine and the arc (*jyā-cāpāntara-saṃskāra*), we can use that to correct the values of the *piṇḍa-jyā*-s and thus obtain the next corrections to the Rversine and Rsine.

Following (7.78), the *piṇḍa-jyā*-s may now be taken as

$$B_j \approx \frac{js}{n} - \left(\frac{1}{r}\right)^2 \left[\frac{\left(\frac{js}{n}\right)^3}{1.2.3}\right]. \tag{7.80}$$

If we introduce (7.80), in (7.71), we obtain

$$\begin{aligned} S &\approx \left(\frac{1}{r}\right)\left(\frac{s}{n}\right)^2 [(n-1) + (n-2) + \ldots] \\ &- \left(\frac{s}{nr}\right)\left(\frac{1}{r}\right)^2 \left(\frac{s}{n}\right)^3 \left(\frac{1}{1.2.3}\right) [(n-1)^3 + (n-2)^3 + \ldots]. \end{aligned} \tag{7.81}$$

The first term in (7.81) was already evaluated while deriving (7.76). The second term in (7.81) can either be estimated as a summation of cubes (*ghana-saṅkalita*), or as a *tritīya-saṅkalita*, third order (repeated) summation, because each individual term there has been obtained by doing a second-order (repeated) summation. Hence, recollecting our earlier estimates for these *saṅkalita*-s, we get

$$S \approx \left(\frac{1}{r}\right)\frac{s^2}{1.2} - \left(\frac{1}{r}\right)^3 \frac{s^4}{1.2.3.4}\,. \tag{7.82}$$

Equation (7.82) gives a correction (*śara-saṃskāra*) to the earlier value (7.76) of the Rversine, which is nothing but the earlier correction to the Rsine-arc difference (*jyā-cāpāntara-saṃskāra*) given in (7.78) multiplied by the arc and divided by the radius and 4.

Again, if we use the corrected *piṇḍa-jyā*-s (7.80) in the expression (7.71) for the Rsine, we obtain

$$\begin{aligned} B \;\approx\;& s - \left(\frac{1}{r}\right)^2\left(\frac{s}{n}\right)^3 [(1+2+..+(n-1)) + (1+2+..+(n-2)) + ..] \\ & + \left(\frac{1}{r}\right)^4\left(\frac{s}{n}\right)^5 \\ & \times \left(\frac{1}{1.2.3}\right)\Big[(1^3+2^3+...+(n-1)^3) + (1^3+2^3+...+(n-2)^3) + ..\Big] \\ \approx\;& s - \left(\frac{1}{r}\right)^2 \frac{s^3}{1.2.3} + \left(\frac{1}{r}\right)^4 \frac{s^5}{1.2.3.4.5}\,, \end{aligned} \tag{7.83}$$

where, while evaluating the second order repeated summation in the third term, we have used the estimate (7.68) for the case of a fourth order repeated summation, as each individual term there has been obtained by a second order repeated summation as given in (7.77). Again, we may note that the second correction obtained in (7.83) to the Rsine-arc-difference (*jyā-cāpāntara-saṃskāra*) is equal to the earlier correction to the Rversine (*śara-saṃskāra*) given in (7.82) multitplied by the arc and divided by the radius and 5.

The above process can be repeated to obtain successive higher order corrections for the Rversine and Rsine: By first finding a correction (*jyā-cāpāntara-saṃskāra*) for the difference between the Rsine and the arc, using this correction to correct the *piṇḍa-jyā*-s B_j, and using them in equations (7.71) and (7.72) get the next correction (*śara-saṃskāra*) for the Rversines, and the next correction (*jyā-cāpāntara-saṃskāra*) for the Rsine-arc-difference itself, which is then employed to get further corrections iteratively.

7.5.5 Accurate computation of Rsines and Rversines, without using tables

The successive corrections to Rsine and Rversine, obtained as stated above, are going to be subtractive from the previous correction as they are based upon improving the estimate of the difference between the Rsine and the arc in our expression for the *piṇḍa-jyā*-s. We therefore obtain the following series of correction terms for the Rsine and Rversine:[14]

$$\begin{aligned} R\sin(s) &\approx s - \left(\frac{1}{r}\right)^2 \frac{s^3}{(1.2.3)} + \left(\frac{1}{r}\right)^4 \frac{s^5}{(1.2.3.4.5)} \\ &\qquad - \left(\frac{1}{r}\right)^6 \frac{s^7}{(1.2.3.4.5.7)} + \ldots, \qquad (7.84) \\ R\,\text{vers}(s) &\approx \left(\frac{1}{r}\right) \frac{s^2}{2} - \left(\frac{1}{r}\right)^3 \frac{s^4}{(1.2.3.4)} + \left(\frac{1}{r}\right)^5 \frac{s^6}{(1.2.3.4.6)} - \ldots (7.85) \end{aligned}$$

These can also be re-expressed in the following form given by the rule *nihatya cāpavargeṇa*...(cited also in *Yuktidīpikā*, II. 440–443)

$$R\sin(s) \approx s - s\frac{\left(\frac{s}{r}\right)^2}{(2^2+2)} + s\frac{\left(\frac{s}{r}\right)^4}{(2^2+2)(4^2+4)} - \ldots, \qquad (7.86)$$

$$\begin{aligned} R\,\text{vers}(s) &\approx \frac{r\left(\frac{s}{r}\right)^2}{(1^2+1)} - \frac{r\left(\frac{s}{r}\right)^4}{(1^2+1)(3^2+3)} + \ldots \\ &\approx \frac{r\left(\frac{s}{r}\right)^2}{(2^2-2)} - \frac{r\left(\frac{s}{r}\right)^4}{(2^2-2)(4^2-4)} + \ldots . \qquad (7.87) \end{aligned}$$

The above expressions for *jyā* and *śara* can be employed to calculate them without using the tabular values, by using the sequence of numerical values

[14] Using the standard relations (7.4), (7.6) between *jyā* and sine and *śara* and versine, (7.84) and (7.85) reduce to the series

$$\begin{aligned} \sin\theta &= \theta - \frac{\theta^3}{(1.2.3)} + \frac{\theta^5}{(1.2.3.4.5)} - \frac{\theta^7}{(1.2.3.4.5.6.7)} + \ldots , \\ \text{vers}\,\theta &= \frac{\theta^2}{(1.2)} - \frac{\theta^4}{(1.2.3.4)} + \frac{\theta^6}{(1.2..4.5.6)} - \ldots . \end{aligned}$$

given by the formulae, *vidvān* etc and *stena* etc.[15] This is indeed the method of deriving the required Rsine and Rversine without using the regular tabular values.

7.6 Accurate circumference from an approximate value

If d be the diameter of a circle and if we only know the approximate circumference c^*, a way to find a more accurate value of the circumference c, is the following. First evaluate the auxiliary Rsine value B^*, of the arc $\frac{c^*}{4}$ in a circle of radius d, as accurately as is desired. That is,

$$B^* = \frac{c^*}{4} - \left(\frac{1}{d}\right)^2 \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{c^*}{4}\right)^3 + \left(\frac{1}{d}\right)^2 \frac{1}{1.2.3.4.5}\left(\frac{c^*}{4}\right)^5 \dots \, . \tag{7.88}$$

Let K^* be the corresponding Rcosine, namely

$$K^* = (d^2 - B^{*2})^{\frac{1}{2}}. \tag{7.89}$$

Let Δ be given by

$$\Delta = \left(\frac{B^{*2}}{2}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{K^{*2}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{7.90}$$

Let δ be the arc corresponding to the Rsine value of Δ, which can be calculated by the relation

$$\Delta + \left(\frac{1}{d}\right)^2 \frac{1}{1.2.3}\,\Delta^3 \approx \delta. \tag{7.91}$$

---

[15] The formulae *vidvān* etc. and *stena* etc., are attributed to Mādhava by Nīlakaṇṭha in his *Āryabhaṭīya-bhāṣya, Gaṇitapāda*, 17 (see also, *Yuktidīpikā*, II. 437–438). If the quadrant of a circle is assigned the measure $q = 5400'$, then for a given arc s, the corresponding Rsine given by (7.86) can be expressed in the form:

$$R\sin(s) \approx s - \left(\frac{s}{q}\right)^3 \left(u_3 - \left(\frac{s}{q}\right)^2 \left(u_5 - \left(\frac{s}{q}\right)^2 \left(u_7 - \left(\frac{s}{q}\right)^2 \left(u_9 - \left(\frac{s}{q}\right)^2 u_{11}\right)\right)\right)\right),$$

where, the values of u_{11}, u_9, u_7, u_5, and u_3 are given by the formulae *vidvān* etc., as follows: $u_{11} = 44'''$, $u_9 = 33''06'''$, $u_7 = 16'05''41'''$, $u_5 = 273'57''47'''$ and $u_3 = 2220'39''40'''$. The above expression gives the values of Rsine of any arc accurately up to the thirds. Similarly, the formulae *stena* etc., are used to calculate the Rversine of any arc accurately up to the thirds. Mādhava has also given the tabulated sine values (for arcs in multiples of $225'$) accurately to the thirds in the rule *śreṣṭhaṃ nāma variṣṭhānāṃ*...(cited by Nīlakaṇṭha in his *Āryabhaṭīyabhāṣya*, *Gaṇitapāda*, 12).

Then, an accurate circumference is given by

$$c = 4\left[\left(\frac{c^*}{4}\right) + \delta\right]. \tag{7.92}$$

The rationale for this procedure is also explained. If c^* is the accurate circumference itself, then B^{*2} and K^{*2} will be the squares of the Rsine and Rcosine of one-eighth the circumference of a circle with radius (and not diameter) d, and hence will be equal to $\frac{d^2}{2}$. Hence (by the *jīve-paraspara-nyāya* to be stated shortly), Δ is nothing but the Rsine of the difference of one-eighth the true circumference and rough circumference of that circle. Therefore four times the corresponding arc will give the correction to the approximate value of the circumference c^*.

7.7 Square of Rsine

The square of the Rsine of an arc is given by the rule *nihatya cāpavargeṇa* ... (*Yuktidīpikā* II. 455–456)

$$R\sin^2(s) = s^2 - s^2\frac{\left(\frac{s}{r}\right)^2}{\left(2^2 - \frac{2}{2}\right)} + s^2\frac{\left(\frac{s}{r}\right)^4}{\left(2^2 - \frac{2}{2}\right)\left(3^2 - \frac{3}{2}\right)} - \dots\ . \tag{7.93}$$

The values of this can also be found by using the formulae *śaurirjayati*...(cited also in *Yuktidīpikā* II. 457–458)

7.8 Derivation of Rsines from *Jīve-paraspara-nyāya*

7.8.1 *Jīve-paraspara-nyāya*

The *jīve-paraspara-nyāya* is the famous rule of Mādhava (cited for instance, in *Tantrasaṅgraha* 2.12), which corresponds to the following result. If s_1 and s_2 are two arcs then

$$R\sin(s_1 \pm s_2) = \left(\frac{1}{r}\right)[R\sin(s_1)\ R\cos(s_2) \pm R\cos(s_1)\ R\sin(s_2)]. \tag{7.94}$$

The proof of this is illustrated for the case when s_1 is the arc composed of the first and the second arc-bits and s_2 is the third arc-bit, when a quadrant is divided as usual into 24 equal arc-bits. In the figure 7.9 below (which is not to scale), s_1 is the arc EA_2 and s_2 is the arc A_2A_3. Join the radius OA_2 and let it meet the full-chord of the arc A_1A_3 at its midpoint L. Now, $R\sin(s_1) = A_2B_2$, $R\cos(s_1) = A_2S_2$, and since A_3L is the half-chord of the arc A_1A_3 which is double s_2, we have $R\sin(s_2) = A_3L$ and $R\cos(s_2) = OL$. From L draw LC parallel to the north-south line LD parallel to the east-west line. Let the third Rsine A_3B_3 meet LD at P and let the first Rcosine A_1S_1 meet LC at Q.

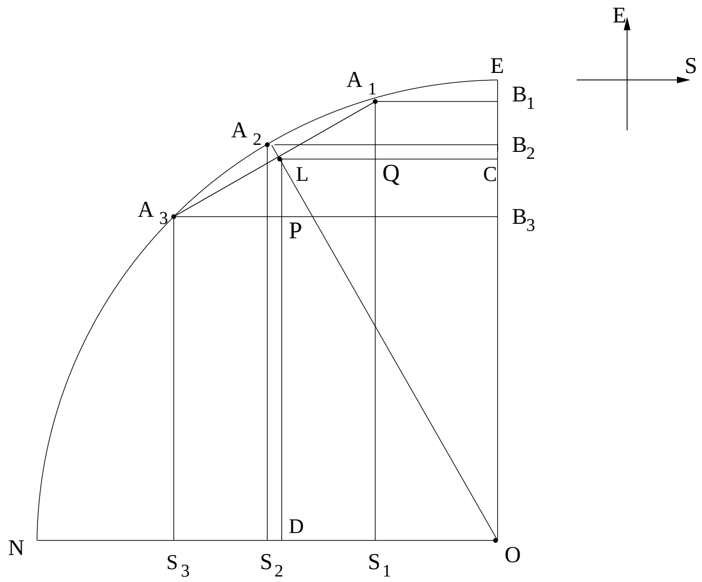


Figure 7.9: *Jīve-paraspara-nyāya*.

Now, the triangles A_3PL and A_2S_2O are similar as the sides are mutually perpendicular. Hence,

$$\frac{A_3P}{A_2S_2} = \frac{A_3L}{A_2O} = \frac{PL}{S_2O} \,. \tag{7.95}$$

Hence, we get

$$\left(\frac{1}{r}\right) R\sin(s_1) R\sin(s_2) \;=\; PL, \tag{7.96}$$

$$\left(\frac{1}{r}\right) R\cos(s_1) R\sin(s_2) \;=\; PA_3. \tag{7.97}$$

Then, triangles OLC and OA_2B_2 are similar. Hence,

$$\frac{LC}{A_2B_2} = \frac{OL}{OA_2}\ . \tag{7.98}$$

Therefore,

$$\left(\frac{1}{r}\right) R\sin(s_1) R\cos(s_2) = LC. \tag{7.99}$$

Then again, triangles OLD and OA_2S_2 are similar. Hence,

$$\frac{LD}{A_2S_2} = \frac{OL}{OA_2}\ . \tag{7.100}$$

Hence,

$$\left(\frac{1}{r}\right) R\cos(s_2) R\cos(s_1) = LD. \tag{7.101}$$

Now we have the relations

$$\begin{aligned} LC &\ + \ A_3P = A_3B_3, \\ LC &\ - \ A_3P = A_1B_1. \end{aligned}$$

These correspond to the relations

$$R\sin(s_1 \pm s_2) = \left(\frac{1}{r}\right) [R\sin(s_1)\ R\cos(s_2) \pm R\cos(s_1) R\sin(s_2)]. \tag{7.102}$$

Similarly, we have

$$\begin{aligned} LD &\ - \ PL = A_3S_3, \\ LD &\ + \ PL = A_1S_1. \end{aligned}$$

These correspond to the relations

$$R\cos(s_1 \pm s_2) = \left(\frac{1}{r}\right) [R\cos(s_1)\ R\cos(s_2) - (\pm) R\sin(s_1) R\sin(s_2)]. \tag{7.103}$$

These relations (7.102) and (7.103) can be used to calculate various tabulated Rsines, starting from the first Rsine. They can also be used to find the Rsine and Rcosine of a desired arc from the nearest tabular values and the Rsine and Rcosine of the remaining arc (*śiṣṭa-cāpa*).

7.8.2 *Jīve-paraspara-nyāya*: An alternative proof

The second proof is also for the same case and we can refer to the same figure 7.9. We start with the evaluation of A_3P and PL which has already been done in equations (7.96) and (7.97). Now consider the triangle A_3LB_3. Here, it has already been noted that A_3L is $R\sin(s_2)$. It is noted that LB_3 is $R\sin(s_1)$.[16] The perpendicular LP divides the base A_3B_3 into the two intercepts (*ābādhā*-s), A_3P and B_3P. It is well known that these base-intercepts are equal to the difference of the squares of the corresponding side and the perpendicular. We have already evaluated one intercept A_3P and the perpendicular LP in equations (7.96) and (7.97). The other intercept

$$\begin{aligned} B_3P^2 &= B_3L^2 - LP^2 \\ &= R\sin^2(s_1) - \left(\frac{1}{r}\right)^2 R\sin^2(s_1) R\sin^2(s_2). \end{aligned} \tag{7.104}$$

Therefore,

$$B_3P = \left(\frac{1}{r}\right) R\sin(s_1) R\cos(s_2). \tag{7.105}$$

The expression (7.97) for A_3P can also be derived in this way. Now using (7.97) and (7.105), we get

$$\begin{aligned} R\sin(s_1+s_2) &= A_3B_3 = B_3P + A_3P \\ &= \left(\frac{1}{r}\right)[R\sin(s_1)R\cos(s_2) + R\cos(s_1)R\sin(s_2)]. \end{aligned} \tag{7.106}$$

7.9 Principle of the area of a triangle

With a view to arrive at a method for deriving the Rsines without using the radius, the principles of the area of a triangle and a cyclic quandrilateral are dealt with. First the area of a triangle is discussed:

Consider a general scalene triangle (*viṣama-tryaśra*) ABC, with vertex A and base BC as in Figure 7.10. Draw the perpendicular AD from the vertex

[16] This can be shown by noting that LB_3 is half the full-chord of an arc which is double of the arc A_1A_3 which is equal to s_1. For this, produce A_3B_3 to meet the circle at D_1 (not shown in the figure). Then, in the triangle $A_3A_1D_1$, L is the midpoint of A_3A_1 and B_3 the midpoint of A_3D_1. Hence LB_3 is half the chord A_1D_1, which is the full chord of an arc equal to four arc-bits, or an arc which is double the arc A_1A_3.

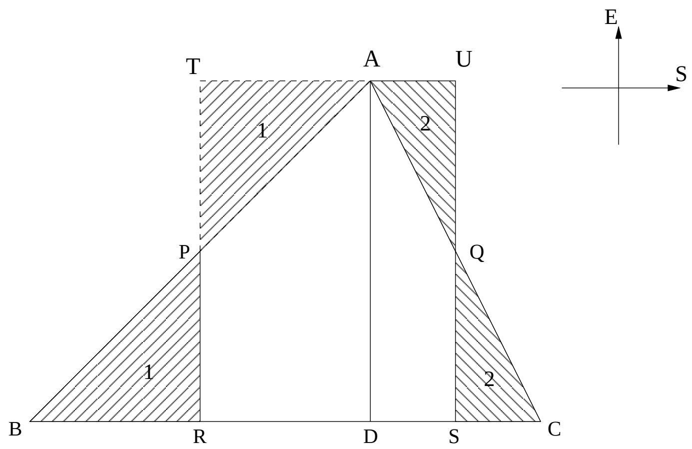


Figure 7.10: Area of a triangle.

to the base. Then the two base-intercepts BD, DC and the attitude AD can be evaluated in terms of the sides as follows.

$$BD^2 = AB^2 - AD^2, \tag{7.107}$$
$$CD^2 = AC^2 - AD^2. \tag{7.108}$$

Hence

$$BD^2 - CD^2 = AB^2 - AC^2. \tag{7.109}$$

Since $BC = BD + CD$, we get (assuming $AB > AC$, which implies $BD > CD$)

$$BD = \frac{1}{2}\left[BC + \frac{AB^2 - AC^2}{BC}\right], \tag{7.110}$$
$$CD = \frac{1}{2}\left[BC - \frac{AB^2 - AC^2}{BC}\right], \tag{7.111}$$

and

$$AD = (AB^2 - BD^2)^{\frac{1}{2}}. \tag{7.112}$$

The area of the triangle is half the base BC multiplied by the altitude AD. This can be seen by cutting the triangle along the lines joining the midpoints of the sides with the midpoints of the base-segments and reconstituting them into a rectangle as shown in Figure 7.10.

7.10 Diagonals of a cyclic quadrilateral

Before proceeding to evaluate the area of a cyclic quadrilateral, we first obtain expression for its diagonals in terms of its sides. In Figure 7.11 we consider a cyclic quadrilateral $ABCD$, such that its base AB on the western side is the largest side and the face CD on the east in the smallest. The side BC to the south is smaller than AB, but larger than the other side DA to the north. The sides are full-chords of the associated arcs, and the diagonals AC and BD are full-chords of arcs which are sums of the arcs associated with adjacent sides. First we shall obtain a result about such chords.

7.10.1 Product of two full-chords is equal to the difference in the squares of the full-chords associated with half the sum and difference of the arcs

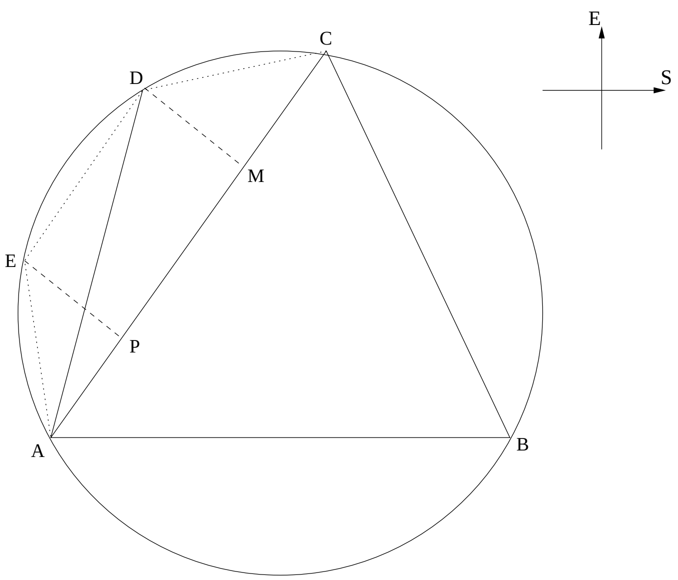


Figure 7.11: Cyclic quadrilateral.

In Figure 7.11, if DM is the perpendicular from the vertex D of the cyclic quadrilateral $ABCD$ onto the diagonal AC, then in the triangle ADC, the difference in the squares of the sides AD, DC is equal to the difference in the square of the base segments (*ābādhā*)

$$AD^2 - DC^2 = AM^2 - MC^2. \tag{7.113}$$

Hence,

$$\begin{aligned} AD^2 - DC^2 &= (AM + MC)(AM - MC) \\ &= AC(AM - MC). \end{aligned} \tag{7.114}$$

Now, $AM + MC = AC$ is the full-chord associated with sum of the arcs associated with the chords AD and DC. Similarly, $AM - MC$ is the chord associated with the difference of the arcs associated with AD and DC. To see this, mark off E on the circle, such that arc AE is equal to the arc CD. Then, chord AE is equal to the chord CD and hence, DE is parallel to AC and $ACDE$ is a trapezium and $DE = PM = AM - MC$.

Hence $AM - MC$ is the chord associated with the arc DE which is the difference between the arc AD and arc CD. If we denote these arcs by s_1, s_2, then we have shown[17] (with our convention that $s_1 > s_2$)

$$\text{Chord}^2(s_1) - \text{Chord}^2(s_2) = \text{Chord}(s_1 + s_2)\text{Chord}(s_1 - s_2). \tag{7.115}$$

Equation (7.115) is also equivalent to the following:

$$\text{Chord}(s_1)\text{Chord}(s_2) = \text{Chord}^2\left[\frac{(s_1 + s_2)}{2}\right] - \text{Chord}^2\left[\frac{(s_1 - s_2)}{2}\right]. \tag{7.116}$$

7.10.2 Sum of the products of the two pairs of sides associated with a diagonal is equal to the product of the diagonal with the third diagonal

In Figure 7.12 we consider the cyclic quadrilateral $ABCD$ with the specifications mentioned above, namely that, the base AB on the western side is the largest side and the face CD on the east is the smallest side and the side BC to the south is smaller than AB, but larger than the other side DA to the north.

[17] Relations (7.115) and (7.116) are equivalent to the trigonometric relations:

$$\begin{aligned} \sin^2(\theta_1) - \sin^2(\theta_2) &= \sin(\theta_1 + \theta_2)\sin(\theta_1 - \theta_2), \\ \sin(\theta_1) sin(\theta_2) &= \sin^2\left[\frac{(\theta_1 + \theta_2)}{2}\right] - \sin^2\left[\frac{(\theta_1 - \theta_2)}{2}\right]. \end{aligned}$$

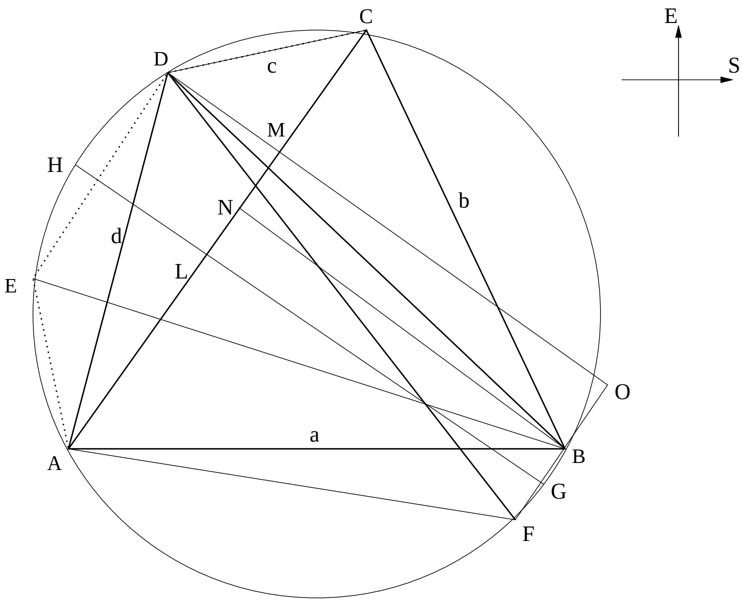


Figure 7.12: Diagonals of a cyclic quadrilateral.

In the arc AC, mark the point E such that arc AE is equal to the arc of the face DC . Then the chord ED is parallel to AC and

$$\text{Arc}(ED) = \text{Arc}(AD) - \text{Arc}(DC). \tag{7.117}$$

In the same way mark the point F in the arc AB such that arc AF is equal to the arc BC. Then the chord FB is parallel to AC and

$$\text{Arc}(FB) = \text{Arc}(AB) - \text{Arc}(BC). \tag{7.118}$$

Let H be the midpoint of arc ED and HG be the diameter of the circle. Then, we have

$$\begin{aligned} \text{Arc}(AH) &= \text{Arc}(AE) + \text{Arc}(EH) \\ &= \text{Arc}(CD) + \text{Arc}(DH) \\ &= \text{Arc}(HC). \end{aligned} \tag{7.119}$$

Also, since HG is the diameter,

$$\text{Arc}(HA) + \text{Arc}(AG) = \text{Arc}(HC) + \text{Arc}(CG). \tag{7.120}$$

From (7.119) and (7.120) it follows that.

$$\text{Arc}(AG) = \text{Arc}(GC). \tag{7.121}$$

Since, arcs AF and BC are equal, it follows that G is the midpoint of FB, and

$$\text{Arc}(FG) = \text{Arc}(GB) = \frac{1}{2}[\text{Arc}(AB) - \text{Arc}(BC)]. \tag{7.122}$$

Now BD may be termed the first diagonal of the quadrilateral and AC the second diagonal. As mentioned earlier, these are full-chords associated with sums of the arcs associated with different pairs of adjacent sides. There is one more "diagonal" which is the full-chord associated with the sum of the arcs associated with the opposite sides. This can also be obtained, say by interchanging the sides AB and BC in the quadrilateral, which leads to the quadrilateral $AFCD$, which has the diagonal DF. This is the "third diagonal" of the original quadrilateral $ABCD$, and

$$\text{Arc}(DF) = \text{Arc}(DC) + \text{Arc}(CF) = \text{Arc}(DC) + \text{Arc}(AB). \tag{7.123}$$

Now, if we instead interchange the sides AD and DC, then we get the quadrilateral $ABCE$, which has the diagonal EB. But

$$\begin{aligned} \text{Arc}(EB) &= \text{Arc}(EA) + \text{Arc}(AB) \\ &= \text{Arc}(DC) + \text{Arc}(AB) \\ &= \text{Arc}(DF). \end{aligned} \tag{7.124}$$

Hence, we are led to the same third diagonal $EB = DF$. It is also noted that since, we have exhausted all the possibilities of choosing pairs from a given set of four arcs, there are no more diagonals possible.

Now we consider the sum $AD.DC + AB.BC$. This is said to be the product of the sides associated with the first diagonal DB (*ādyakarṇāśrita-bhujāghātaikya*). From the earlier result (7.116) on the product of two full-chords being equal to the difference in the squares of the full-chords associated with half their sum and half their difference, we get

$$\begin{aligned} AD \times DC &= \text{Chord}^2\left[\frac{1}{2}(\text{Arc}(AD) + \text{Arc}(DC))\right] \\ &\quad - \text{Chord}^2\left[\frac{1}{2}(\text{Arc}(AD) - \text{Arc}(DC))\right], \end{aligned} \tag{7.125}$$

$$\begin{aligned} AB \times BC &= \text{Chord}^2\left[\frac{1}{2}(\text{Arc}(AB) + \text{Arc}(BC))\right] \\ &\quad - \text{Chord}^2\left[\frac{1}{2}(\text{Arc}(AB) - \text{Arc}(BC))\right]. \end{aligned} \tag{7.126}$$

Now, since the sum of the arcs AB, BC, CD and DA is the circumference, half the sum of the arcs AB and BC will be the complement of half the sum of the arcs CD and DA and hence the first terms in equations (7.125), (7.126) are the *bhujā* and *koṭi* of each other in a semicircle. Thus, if d is the diameter of the circle

$$\begin{aligned}\text{Chord}^2 &\left[\frac{1}{2}(\text{Arc}(AD) + \text{Arc}(DC))\right] \\ &+ \text{Chord}^2 \left[\frac{1}{2}(\text{Arc}(AB) + \text{Arc}(BC))\right] = d^2. \qquad (7.127)\end{aligned}$$

Now, the diameter is the full-chord associated with arc GH, and half the difference of the arcs AD and DC is given by the arcs HE and HD. Hence, applying (7.115), we get

$$d^2 - \text{Chord}^2 \left[\frac{1}{2}[\text{Arc}(AD) - \text{Arc}(DC)]\right] = \text{Chord}(GE).\text{Chord}(GD). \quad (7.128)$$

Now, since the arcs GE and GD are obtained by subtracting equal amounts from the diameter, the corresponding chords are equal and hence,

$$d^2 - \text{Chord}^2 \left[\frac{1}{2}[\text{Arc}(AD) - \text{Arc}(DC)]\right] = GD^2. \qquad (7.129)$$

Finally, if we note that half the difference of the arcs AB and BC is given by the arc GB, we get from (7.125)–(7.129) that

$$AD \times DC + AB \times BC = GD^2 - GB^2. \qquad (7.130)$$

On using the relation (7.115), equation (7.130) becomes

$$\begin{aligned}AD \times DC + AB \times BC &= \text{Chord}[\text{Arc}(GD) + \text{Arc}(GB)] \times \\ &\quad\ \text{Chord}[\text{Arc}(GD) - \text{Arc}(GB)] \\ &= \text{Chord}[\text{Arc}(GD) + \text{Arc}(GF)] \times \\ &\quad\ \text{Chord}[\text{Arc}(GD) - \text{Arc}(GB)] \\ &= DF \times DB. \qquad (7.131)\end{aligned}$$

Thus we have shown that the sum of the products of the two pairs of sides associated with the first diagonal is equal to the product of the first diagonal with the third diagonal.

7.10.3 The area of a cyclic quadrilateral is equal to the product of the three diagonals divided by twice the circum-diameter

In Figure 7.12, consider the second diagonal AC as the base of the two triangles ABC and ADC. Now from the vertex D draw the perpendicular DM to AC and produce it to meet FB at O, and from the vertex B draw the perpendicular BN to AC. Since we have already noted that the chords DE and FB are both parallel to AC, it follows that BN and DM are also parallel and the sum of the perpendiculars is given by

$$DM + BN = DM + MO = DO. \tag{7.132}$$

The area of the cyclic quadrilateral $ABCD$ is the sum of the areas of the two triangles ABC and ACD, and is hence given by

$$A = \frac{1}{2}AC(DM + BN) = \frac{1}{2}AC \times DO. \tag{7.133}$$

We now employ the result (which shall be proved later in Section 7.13) that the product of two sides of triangle divided by the diameter is equal to the altitude drawn to the third side. Using this in the triangle DBF, we get the altitude DO to be

$$DO = \frac{DB \times DF}{d}\ . \tag{7.134}$$

From (7.133) and (7.134) we obtain

$$A = \frac{AC \times DB \times DF}{2d}\ . \tag{7.135}$$

Thus, the area of a cyclic quadrilateral is given by the product of the three diagonals divided by twice the circum-diameter.

7.10.4 Derivation of the *Karṇas* (diagonals)

We have already shown in (7.131) that the sum of the products of the two pairs of sides related to the first diagonal is equal to the product of the first and third diagonals. Similarly, we can show that the sum of the products of the two pairs of sides associated with the second diagonal is the product of the second and the third diagonals. That is

$$AB \times AD + DC \times BC = DF \times AC. \tag{7.136}$$

Finally, it can be shown in the same way that the sum of the products of the opposite sides is equal to the product of the first and second diagonals. That is

$$AB \times CD + AD \times BC = BD \times AC. \tag{7.137}$$

From the equations (7.131), (7.136) and (7.137), we can obtain the three diagonals in terms of the sides of the cyclic quadrilaterals. We shall adopt the notation: $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, and $DA = d$ (not to be confused with the diameter) for the sides and $DB = x$, $AC = y$ and $DF = z$ for the diagonals. Then we obtain

$$x = \left[(ab+cd)\frac{(ac+bd)}{(ad+bc)}\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{7.138}$$

$$y = \left[(ac+bd)\frac{(ad+bc)}{(ab+cd)}\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{7.139}$$

$$z = \left[(ab+cd)\frac{(ad+bc)}{(ac+bd)}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{7.140}$$

The expression (7.135) for the area of the cyclic quadrilateral becomes

$$A = \frac{x.y.z}{2d}\ . \tag{7.141}$$

7.11 Cyclic quadrilateral and *Jīve-paraspara-nyāya*

It is now shown that the result (7.137) that the sum of the product of opposite sides is equal to the product of the diagonals can be viewed as a result for Rsines, and then it will be the same as the *jīve-paraspara-nyāya* discussed earlier. First the proof of the *jīve-paraspara-nyāya* given in Section 7.8 is recalled.

Now, to understand that the *jīve-paraspara-nyāya* is equivalent to the result (7.137), we shall consider in Figure 7.13, the quadrant of a circle EA divided into a number of equal arc-bits as before. A_2A_4 is the full-chord of the third and fourth arc-bits together and the radius OA_3 bisects it perpendicularly at L. Let A_2M_2 be the second sine. Since both L and M_2 lie on semi-circles with OA_2 as the diameter, OLA_2M_2 is a cyclic quadrilateral with the radius OA_2 as a diagonal. The side A_2L, being a half-chord of two arc-bits, is nothing but the Rsine of one arc-bit. Then OL will be the corresponding

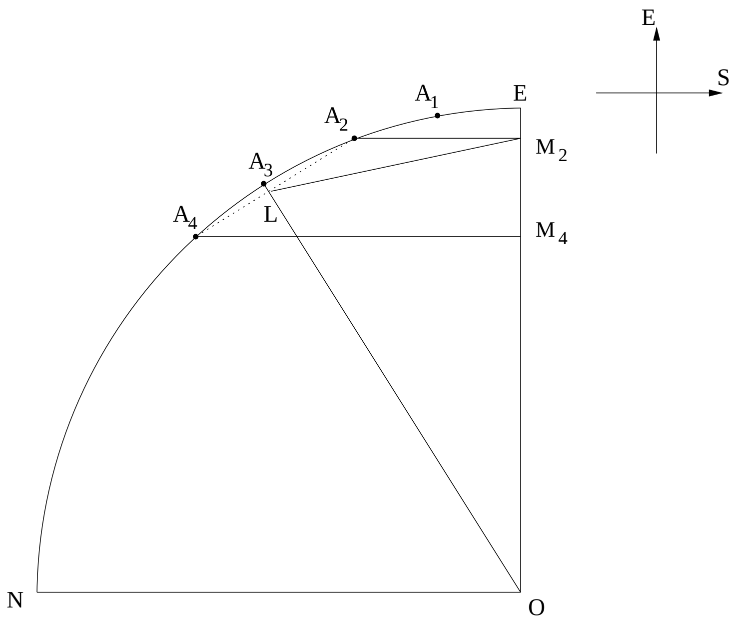


Figure 7.13: Cyclic quadrilateral and *Jīve-paraspara-nyāya*.

Rcosine. As already noted A_2M_2 is the Rsine of two arc-bits, and then OM_2 will be the corresponding Rcosine. It is said that the other diagonal LM_2 will be the Rsine of three arc-bits.[18]

If we now denote one arc-bit by s_1 and two arc-bits by s_2, then the *jīve-paraspara-nyāya*, (7.102),

$$R\sin(s_1)R\cos(s_2) + R\cos(s_1)R\sin(s_2) = r\ R\sin(s_1 + s_2), \qquad (7.142)$$

becomes

$$LA_2 \times OM_2 + OL \times A_2M_2 = OA_2 \times LM_2\ . \qquad (7.143)$$

This is the same as the relation (7.137) for the sum of the product of opposite sides of the cyclic quadrilateral OLA_2M_2.

[18]This can be proved by showing that LM_2 is equal to the half-chord of an arc which is double the arc EA_3. The procedure is similar to the one outlined in fn.16.

7.12 Derivation of tabular Rsines without using the radius

If $B_1, B_2 \ldots$, are the various tabulated Rsines when the quadrant is divided into a number of equal arc-bits, then we can use the equation (7.115) for the difference in the squares of chords of two arcs to obtain

$$\begin{aligned} B_2^2 &- B_1^2 = B_3 B_1, &(7.144)\\ B_3^2 &- B_1^2 = B_4 B_2 \,. &(7.145) \end{aligned}$$

In general, we have

$$B_{j+1} = \frac{(B_j^2 - B_1^2)}{B_{j-1}} \,. \qquad (7.146)$$

This can be used to calculate the tabulated Rsines without using the radius.

7.13 Altitude and circum-diameter of a triangle

Now is proved the result that the product of two sides of a triangle divided by its circum-diameter is equal to the altitude on the third side, which was used to obtain the expression (7.135) for the area of the cyclic quadrilateral in terms of its diagonals. In Figure 7.14, A_4B_4, A_6B_6 and $A_{10}B_{10}$ are the full-chords associated with the fourth, sixth and tenth tabulated Rsines; A_2 is the tip of the second arc-bit. Then A_2B_{10} is the full-chord associated with 12 arc-bits and A_2A_{10} is the full chord associated with 8 arc-bits. In the triangle, $A_2A_{10}B_{10}$, draw the altitude A_2P to the base $A_{10}B_{10}$.

Draw the chords A_6C_6 and B_4D_4 parallel to the east-west line and hence perpendicular to the full-chord $A_{10}B_{10}$ associated with the tenth Rsine. Draw also the diameters A_6OD_6 and B_4OC_4. These diameters intersect the full-chords A_2A_{10} and A_2B_{10} perpendicularly. Now the triangles $A_2A_{10}P$ and $D_6A_6C_6$ are similar as their sides are mutually perpendicular. Hence

$$\frac{A_2P}{D_6C_6} = \frac{A_2A_{10}}{D_6A_6} = \frac{A_{10}P}{A_6C_6} \,. \qquad (7.147)$$

Hence

$$A_2P = A_2A_{10} \times \frac{D_6C_6}{D_6A_6} \,. \qquad (7.148)$$

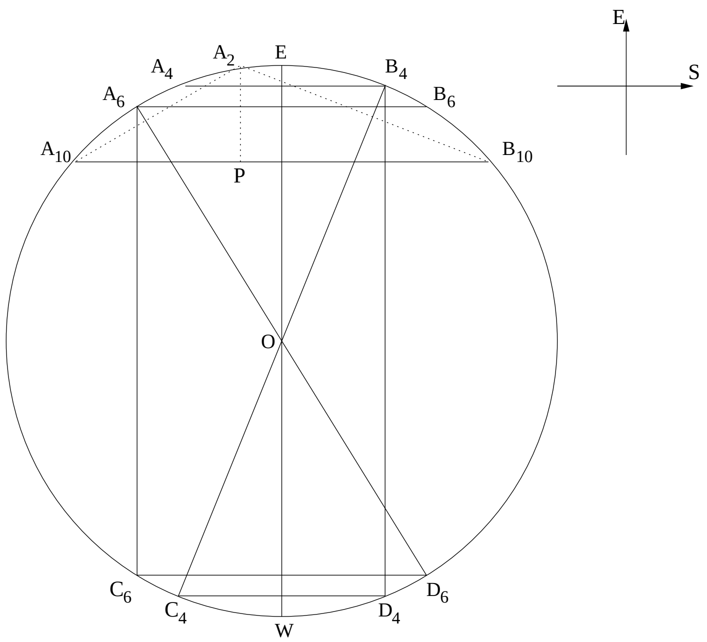


Figure 7.14: Altitude and circum-diameter of a triangle.

If we note that D_6A_6 is the diameter and D_6C_6, the full-chord associated with 12 arc-bits, is equal to A_2B_{10}, then we obtain

$$A_2P = A_2A_{10} \times \frac{A_2B_{10}}{d} \,. \tag{7.149}$$

Thus we have proved that in the triangle $A_2A_{10}B_{10}$, the product of the sides A_2A_{10} and A_2B_{10} divided by the diameter is equal to the altitude A_2P to the third side $A_{10}B_{10}$.

Now, we may also note that the triangle $A_2B_{10}P$ and $C_4B_4D_4$ are similar as their sides are mutually perpendicular. Hence

$$\frac{A_2P}{C_4D_4} = \frac{A_2B_{10}}{C_4B_4} = \frac{B_{10}P}{B_4D_4} \,. \tag{7.150}$$

From (7.147) and (7.150), we obtain[19]

$$A_{10}B_{10} = A_{10}P + PB_{10} = \frac{A_2A_{10} \times A_6C_6}{A_6D_6} + \frac{B_4D_4 \times A_2B_{10}}{C_4B_4}$$

[19]It may be noted that equation (7.151) is essentially the *jīve-paraspara-nyāya* for the Rsines (which are half the full-chords) of the sum of 4 and 6 arc-bits, and the above constitutes one more demonstration of this rule.

$$= \left(\frac{1}{d}\right)(A_2A_{10} \times A_6C_6 + B_4D_4 \times A_2B_{10}). \quad (7.151)$$

Thus have been derived both the altitude and the base of the triangle $A_2A_{10}B_{10}$.

7.15 Area of a cyclic quadrilateral

The earlier result (7.141) gave the area of a cyclic quadrilateral in terms of the three diagonals and the circum-diameter. Though the three diagonals can be expressed in terms of the sides by equations (7.138) to (7.140), the expression for the area still involves the circum diameter. Now is shown a way of calculating the area of a cyclic quadrilateral given only the four sides (without employing the diameter), so that this expression for the area can also be used in conjunction with (7.138)–(7.141), to obtain the circum-diameter also in terms of the sides.

The final result to be derived is given by the rule *sarvadoryutidalam...*(*Līlāvatī*, 169), which may be expressed as follows using the same notation used in equations (7.138)–(7.140):[20]

$$A = [(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)]^{\frac{1}{2}}, \quad (7.152)$$

where, the semi-perimeter s is given by

$$s = \frac{(a+b+c+d)}{2}. \quad (7.153)$$

A problem given in *Līlāvatī* 171, is also cited in this connection, where $a = 75$, $b = 40$, $c = 51$ and $d = 68$. The corresponding first diagonal (which may be calculated by (7.138)) is noted to be 77. This example is

[20]Combining (7.152) with (7.138) - (7.141),we are lead to the following formula for the circum-radius of a cyclic quadrilateral, in terms of its sides (cited by *Parameśvara* in his commentary *Vivaraṇa* on *Līlāvatī*; also cited by *Śaṅkara* in his commentary *Kriyākramakarī* on *Līlāvatī*):

$$r = \left(\frac{1}{4}\right)\left[\frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

cited to illustrate the set up or the kind of arrangement of the sides that is being considered here.[21]

7.15.1 Area in terms of the *Lamba-nipātāntara* and *Lamba-yoga* (interstice between the altitudes and the sum of altitudes)

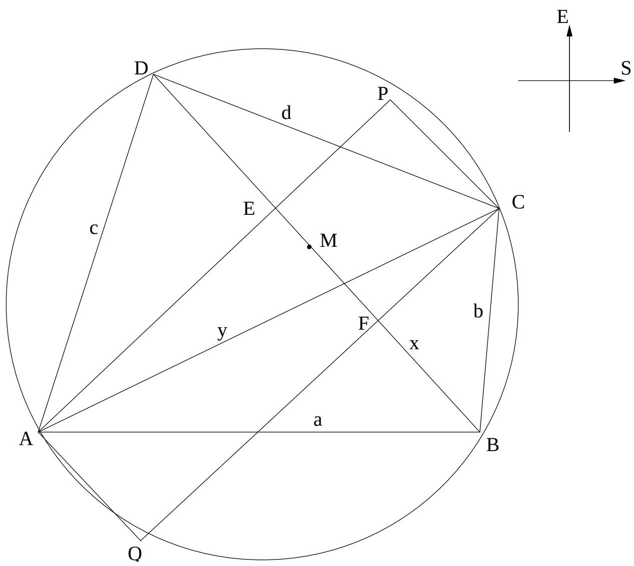


Figure 7.15: Area of a cyclic quadrilateral.

In Figure 7.15 we consider a cyclic quadrilateal $ABCD$ of the type mentioned above. Draw the altitudes AE and CF to the diagonal DB, which may be considered as the base of the two triangles CDB and ADB. Produce these altitudes such that they form the opposite sides of a rectangle, whose length $AP = CQ$ is the sum of the altitudes (*lamba-yoga*) and breadth $CP = AQ$ is equal to EF, the interstice (*lamba-nipātāntara*) between the feet of the perpendiculars AE and CF.

The procedure for deriving the area of the cyclic quadrilateral is the same as followed earlier, namely express it as the sum of the areas of the two triangles into which it is divided by a diagonal and calculate the area of the

[21]Note that this arrangement differs slightly from the arrangement considered in Section 7.10, where it was assumed that $a > b > d > c$. Now we have $a > d > c > b$.

triangles by using the diagonal as the base and the perpendiculars drawn to it as the altitudes. Only difference, now, is that the sum of these altitudes (*lamba-yoga*) will be obtained in terms of the sides of the quadrilateral.

The square of the area of the quadrilateral is given by

$$\begin{aligned} A^2 &= \left[\frac{1}{2} BD \times (AE + CF)\right]^2 \\ &= \left(\frac{1}{4}\right) BD^2 \times AP^2. \end{aligned} \tag{7.154}$$

Now the *lamba-yoga* AP and the *lamba-nipātāntara* EF are related to the other diagonal AC as they are the sides of the rectangle of which AC is the diagonal. Hence

$$AP^2 + EF^2 = AC^2. \tag{7.155}$$

Hence the area of the cyclic quadrilateral can be expressed in terms of the diagonals BD, AC and the *lamba-nipātāntara* EF as follows:

$$A^2 = \left(\frac{1}{4}\right) [BD^2 \times (AC^2 - EF^2)]. \tag{7.156}$$

7.15.2 Derivation of the *Lamba-nipātāntara*

In Figure 7.15 we have the situation (same as in the example of *Līlāvatī*, cited above) that $AB > AD$ and $CD > CB$. That is, in the triangles ABD and CBD, the longer sides AB and CD meet different vertices of the base BD . Then the feet of the perpendiculars AE and CF fall on different sides of the mid-point M of the diagonal BD. Then the *lamba-nipātāntara*, EF, is given by the sum of the distances of the feet of the perpendiculars from the mid-point M.

$$EF = ME + MF. \tag{7.157}$$

The distance of the foot of the perpendicular to the centre of the base is nothing but half the difference between the base-segments (*ābādhā*) of a triangle. That is

$$ME = \frac{1}{2}(BE - DE). \tag{7.158}$$

$$MF = \frac{1}{2}(DF - BF). \tag{7.159}$$

The difference between the base-segments in a triangle is nothing but the difference of their squares divided by the base, which is the sum of the base-segments. And as has been noted in equation (7.109), the difference in the squares of the base-segments is equal to the difference between the squares of the sides of the triangle. Thus

$$ME = \frac{1}{2}(BE - DE) = \frac{1}{2}\frac{(AB^2 - DA^2)}{BD}, \tag{7.160}$$

$$MF = \frac{1}{2}(DF - BF) = \frac{1}{2}\frac{(CD^2 - BC^2)}{BD}. \tag{7.161}$$

Hence, we obtain from (7.157)–(7.161) that the *lamba-nipātāntara* is given by

$$EF = \frac{1}{2}\frac{(AB^2 + CD^2) - (BC^2 + DA^2)}{BD}. \tag{7.162}$$

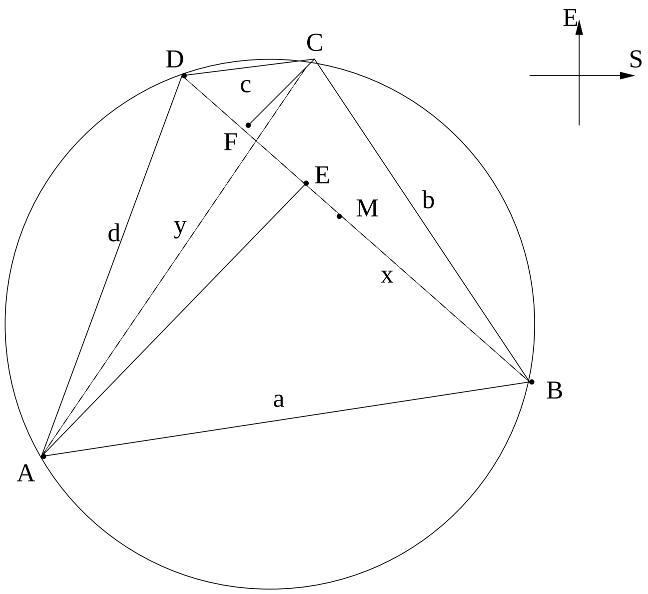


Figure 7.16: Area of a cyclic quadrilateral.

If we consider a different situation as shown in Figure 7.16, where though $AB > AD$ as before, we have $BC > CD$. That is, in the triangles ABD and CBD, the longer sides AB and BC meet at the same vertex B of the base BD. Then the feet of the perpendiculars AE and CF fall on the same side of the mid-point M of the diagonal BD. Then the *lamba-nipātāntara*, EF, is given by the difference of the distances of the feet of the perpendiculars from the mid-point M.

$$EF = MF - ME. \tag{7.163}$$

Again as before we get

$$\begin{aligned} ME &= \frac{1}{2}(BE - DE) = \frac{1}{2}\frac{(AB^2 - DA^2)}{BD}\,, & (7.164)\\ MF &= \frac{1}{2}(BF - DF) = \frac{1}{2}\frac{(BC^2 - CD^2)}{BD}\,. & (7.165)\end{aligned}$$

Thus, from (7.163)–(7.165), we again obtain

$$EF = \frac{1}{2}\ \frac{(AB^2 + CD^2) - (BC^2 + DA^2)}{BD}\,. \tag{7.166}$$

This is the same as (7.162). Thus we see that in each case the *lamba-nipātāntara* is given by the half the difference between the sums of the squares of the opposite sides of the cyclic quadrilateral divided by the diagonal.

7.15.3 First result for the area

From the above results (7.156) and (7.166), we obtain the following for the square of the area of the cyclic quadrilateral:

$$\begin{aligned} A^2 &= \left(\frac{1}{4}\right)[BD^2(AC^2 - EF^2)] \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)\left[BD^2 \times AC^2 - \frac{1}{4}\{(AB^2 + CD^2) - (BC^2 + DA^2)\}^2\right] \\ &= \left[BD \times \frac{AC}{2}\right]^2 \\ &\qquad - \left[\left\{\left(\frac{AB}{2}\right)^2 + \left(\frac{CD}{2}\right)^2\right\} - \left\{\left(\frac{BC}{2}\right)^2 + \left(\frac{DA}{2}\right)^2\right\}\right]^2 \end{aligned} \tag{7.167}$$

Thus in order to obtain the square of the area of a cyclic quadrilateral half the product of the diagonals and the difference of the sums of the squares of half the opposite sides can be squared and one subtracted from the other. This is as per the rule given by the verse *pratibhujadala...*

7.15.4 Second result for the area

Once again, adopting the notation $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ and $DA = d$ (not to be confused with the diameter) for the sides and $BD = x$, $AC = y$ for the diagonals, equation (7.167) for the area becomes

$$A^2 = \left[\frac{xy}{2}\right]^2 - \left[\left\{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2\right\} - \left\{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2\right\}\right]^2. \tag{7.168}$$

Now, using (7.138) and (7.139), (7.168) becomes

$$A^2 = \left[\frac{(ac+bd)}{2}\right]^2 - \left[\left\{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2\right\} - \left\{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2\right\}\right]^2. \tag{7.169}$$

We can express the above difference of squares in the form of a product of sum and difference and obtain

$$\begin{aligned} A^2 &= \left[\frac{(ac+bd)}{2} + \left\{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2\right\} - \left\{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2\right\}\right] \times \\ &\quad \left[\frac{(ac+bd)}{2} - \left\{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2\right\} + \left\{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2\right\}\right] \\ &= \left[\left\{\left(\frac{a}{2}\right) + \left(\frac{c}{2}\right)\right\}^2 - \left\{\left(\frac{b}{2}\right) - \left(\frac{d}{2}\right)\right\}^2\right] \times \\ &\quad \left[\left\{\left(\frac{b}{2}\right) + \left(\frac{d}{2}\right)\right\}^2 - \left\{\left(\frac{a}{2}\right) - \left(\frac{c}{2}\right)\right\}^2\right]. \end{aligned} \tag{7.170}$$

7.15.5 Final result for the area

Again expressing each of the factors in (7.170), which is a difference of squares, as a product of a sum and a difference we obtain

$$\begin{aligned} A^2 &= \left(\frac{a}{2} + \frac{c}{2} + \frac{b}{2} - \frac{d}{2}\right)\left(\frac{a}{2} + \frac{c}{2} + \frac{d}{2} - \frac{b}{2}\right) \times \\ &\quad \left(\frac{b}{2} + \frac{d}{2} + \frac{a}{2} - \frac{c}{2}\right)\left(\frac{b}{2} + \frac{d}{2} + \frac{c}{2} - \frac{a}{2}\right). \end{aligned} \tag{7.171}$$

If we denote the semi-perimeter of the cyclic quadrilateral by

$$s = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{2} + \frac{d}{2}, \tag{7.172}$$

then the above expression (7.171) for the area reduces to

$$A = [(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)]^{\frac{1}{2}}. \tag{7.173}$$

This is the result given by the rule *samadoryutidalam...* (*Līlāvatī*, 169).

7.15.6 Area of triangles

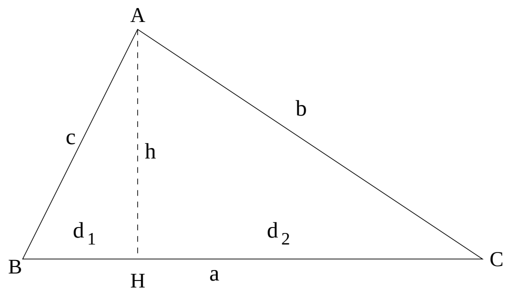


Figure 7.17: Area of a triangle.

In the case of triangle also, the area can be expressed in a manner similar to (7.173). In Figure 7.17, ABC is a triangle, AH is the altitude from vertex A to the base BC. We adopt the notation $BC = a$, $AC = b$ and $AB = c$ for the sides, $AH = h$ for the altitude and $BH = d_1$ and $CH = d_2$, for the base-segments (*ābādhā*). Let the semi-perimeter s be given by

$$s = \frac{(a+b+c)}{2}. \tag{7.174}$$

Now it will be shown that square of the area of the triangle is given by

$$A^2 = [s(s-a)(s-b)(s-c)]. \tag{7.175}$$

It is noted that

$$\begin{aligned} s(s-a) &= \left[\frac{(b+c)}{2}\right]^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \\ &= \left[\frac{(b+c)}{2}\right]^2 - \left[\frac{(d_1+d_2)}{2}\right]^2, \end{aligned} \tag{7.176}$$

may be considered to be nearly equal to the square of the perpendicular, which is given by

$$h^2 = b^2 - d_2^2$$

$$
\begin{aligned}
&= c^2 - d_1^2 \\
&= \frac{(b^2 + c^2)}{2} - \frac{(d_1^2 + d_2^2)}{2} \,. \qquad (7.177)
\end{aligned}
$$

Similarly, it is also noted that

$$(s-b)(s-c) = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left[\left(\frac{b}{2}\right) - \left(\frac{c}{2}\right)\right]^2 , \qquad (7.178)$$

may be considered to be nearly equal to the square of half the base. It is therefore argued that the expression (7.175) for the square of the area may be considered to be nearly the same as the one which was obtained earlier in Section 7.9:

$$A^2 = h^2 \left(\frac{a}{2}\right)^2 . \qquad (7.179)$$

The exact equivalence of the expressions (7.175) and (7.179) is now proved as follows: From (7.176) and (7.177) we note that

$$s(s-a) = h^2 + \left[\frac{(d_2 - d_1)}{2}\right]^2 - \left[\frac{(b-c)^2}{2}\right]^2 . \qquad (7.180)$$

Thus the product of the first two factors in the right hand side of (7.175) is in excess of the square of the altitude, the first factor in the right hand side of equation (7.179), by the amount given in equation (7.180). Equation (7.178) itself gives the amount by which the product of last two factors in the right hand side of (7.175) is deficient from the square of half the base, the second factor on the right hand side of (7.179.

Now, we recall that the difference in the squares of the base-segments (*ābādhā*) is also the difference in the squares of the sides

$$d_2^2 - d_1^2 = b^2 - c^2. \qquad (7.181)$$

Therefore

$$\frac{(d_2 - d_1)}{(b+c)} = \frac{(b-c)}{(d_2 + d_1)} \,. \qquad (7.182)$$

The above equation can be viewed as a *trairāśika*, rule of proportion, which will therefore hold for half their squares and even their sums and differences. Thus from (7.182), we obtain

$$\frac{\left[\frac{(d_2 - d_1)}{2}\right]^2}{\left[\frac{(b+c)}{2}\right]^2} = \frac{\left[\frac{(b-c)}{2}\right]^2}{\left[\frac{(d_2 + d_1)}{2}\right]^2} \,. \qquad (7.183)$$

From (7.183) it follows that

$$\frac{\left[\dfrac{(b-c)}{2}\right]^2}{\left[\dfrac{(d_2+d_1)}{2}\right]^2} = \frac{\left[\left(\dfrac{(d_2-d_1)}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{(b-c)}{2}\right)^2\right]}{\left[\left(\dfrac{(b+c)}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{(d_2+d_1)}{2}\right)^2\right]}, \tag{7.184}$$

or, equivalently

$$\frac{\left[\dfrac{(b-c)}{2}\right]^2}{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \frac{\left[\left(\dfrac{(d_2-d_1)}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{(b-c)}{2}\right)^2\right]}{\left[\left(\dfrac{(b+c)}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{(d_2+d_1)}{2}\right)^2\right]}. \tag{7.185}$$

Now, in order to show that (7.175) follows from (7.179), let us first consider an example. Suppose we want to multiply 5 by 3. But if instead of 5, say $6 = 5 + 5.\frac{1}{5}$, is chosen as the multiplicand, then the multiplier 3 will have to be reduced by an amount $\frac{3}{6}$, obtained by dividing it by a divisor one larger than the divisor used in the additive term to the multiplicand.[22] That is

$$5 \times 3 = 15 = \left[5 + 5\left(\frac{1}{5}\right)\right]\left[3 - 3\left(\frac{1}{(5+1)}\right)\right] = 6 \times 2\frac{1}{2}. \tag{7.186}$$

Now, we start with (7.179), and show how it leads to (7.175), by employing the method of equation (7.186). It follows from (7.186) that

$$\begin{aligned} A^2 &= h^2\left(\frac{a}{2}\right)^2 \\ &= \left[h^2 + \left(\frac{(d_2-d_1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{(b-c)}{2}\right)^2\right] \times \\ &\quad \left[\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \frac{\left(\dfrac{(d_2-d_1)}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{(b-c)}{2}\right)^2}{\left(\dfrac{(d_2-d_1)}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{(b-c)}{2}\right)^2 + h^2}\right]. \end{aligned} \tag{7.187}$$

[22] This has been explained in Section 1.6 as the third special method of multiplication. Equation (7.187) follows directly from the identity

$$pq = (p+r)\left(q - \frac{qr}{p+r}\right).$$

Now, by employing (7.176) and (7.180), (7.187) becomes

$$A^2 = s(s-a)\left[\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \frac{\left(\frac{(d_2-d_1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{(b-c)}{2}\right)^2}{\left(\frac{(b+c)}{2}\right)^2 - \left(\frac{(d_1+d_2)}{2}\right)^2}\right]. \tag{7.188}$$

If we now employ (7.185) in (7.188), we get

$$\begin{aligned} A^2 &= s(s-a)\left[\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \left(\frac{\left(\frac{(b-c)}{2}\right)^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}\right)\right] \\ &= s(s-a)\left[\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{(b-c)}{2}\right)^2\right]. \end{aligned} \tag{7.189}$$

Now by using (7.178) in (7.189), we finally obtain the desired relation (7.175) for the area of the triangles as given by the rule *sarvadoryutidalam...* (*Līlāvatī* 169).

$$A^2 = [s(s-a)(s-b)(s-c)]. \tag{7.190}$$

7.16 Derivation of the *Sampāta-śara*

In Figure 7.18 we consider two circles intersecting each other. Let AB and CD be the overlapping diameters and EF the common chord which is bisected perpendicularly by the diameters. CB, the portion of the diameters between the two circles is called the *grāsa*, the erosion and GB and GC are the the *sampāta-śara*, arrows of intercepted arc. The smaller circle will have the larger intercepted arc and vice versa.

If we employ the rule *vyāsāt śaronāt...*(*Līlāvatī*, 204), that the product of the arrow and diameter minus arrow is the square of the perpendicularly bisected chord, we have

$$AG \times GB = EG^2 = CG \times GD\,. \tag{7.191}$$

Therefore, we have

$$(AB - GB) \times GB = (CB - GB)(CD - CB + GB). \tag{7.192}$$

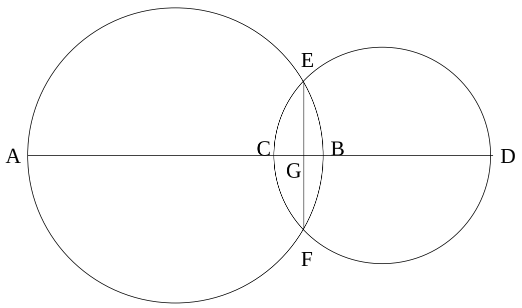


Figure 7.18: *Sampāta-śara.*

Therefore

$$AB \times GB = CB \times (CD - CB) + CB \times GB - (CD - CB)GB \,. \quad (7.193)$$

Thus

$$GB = \frac{(CD - CB) \times CB}{[(AB - CB) + (CD - CB)]} \,. \quad (7.194)$$

Similarly the other arrow of the intercept is given by

$$GC = \frac{(AB - CB) \times CB}{[(AB - CB) + (CD - CB)]} \,. \quad (7.195)$$

Equations (7.194) and (7.195) are according to the rule *śarone dve vṛtte...* (*Āryabhaṭīya, Gaṇita*, 18).

7.17 Derivation of the shadow

In Figure 7.19 are shown the shadows cast by a lamp LM when a gnomon of height 12 units is placed in two different positions AH and PQ. Let HB, QR be the corresponding shadows and AB, PR, the corresponding shadow hypotenuses (*chāyā-karṇa*). Now, mark C on the ground such that $HC = QR$. Then $AC = PR$.

The problem is to calculate the shadows given the difference between them as also the difference between the shadow-hypotenuses. We can see in Figure 7.19 that in the triangle ABC, the sides AB, AC are the shadow-hypotenuses, the altitude $AH = 12$ is the gnomon and the base-segments

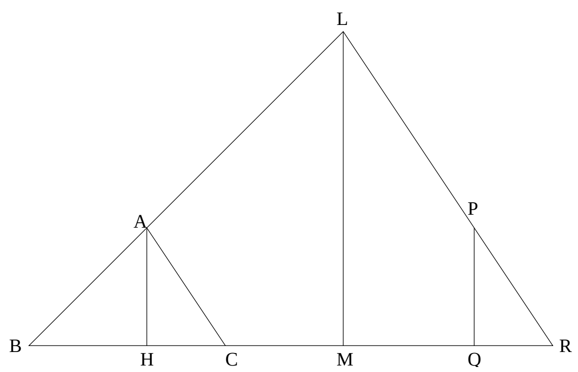


Figure 7.19: Derivation of the shadow.

BH and HC are the shadows. Thus the problem may be considered to be one of determining the base-segments given their difference, as also the altitude and the difference of sides in the triangle ABC. We shall adopt the notation of Section 7.15.6, namely $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, $AH = h$, $BH = d_1$, $CH = d_2$.

As before, we start with the relation that the difference in the squares of the sides is equal to the difference in the squares of the base segments.

$$d_1^2 - d_2^2 = c^2 - b^2. \tag{7.196}$$

which is equivalent to the relation

$$\frac{(d_1 + d_2)}{(c - b)} = \frac{(c + b)}{(d_1 - d_2)}\,. \tag{7.197}$$

Viewing the above relation as a *trairāśika*, rule of proportion, we can derive the relation

$$\begin{aligned} \frac{(d_1 + d_2)^2}{(c - b)^2} &= \frac{(c + b)^2}{(d_1 - d_2)^2} \\ &= \frac{[(c + b)^2 - (d_1 + d_2)^2]}{[(d_1 - d_2)^2 - (c - b)^2]}\,. \end{aligned} \tag{7.198}$$

If we now recall that the altitude is given by the relation (7.177)

$$h^2 = \frac{(b^2 + c^2)}{2} - \frac{(d_1^2 + d_2^2)}{2}\,, \tag{7.199}$$

it follows that

$$\frac{(d_1+d_2)^2}{(c-b)^2} = \frac{[4h^2+(d_1-d_2)^2-(c-b)^2]}{[(d_1-d_2)^2-(c-b)^2]}\,. \tag{7.200}$$

Since the height of the gnomon $h = 12$, (7.198) becomes

$$d_1+d_2 = (c-b)\left[1+\frac{576}{[(d_1-d_2)^2-(c-b)^2]}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{7.201}$$

Equation (7.201) gives the sum of the shadows d_1+d_2 given the difference d_1-d_2 between the shadows as also the difference $c-b$ between the shadow-hypotenuses. Then the shadows d_1 and d_2 can be obtained and this is as per the rule *chāyayoḥ karṇayor...*(*Līlāvatī*, 238).

7.18 Surface area of a sphere

The area of a sphere will now be obtained using the earlier result (7.50) for the *piṇḍajyā*-s, Rsines, in terms of *khaṇḍa-jyāntara*-s, second order Rsine-differences, and the fact that knowing the circumference and diameter of a circle the circumference or the diameter of any desired circle can be obtained in terms of the other by the rule of three.

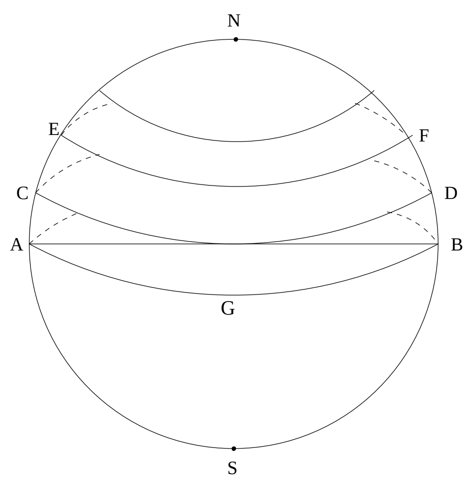


Figure 7.20: Surface area of a sphere.

In Figure 7.20 is shown a sphere with the north-south circle $NASBN$ perpendicular to the equatorial plane AGB. Divide the north-south circle into a large number of equal arc-bits and divide the sphere into slices of equal thickness by planes parallel to the equatorial plane passing through the junctions of the arc-bits. If we cut the surface of any slice and stretch the piece flat, what results is a trapezium, as shown in Figure 7.21. If we cut the triangle at one edge and fix it at the other suitably, we get a rectangle whose width is the thickness of the slices and length is the mean of the perimeters of the top and bottom circles of the slice. The surface area of the sphere is the sum of the areas of these rectangles.

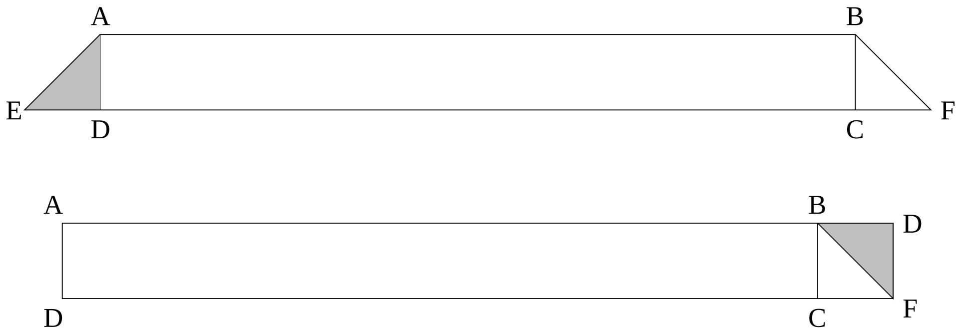


Figure 7.21: Surface area of the slices.

Let r be the radius of the sphere and C the circumference of any a great circle. The radius of the middle of the j-th slice will be a half chord at the middle of the corresponding arc-bit in the north-south circle. When the number of slices are very large we can approximate the half-chords at the middle of the arc-bits by the corresponding *piṇḍajyā*-s B_j at the junction of the arc-bits. The common thickness of the slices, which we shall denote by Δ, is nothing but the Rsine of the arc-bit.

Now, the area of the j-th rectangle will be $\left(\frac{C}{r}\right)\ B_j\ \Delta$. Therefore the surface area of the northern hemisphere is given by

$$\frac{S}{2} = \left(\frac{C}{r}\right)(B_1 + B_2 + \dots B_n)\Delta\ . \tag{7.202}$$

If we recall the relation (7.50) between the *piṇḍajyā*-s and the second order sine-differences, then the sum of Rsines in (7.202) can be expressed as a sum of the second-order sine-differences

$$\begin{aligned} B_1 + B_2 + \ldots + B_n &= \left(\frac{r}{\alpha}\right)^2 [(\Delta_1 - \Delta_2) + (\Delta_2 - \Delta_3) + \\ \ldots + (\Delta_{n-1} - \Delta_n)] \\ &= \left(\frac{r}{\alpha}\right)^2 (\Delta_1 - \Delta_n), \end{aligned} \tag{7.203}$$

where $\Delta_1,\ \Delta_2 \ldots$ are the Rsine-differences and α is the full-chord of the arc-bit. When n is very large, Δ_n becomes negligible[23] and the first Rsine, $B_1 = \Delta_1 = \Delta$, can be approximated by the arc-bit or by its full-chord α. Thus, when n is very large, (7.202) becomes

$$\begin{aligned} \frac{S}{2} &= \left(\frac{C}{r}\right)\left(\frac{r}{\alpha}\right)^2 (\Delta_1 - \Delta_n)\Delta \\ &\approx \left(\frac{C}{r}\right)\left(\frac{r}{\alpha}\right)^2 (\alpha)^2 = Cr\ . \end{aligned} \tag{7.204}$$

Thus the surface area of the sphere is given by the product of the circumference C and the diameter d

$$S = C \times d\ . \tag{7.205}$$

7.19 Volume of a sphere

To find the volume of sphere, it is again divided into large number of slices of equal thickness. The volume of each slice is the average of the areas of the top and bottom circles multiplied by the thickness. Thus we need to know the area of a circle which is derived first.

7.19.1 Area of a circle

As shown in Figure 7.22, cut each half of the circle into a large number sections from the centre to the circumference. Then as in Figure 7.23, spread

[23]This can be seen for instance from relation (7.49), which shows that Δ_n is proportional to the *piṇḍa-koṭi-jyā*, $K_{n-\frac{1}{2}}$ at the mid-point of the last arc-bit, and by noting that the Rcosine becomes negligible as n becomes very large.

these out and place the sections of the upper half so as to fit the interstices when the sections of the lower half are spread out. The area of the circle is equal to that of the resulting rectangle, namely half the circumference multiplied by the radius.

$$A = \frac{1}{2} C \times r \, . \tag{7.206}$$

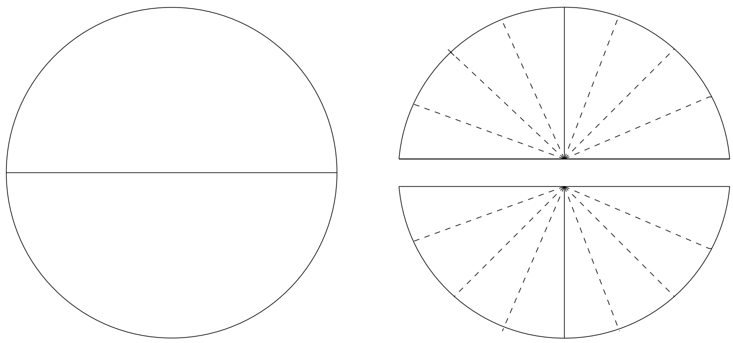


Figure 7.22: Division of a circle into sections.

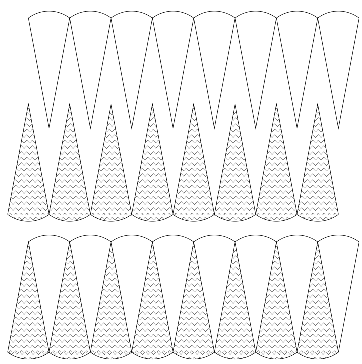


Figure 7.23: Area of a circle.

7.19.2 Derivation of the volume of a sphere

As before, let r be the radius of the sphere and C the circumference of a great circle. Again the half-chord B_j is the radius of the j-th slice into which the sphere has been divided. The corresponding circumference is $\left(\frac{C}{r}\right) B_j$ and from (7.206) the area of a circular section of this slice can be taken to be $\frac{1}{2}\left(\frac{C}{r}\right) B_j^2$. Therefore, if Δ is the thickness of the slices, then the volume of the j-th slice is given by $\frac{1}{2}\left(\frac{C}{r}\right)B_j^2\Delta$. To obtain the volume of the sphere, we need to therefore evaluate the sum of the squares of the Rsines B_j^2.

$$V \approx \frac{1}{2}\left(\frac{C}{r}\right)[B_1^2 + B_2^2 + \ldots B_n^2]\Delta\ . \tag{7.207}$$

In Figure 7.24, $AP = PB = B_j$ is the jth half-chord, starting from N, the north point. By the rule *vṛtte śarasaṃvargo...* (*Āryabhaṭīya, Gaṇita* 17),

$$\begin{aligned} B_j^2 &= AP \times PB = NP \times SP \\ &= \frac{1}{2}\left[(NP+SP)^2 - (NP^2 + SP^2)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[(2R)^2 - (NP^2 + SP^2)\right]. \end{aligned} \tag{7.208}$$

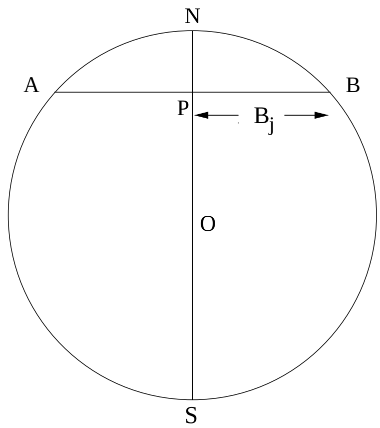


Figure 7.24: Half-chord square equals product of *śara*-s.

If $\Delta = 2\frac{r}{n}$, be the thickness of each slice, the j-th Rversine $NP = j\Delta$ and its complement $SP = (n-j)\Delta$. Hence, while summing the squares of the Rsines B_j^2, both NP^2 and SP^2 add to the same result. Thus, using (7.208), we can re-express (7.207) in the form

$$\begin{aligned} V \approx\ & \frac{1}{2}\left(\frac{C}{r}\right)\left(\frac{2r}{n}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left[(2r)^2 + (2r)^2 + \ldots + (2r)^2\right] \\ & -\frac{1}{2}\left(\frac{C}{r}\right)\left(\frac{2r}{n}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2r}{n}\right)^2(2)[1^2 + 2^2 + \ldots n^2]. \end{aligned} \tag{7.209}$$

Recalling the result that, for large n, the sum of the squares (*varga-saṅkalita*) is essentially one-third the cube of the number of terms, (7.209) becomes

$$\begin{aligned} V &= \left(\frac{C}{2r}\right)\left(4r^3 - \frac{8r^3}{3}\right) \\ &= \left(\frac{C}{6}\right)d^2. \end{aligned} \tag{7.210}$$

Thus has been shown that the volume of a sphere is one-sixth the circumference times the square of the diameter.

Epilogue

Proofs in Indian Mathematics[1]

1 Alleged Absence of Proofs in Indian Mathematics

Several books have been written on the history of Indian tradition in mathematics.[2] In addition, many books on history of mathematics devote a section, sometimes even a chapter, to the discussion of Indian mathematics. Many of the results and algorithms discovered by the Indian mathematicians have been studied in some detail. But, little attention has been paid to the methodology and foundations of Indian mathematics. There is hardly any discussion of the processes by which Indian mathematicians arrive at and justify their results and procedures. And, almost no attention is paid to the philosophical foundations of Indian mathematics, and the Indian understanding of the nature of mathematical objects, and validation of mathematical results and procedures.

Many of the scholarly works on history of mathematics assert that Indian Mathematics, whatever its achievements, does not have any sense of logical rigor. Indeed, a major historian of mathematics presented the following assessment of Indian mathematics over fifty years ago:

> The Hindus apparently were attracted by the arithmetical and computational aspects of mathematics rather than by the geometrical and rational features of the subject which had appealed

[1] This Epilogue is an updated version of the article, M. D. Srinivas, "The Methodology of Indian Mathematics and its Contemporary Relevance", PPST Bulletin, **12**, 1-35, 1987. See also, M. D. Srinivas, 'Proofs in Indian Mathematics', in G. G. Emch, R. Sridharan, and M. D. Srinivas, (eds.) *Contributions to the History of Indian Mathematics*, Hindustan Book Agency, New Delhi 2005. p. 209-248.

[2] We may cite the following standard works: B. B. Datta and A. N. Singh, *History of Hindu Mathematics,* 2 parts, Lahore 1935, 1938, Reprint, Delhi 1962, 2001; C. N. Srinivasa Iyengar, *History of Indian Mathematics,* Calcutta 1967; A. K. Bag, *Mathematics in Ancient and Medieval India,* Varanasi 1979; T. A. Saraswati Amma, *Geometry in Ancient and Medieval India*, Varanasi 1979; G. C. Joseph, *The Crest of the Peacock: The Non-European Roots of Mathematics,* 2^{nd} Ed., Princeton 2000.

so strongly to the Hellenistic mind. Their name for mathematics, *gaṇita*, meaning literally the 'science of calculation' well characterises this preference. They delighted more in the tricks that could be played with numbers than in the thoughts the mind could produce, so that neither Euclidean geometry nor Aristotelian logic made a strong impression upon them. The Pythagorean problem of the incommensurables, which was of intense interest to Greek geometers, was of little import to Hindu mathematicians, who treated rational and irrational quantities, curvilinear and rectilinear magnitudes indiscriminately. With respect to the development of algebra, this attitude occasioned perhaps an incremental advance, since by the Hindus the irrational roots of the quadratics were no longer disregarded as they had been by the Greeks, and since to the Hindus we owe also the immensely convenient concept of the absolute negative. These generalisations of the number system and the consequent freedom of arithmetic from geometrical representation were to be essential in the development of the concepts of calculus, but the Hindus could hardly have appreciated the theoretical significance of the change...

The strong Greek distinction between the discreteness of number and the continuity of geometrical magnitude was not recognised, for it was superfluous to men who were not bothered by the paradoxes of Zeno or his dialectic. Questions concerning incommensurability, the infinitesimal, infinity, the process of exhaustion, and the other inquiries leading toward the conceptions and methods of calculus were neglected.[3]

[3]C. B. Boyer, *The History of Calculus and its Conceptual Development,* New York 1949, p. 61-62. As we shall see, Boyer's assessment – that the Indian mathematicians did not reach anywhere near the development of calculus or mathematical analysis, because they lacked the sophisticated methodology developed by the Greeks – seems to be thoroughly misconceived. In fact, in stark contrast to the development of mathematics in the Greco-European tradition, the methodology of Indian mathematical tradition seems to have ensured continued and significant progress in all branches of mathematics till barely two hundred year ago, it also lead to major discoveries in calculus or mathematical analysis, without in anyway abandoning or even diluting its standards of logical rigour, so that these results, and the methods by which they were obtained, seem as much valid today as at the time of their discovery.

Such views have found their way generally into more popular works on history of mathematics. For instance, we may cite the following as being typical of the kind of opinions commonly expressed about Indian mathematics:

> As our survey indicates, the Hindus were interested in and contributed to the arithmetical and computational activities of mathematics rather than to the deductive patterns. Their name for mathematics was *gaṇita*, which means "the science of calculation". There is much good procedure and technical facility, but no evidence that they considered proof at all. They had rules, but apparently no logical scruples. Morever, no general methods or new viewpoints were arrived at in any area of mathematics.
>
> It is fairly certain that the Hindus did not appreciate the significance of their own contributions. The few good ideas they had, such as separate symbols for the numbers from 1 to 9, the conversion to base 10, and negative numbers, were introduced casually with no realisation that they were valuable innovations. They were not sensitive to mathematical values. Along with the ideas they themselves advanced, they accepted and incorporated the crudest ideas of the Egyptians and Babylonians.[4]

The burden of scholarly opinion is such that even eminent mathematicians, many of whom have had fairly close interaction with contemporary Indian mathematics, have ended up subscribing to similar views, as may be seen from the following remarks of one of the towering figures of twentieth century mathematics:

> For the Indians, of course, the effectiveness of the *cakravāla* could be no more than an experimental fact, based on their treatment of great many specific cases, some of them of considerable complexity and involving (to their delight, no doubt) quite large numbers. As we shall see, Fermat was the first one to perceive the need for a general proof, and Lagrange was the first to publish one. Nevertheless, to have developed the *cakravāla* and to have

[4] Morris Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times,* Oxford 1972, p. 190.

> applied it successfully to such difficult numerical cases as $N = 61$, or $N = 67$ had been no mean achievements.[5]

Modern scholarship seems to be unanimous in holding the view that Indian mathematics lacks any notion of proof. But even a cursory study of the source-works that are available in print would reveal that Indian mathematicians place much emphasis on providing what they refer to as *upapatti* (proof, demonstration) for every one of their results and procedures. Some of these *upapatti*-s were noted in the early European studies on Indian mathematics in the first half of the nineteenth century. For instance, in 1817, H. T. Colebrooke notes the following in the preface to his widely circulated translation of portions of *Brāhmasphuṭasiddhānta* of Brahmagupta and *Līlāvatī* and *Bījagaṇita* of Bhāskarācārya:

> On the subject of demonstrations, it is to be remarked that the Hindu mathematicians proved propositions both algebraically and geometrically: as is particularly noticed by Bhāskara himself, towards the close of his algebra, where he gives both modes of proof of a remarkable method for the solution of indeterminate problems, which involve a factum of two unknown quantities.[6]

[5]Andre Weil, *Number Theory: An Approach through History from Hammurapi to Legendre,* Boston 1984, p. 24. It is indeed ironical that Prof. Weil has credited Fermat, who is notorious for not presenting any proof for most of the claims he made, with the realisation that mathematical results need to be justified by proofs. While the rest of this article is purported to show that the Indian mathematicians presented logically rigorous proofs for most of the results and processes that they discovered, it must be admitted that the particular example that Prof. Weil is referring to, the effectiveness of the *cakravāla* algorithm (known to the Indian mathematicians at least from the time of Jayadeva, prior to the eleventh century) for solving quadratic indeterminate equations of the form $x^2 - Ny^2 = 1$, does not seem to have been demonstrated in the available source-works. In fact, the first proof of this result was given by Krishnaswamy Ayyangar barely seventy-five years ago (A. A. Krishnaswamy Ayyangar, "New Light on Bhāskara's *Cakravāla* or Cyclic Method of solving Indeterminate Equations of the Second Degree in Two Variables', Jour. Ind. Math. Soc. **18**, 228-248, 1929-30). Krishnaswamy Ayyangar also showed that the *Cakravāla* algorithm is different and more optimal than the Brouncker-Wallis-Euler-Lagrange algorithm for solving this so-called "Pell's Equation."

[6]H. T. Colebrooke, *Algebra with Arithmetic and Mensuration from the Sanskrit of Brahmagupta and Bhāskara,* London 1817, p. xvii. Colebrooke also presents some of the *upapatti*-s given by the commentators Pṛthūdakasvāmin, Gaṇeśa Daivajña and Kṛṣṇa Daivajña, as footnotes in his work.

Another notice of the fact that detailed proofs are provided in the Indian texts on mathematics is due to Charles Whish who, in an article published in 1830s, pointed out that infinite series for π and for trigonometric functions were derived in texts of Indian mathematics much before their 'discovery' in Europe. Whish concluded his paper with a proof which he ascribed to the Malayalam text *Yuktibhāṣā* of the theorem on the square of the hypotenuse of a right angled triangle and also promised that:

> A further account of the *Yuktibhāṣā*, the demostrations of the rules for the quadrature of the circle of infinite series, with the series for the sines, cosines, and their demostrations, will be given in a separate paper: I shall therefore conclude this, by submitting a simple and curious proof of the 47^{th} proposition of Euclid [the so called Pythagoras theorem], extracted from the *Yuktibhāṣā*.[7]

It would indeed be interesting to find out how the currently prevalent view, that Indian mathematics lacks the notion of proof, obtained currency in the last 100-150 years.

2 *Upapatti*-s in Indian Mathematics

2.1 The tradition of *upapatti*-s in Mathematics and Astronomy

A major reason for our lack of comprehension, not merely of the Indian notion of proof, but also of the entire methodology of Indian mathematics, is the scant attention paid to the source-works so far. It is said that there are over one hundred thousand manuscripts on *Jyotiḥśāstra*, which includes,

[7]C. M. Whish, 'On the Hindu Quadrature of the Circle, and the infinite series of the proportion of the circumference to the diameter exhibited in the four Shastras, the Tantrasangraham, Yucti Bhasa, Carana Paddhati and Sadratnamala', Trans. Roy. As. Soc. (G.B.) **3**, 509-523, 1834. (As regards the year of publication of this article, refer to *fn.* 6 on page xxxiii.) Notwithstanding what he promised in the above paper, Whish, it appears, did not publish anything further on this subject. Incidentally, the proof of the *Bhujā-koṭi-karṇa-nyāya* (Pythagoras theorem) given in the beginning of Chapter VI of *Yuktibhāṣā* is much simpler than that outlined by Whish at the end of his paper (p. 523); in fact, the latter proof is not found in the available texts of *Yuktibhāṣā*.

apart from works in *gaṇita-skandha* (mathematics and mathematical astronomy), also those in *saṃhitā-skandha* (omens) and *hora* (astrology).[8] Only a small fraction of these texts have been published. A recent publication lists about 285 published works in mathematics and mathematical astronomy. Of these, about 50 are from the period before 12^{th} century AD, about 75 from $12^{th} - 15^{th}$ centuries, and about 165 from $16^{th} - 19^{th}$ centuries.[9]

Much of the methodological discussion is usually contained in the detailed commentaries; the original works rarely touch upon such issues. Modern scholarship has concentrated on translating and analysing the original works alone, without paying much heed to the commentaries. Traditionally the commentaries have played at least as great a role in the exposition of the subject as the original texts. Great mathematicians and astronomers, of the stature of Bhāskarācārya I, Bhāskarācārya II, Parameśvara, Nīlakaṇṭha Somasutvan, Gaṇeśa Daivajña, Munīśvara and Kamalākara, who wrote major original treatises of their own, also took great pains to write erudite commentaries on their own works and on the works of earlier scholars. It is in these commentaries that one finds detailed *upapatti*-s of the results and procedures discussed in the original text, as also a discussion of the various methodological and philosophical issues. For instance, at the beginning of his commentary *Buddhivilāsinī*, Gaṇeśa Daivajña states:

> There is no purpose served in providing further explanations for the already lucid statements of Śrī Bhāskara. The knowledgeable mathematicians may therefore note the speciality of my intellect in the statement of *upapatti*-s, which are after all the essence of the whole thing.[10]

Amongst the published works on Indian mathematics and astronomy, the earliest exposition of *upapatti*-s are to be found in the *bhāṣya* of Govindasvāmin (c.800) on *Mahābhāskarīya* of Bhāskarācārya I, and the *Vāsanā-bhāṣya* of Caturveda Pṛthūdakasvāmin (c.860) on *Brāhmasphuṭasiddhānta* of Brahmagupta.[11] Then we find very detailed exposition of *upapatti*-s in the

[8] D. Pingree, *Jyotiḥśāstra: Astral and Mathematical Literature*, Wiesbaden 1981, p. 118.

[9] K.V. Sarma and B.V. Subbarayappa, *Indian Astronomy: A Source Book,* Bombay 1985.

[10] *Buddhivilāsinī* of Gaṇeśa Daivajña, V.G. Apte (ed.), Vol I, Pune 1937, p. 3.

[11] The *Āryabhaṭīyabhāṣya* of Bhāskara I (c.629) does occasionally indicate derivations of some of the mathematical procedures, though his commentary does not purport to present *upapatti*-s for the rules and procedures given in *Āryabhaṭīya*.

works of Bhāskarācārya II (c.1150): His *Vivaraṇa* on *Śiṣyadhīvṛddhidatantra* of Lalla and his *Vāsanābhāṣya* on his own *Siddhāntaśiromaṇi*. Apart from these, Bhāskarācārya provides an idea of what is an *upapatti* in his *Bījavāsanā* on his own *Bījagaṇita* in two places. In the chapter on *madhyamāharaṇa* (quadratic equations) he poses the following problem:

> Find the hypotenuse of a plane figure, in which the side and upright are equal to fifteen and twenty. And show the *upapatti*-s (demonstration) of the received procedure of computation.[12]

Bhāskarācārya provides two *upapatti*-s for the solution of this problem, the so-called Pythagoras theorem; and we shall consider them later. Again, towards the end of the *Bījagaṇita* in the chapter on *bhāvita* (equations involving products), while considering integral solutions of equations of the form $ax + by + d = cxy$, Bhāskarācārya explains the nature of *upapatti* with the help of an example:

> The *upapatti* (demonstration) follows. It is twofold in each case: One geometrical and the other algebraic. The geometric demonstration is here presented... The algebraic demonstration is next set forth... This procedure (of demonstration) has been earlier presented in a concise instructional form (*saṃkṣiptapāṭha*) by ancient teachers. The algebraic demonstrations are for those who do not comprehend the geometric one. Mathematicians have said that algebra is computation joined with demonstration; otherwise there would be no difference between arithmetic and algebra. Therefore this explanation of *bhāvita* has been shown in two ways.[13]

Clearly the tradition of exposition of *upapatti*-s is much older and Bhāskarācārya and the later mathematicians and astronomers are merely following the traditional practice of providing detailed *upapatti*-s in their commentaries to earlier, or their own, works.[14]

[12] *Bījagaṇita* of Bhāskarācārya, Muralidhara Jha (ed.), Varanasi 1927, p. 69.

[13] *Bījagaṇita*, cited above, p. 125-127.

[14] Ignoring all these classical works on *upapatti*-s, one scholar has recently claimed that the tradition of *upapatti* in India “dates from the 16^{th} and 17^{th} centuries” (J.Bronkhorst, ‘*Pāṇini* and Euclid’, Jour. Ind. Phil. **29**, 43-80, 2001).

In Appendix A we give a list of important commentaries, available in print, which present detailed *upapatti*-s. It is unfortunate that none of the published source-works that we have mentioned above has so far been translated into any of the Indian languages, or into English; nor have they been studied in depth with a view to analyse the nature of mathematical arguments employed in the *upapatti*-s or to comprehend the methodological and philosophical foundations of Indian mathematics and astronomy. Here, we shall present some examples of the kinds of *upapatti*-s provided in Indian mathematics, from the commentaries of Gaṇeśa Daivajña (c.1545) and Kṛṣṇa Daivajña (c.1600) on the texts *Līlāvatī* and *Bījagaṇita* respectively, of Bhāskarācārya II (c.1150). We shall also briefly comment on the philosophical foundations of Indian mathematics and its relation to other Indian *śāstras.*

2.2 Mathematical results should be supported by *Upapatti*-s

Before discussing some of the *upapatti*-s presented in Indian mathematical tradition, it is perhaps necessary to put to rest the widely prevalent myth that the Indian mathematicians did not pay any attention to, and perhaps did not even recognise the need for justifying the mathematical results and procedures that they employed. The large corpus of *upapatti*-s, even amongst the small sample of source-works published so far, should convince anyone that there is no substance to this myth. Still, we may cite the following passage from Kṛṣṇa Daivajña's commentary *Bījapallavam* on *Bījagaṇita* of Bhāskarācārya, which clearly brings out the basic understanding of Indian mathematical tradition that citing any number of instances (even an infinite number of them) where a particular result seems to hold, does not amount to establishing that as a valid result in mathematics; only when the result is supported by a *upapatti* or a demonstration, can the result be accepted as valid:

> How can we state without proof (*upapatti*) that twice the product of two quantities when added or subtracted from the sum of their squares is equal to the square of the sum or difference of those quantities? That it is seen to be so in a few instances is indeed of no consequence. Otherwise, even the statement that four times the product of two quantities is equal to the square of

> their sum, would have to be accepted as valid. For, that is also seen to be true in some cases. For instance, take the numbers 2, 2. Their product is 4, four times which will be 16, which is also the square of their sum 4. Or take the numbers 3, 3. Four times their product is 36, which is also the square of their sum 6. Or take the numbers 4, 4. Their product is 16, which when multiplied by four gives 64, which is also the square of their sum 8. Hence, the fact that a result is seen to be true in some cases is of no consequence, as it is possible that one would come across contrary instances also. Hence it is necessary that one would have to provide a proof (*yukti*) for the rule that twice the product of two quantities when added or subtracted from the sum of their squares results in the square of the sum or difference of those quantities. We shall provide the proof (*upapatti*) in the end of the section on *ekavarṇa-madhyamāharaṇa*.[15]

We shall now present a few *upapatti*-s as enunciated by Gaṇeśa Daivajña and Kṛṣṇa Daivajña in their commentaries on *Līlāvatī* and *Bījagaṇita* of Bhāskarācārya. These *upapatti*-s are written in a technical Sanskrit, much like say the English of a text on Topology, and our translations below are somewhat rough renderings of the original.

2.3 The rule for calculating the square of a number

According to *Līlāvatī*:

> The multiplication of two like numbers together is the square. The square of the last digit is to be placed over it, and the rest of the digits doubled and multiplied by the last to be placed above them respectively; then omit the last digit, shift the number (by one place) and again perform the like operation. . . .

Gaṇeśa's *upapatti* for the above rule is as follows:[16] [On the left we explain how the procedure works by taking the example of $(125)^2 = 15,625$]:

[15] *Bījapallavam* commentary of Kṛṣṇa Daivajña, T.V. Radhakrishna Sastri (ed.), Tanjore, 1958, p. 54.

[16] *Buddhivilāsinī*, cited earlier, p. 19-20.

By using the rule on multiplication, keeping in mind the place-values, and by using the mathematics of indeterminate quantities, let us take a number with three digits with *yā* at the 100^{th} place, *kā* at the 10^{th} place and *nī* at the unit place. The number is then [in the Indian notation with the plus sign understood] *yā* 1 *kā* 1 *nī* 1.

Using the rule for the multiplication of indeterminate quantities, the square [of the above number] will be *yā va* 1 *yā kā bhā* 2 *yā nī bhā* 2 *kā va* 1 *kā nī bhā* 2 *nī va* 1 [using the Indian notation, where *va* after a symbol stands for *varga* or square and *bhā* after two symbols stands for *bhāvita* or product].

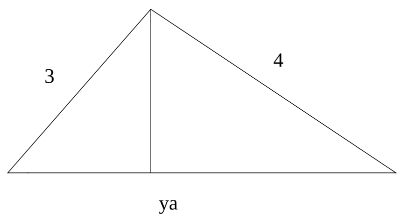
1	5	6	2	5	
				25	5^2
			20		$2 \times 2 \times 5$
		4			2^2
		10			$2 \times 1 \times 5$
	4				$2 \times 1 \times 2$
1					1^2
1	2	5			

Here we see in the ultimate place, the square of the first digit *yā*; in second and third places there are *kā* and *nī* multiplied by twice the first *yā*. Hence the first part of the rule: "The square of the last digit . . . " Now, we see in the fourth place we have square of *kā*; in the fifth we have *nī* multiplied by twice *kā*; in the sixth we have square of *nī*. Hence it is said, "Then omitting the last digit move the number and again perform the like operation". Since we are finding the square by multiplying, we have to add figures corresponding to the same place value, and hence we have to move the rest of the digits. Thus the rule is demonstrated.

While Gaṇeśa provides such *avyaktarītya upapatti*-s or algebraic demostrations for all procedures employed in arithmetic, Śaṅkara Vāriyar, in his commentary. *Kriyākramakarī*, presents *kṣetragata upapatti-s*, or geometrical demonstrations.

2.4 Square of the hypotenuse of a right-angled triangle: The so-called Pythagoras Theorem

Gaṇeśa provides two *upapatti*-s for calculating the square of the hypotenuse (*karṇa*) of a right-angled triangle.[17] These *upapatti*-s are the same as the ones outlined by Bhāskarācārya II in his *Bījavāsanā* on his own *Bījagaṇita*, and were refered to earlier. The first involves the *avyakta* method and proceeds as follows:[18]



Take the hypotenuse (*karṇa*) as the base and assume it to be *yā*. Let the *bhujā* and *koṭi* (the two sides) be 3 and 4 respectively. Take the hypotenuse as the base and draw the perpendicular to the hypotenuse from the opposite vertex as in the figure. [This divides the triangle into two triangles, which are similar to the original] Now by the rule of proportion (*anupāta*), if *yā* is the hypotenuse the *bhujā* is 3, then when this *bhujā* 3 is the hypotenuse, the *bhujā*, which is now the *ābādhā* (segment of the base) to the side of the original *bhujā* will be ($\frac{9}{y\bar{a}}$).

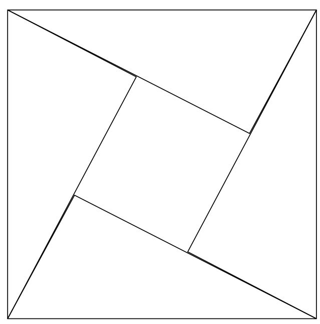
[17] *Buddhivilāsinī*, cited earlier, p. 128-129.

[18] Colebrooke remarks that this proof of the so-called Pythagoras theorem using similar triangles appeared in Europe for the first time in the work of Wallis in the seventeenth century (Colebrooke, cited earlier, p. xvi). The proof in Euclid's *Elements* is rather complicated and lengthy.

$$\begin{aligned} y\bar{a} &= \left(\frac{9}{y\bar{a}}\right) + \left(\frac{16}{y\bar{a}}\right) \\ y\bar{a}^2 &= 25 \\ y\bar{a} &= 5 \end{aligned}$$

Again if $y\bar{a}$ is the hypotenuse, the *koṭi* is 4, then when this *koṭi* 4 is the hypotenuse, the *koṭi*, which is now the segment of base to the side of the (original) *koṭi* will be $(\frac{16}{y\bar{a}})$. Adding the two segments (*ābādhā*-s) of $y\bar{a}$ the hypotenuse and equating the sum to (the hypotenuse) $y\bar{a}$, cross-multiplying and taking the square-roots, we get $y\bar{a} = 5$, which is the square root of the sum of the squares of *bhujā* and *koṭi*.

The other *upapatti* of Gaṇeśa is *kṣetragata* or geometrical, and proceeds as follows:[19]



Take four triangles identical to the given and taking the four hypotenuses to be the four sides, form the square as shown. Now, the interior square has for its side the difference of *bhujā* and *koṭi*. The area of each triangle is half the product of *bhujā* and *koṭi* and four times this added to the area of the interior square is the area of the total figure. This is twice the product of *bhujā* and *koṭi* added to the square of their difference. This, by the earlier cited rule, is nothing but the sum of the squares of *bhujā* and *koṭi*. The square root of that is the side of the (big) square, which is nothing but the hypotenuse.

[19]This method seems to be known to Bhāskarācārya I (c.629 AD) who gives a very similar diagram in his *Āryabhaṭīyabhāṣya* (K.S. Shukla (ed.), Delhi 1976, p. 48). The Chinese mathematician Liu Hui (c 3^{rd} century AD) seems to have proposed similar geometrical proofs of the so-called Pythagoras Theorem. See for instance, D.B.Wagner, 'A Proof of the Pythagorean Theorem by Liu Hui', Hist. Math.**12**, 71-3, 1985.

2.5 The rule of signs in Algebra

One of the important aspects of Indian mathematics is that in many *upapatti*-s the nature of the underlying mathematical objects plays an important role. We can for instance, refer to the *upapatti* given by Kṛṣṇa Daivajña for the well-known rule of signs in Algebra. While providing an *upapatti* for the rule, "the number to be subtracted if positive (*dhana*) is made negative (*ṛṇa*) and if negative is made positive", Kṛṣṇa Daivajña states:

> Negativity (*ṛṇatva*) here is of three types–spatial, temporal and that pertaining to objects. In each case, [negativity] is indeed the *vaiparītya* or the oppositeness...For instance, the other direction in a line is called the opposite direction (*viparīta dik*); just as west is the opposite of east... Further, between two stations if one way of traversing is considered positive then the other is negative. In the same way past and future time intervals will be mutually negative of each other... Similarly, when one possesses said objects, they would be called his *dhana* (wealth). The opposite would be the case when another owns the same objects... Amongst these [different conceptions], we proceed to state the *upapatti* of the above rule, assuming positivity (*dhanatva*) for locations in the eastern direction and negativity (*ṛṇatva*) for locations in the west, as follows...[20]

Kṛṣṇa Daivajña goes on to explain how the distance between a pair of stations can be computed knowing that between each of these stations and some other station on the same line. Using this he demonstrates the above rule that "the number to be subtracted if positive is made negative..."

2.6 The *Kuṭṭaka* process for the solution of linear indeterminate equations

To understand the nature of *upapatti* in Indian mathematics one will have to analyse some of the lengthy demonstrations which are presented for the more complicated results and procedures. One will also have to analyse

[20] *Bījapallavam*, cited above, p. 13.

the sequence in which the results and the demonstrations are arranged to understand the method of exposition and logical sequence of arguments. For instance, we may refer to the demonstration given by Kṛṣṇa Daivajña[21] of the well-known *kuṭṭaka* procedure, which has been employed by Indian mathematicians at least since the time of Āryabhaṭa (c 499 AD), for solving first order indeterminate equations of the form

$$\frac{(ax + c)}{b} = y,$$

where a, b, c are given integers and x, y are to be solved for integers. Since this *upapatti* is rather lengthy, it is presented separately as Appendix B. Here, we merely recount the essential steps. Kṛṣṇa Daivajña first shows that the solutions for x, y do not vary if we factor all three numbers $a,\ b,\ c$ by the same common factor. He then shows that if a and b have a common factor, then the above equation will not have a solution unless c is also divisible by the same common factor. Then follows the *upapatti* of the process of finding the greatest common factor of a and b by mutual division, the so-called Euclidean algorithm. He then provides an *upapatti* for the *kuṭṭaka* method of finding the solution by making a *vallī* (column) of the quotients obtained in the above mutual division, based on a detailed analysis of the various operations in reverse (*vyasta-vidhi*). Finally, he shows why the procedure differs depending upon whether there are odd or even number of coefficients generated in the above mutual division.

2.7 Nīlakaṇṭha's proof for the sum of an infinite geometric series

In his *Āryabhaṭīyabhāṣya* while deriving an interesting approximation for the arc of circle in terms of the *jyā* (Rsine) and the *śara* (Rversine), the celebrated Kerala astronomer Nīlakaṇṭha Somasutvan presents a detailed demonstration of how to sum an infinite geometric series. Though it is quite elementary compared to the various other infinite series expansions derived in the works of the Kerala School, we shall present an outline of Nīlakaṇṭha's argument as it clearly shows how the notion of limit was well understood in the Indian mathematical tradition. Nīlakaṇṭha first states the general

[21] *Bījapallavam*, cited above, p. 85-99.

result[22]

$$a\left[\left(\frac{1}{r}\right)+\left(\frac{1}{r}\right)^2+\left(\frac{1}{r}\right)^3+\ldots\right]=\frac{a}{r-1}\,.$$

where the left hand side is an infinite geometric series with the successive terms being obtained by dividing by a *cheda* (common divisor), r, assumed to be greater than 1. Nīlakaṇṭha notes that this result is best demonstrated by considering a particular case, say $r = 4$. Thus, what is to be demonstrated is that

$$\left(\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\ldots=\frac{1}{3}\,.$$

Nīlakaṇṭha first obtains the sequence of results

$$\begin{aligned}\frac{1}{3} &= \frac{1}{4}+\frac{1}{(4.3)}\,,\\ \frac{1}{(4.3)} &= \frac{1}{(4.4)}+\frac{1}{(4.4.3)}\,,\\ \frac{1}{(4.4.3)} &= \frac{1}{(4.4.4)}+\frac{1}{(4.4.4.3)}\,,\end{aligned}$$

and so on, from which he derives the general result

$$\frac{1}{3}-\left[\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]=\left(\frac{1}{4}\right)^n\left(\frac{1}{3}\right).$$

Nīlakaṇṭha then goes on to present the following crucial argument to derive the sum of the infinite geometric series: As we sum more terms, the difference between $\frac{1}{3}$ and sum of powers of $\frac{1}{4}$ (as given by the right hand side of the above equation), becomes extremely small, but never zero. Only when we take all the terms of the infinite series together do we obtain the equality

$$\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{4}\right)^n+\ldots=\frac{1}{3}\,.$$

2.8 *Yuktibhāṣā* proofs of infinite series for π and the trigonometric functions

One of the most celebrated works in Indian mathematics and astronomy, which is especially devoted to the exposition of *yukti* or proofs, is the Malay-

[22] *Āryabhaṭīyabhāṣya* of Nīlakaṇṭha, *Gaṇitapāda*, K. Sambasiva Sastri (ed.), Trivandrum 1931, p. 142-143.

alam work *Yuktibhāṣā* (c.1530) of Jyeṣṭhadeva.[23] Jyeṣṭhadeva states that his work closely follows the renowned astronomical work *Tantrasaṅgraha* (c.1500) of Nīlakaṇṭha Somasutvan and is intended to give a detailed exposition of all the mathematics required thereof.[24] The first half of *Yuktibhāṣā* deals with various mathematical topics in seven chapters and the second half deals with all aspects of mathematical astronomy in eight chapters. The mathematical part includes a detailed exposition of proofs for the infinite series and fast converging approximations for π and the trigonometric functions, which were discovered by Mādhava (c.1375).

3 *Upapatti* and "Proof"

3.1 Mathematics as a search for infallible eternal truths

The notion of *upapatti* is significantly different from the notion of 'proof' as understood in the Greek as well as the modern Western traditions of mathematics. The ideal of mathematics in the Greek and modern Western traditions is that of a formal axiomatic deductive system; it is believed that mathematics is and ought to be presented as a set of formal derivations from formally stated axioms. This ideal of mathematics is intimately linked with another philosophical presupposition – that mathematics constitutes a body of infallible eternal truths. Perhaps it is only the ideal of a formal axiomatic deductive system that could presumably measure up to this other ideal of mathematics being a body of infallible eternal truths. It is this quest for securing certainty of mathematical knowledge, which has motivated most of the foundational and philosophical investigations into mathematics and shaped the course of mathematics in the Western tradition, from the Greeks to the contemporary times.

The Greek view of mathematical objects and the nature of mathematical knowledge is clearly set forth in the following statement of Proclus (c. 5^{th} century AD) in his famous commentary on the Elements of Euclid:

[23] *Yuktibhāṣā* of Jyeṣṭhadeva, K. Chandrasekharan (ed.), Madras 1953. *Gaṇitādhyāya* alone was edited along with notes in Malayalam by Ramavarma Thampuran and A. R. Akhileswarayyar, Trichur 1948.

[24] *Yuktibhāṣā* Chapter 1.

> Mathematical being necessarily belongs neither among the first nor among the last and least simple kinds of being, but occupies the middle ground between the partless realities – simple, incomposite and indivisible – and divisible things characterized by every variety of composition and differentiation. The unchangeable, stable and incontrovertible character of the propositions about it shows that it is superior to the kind of things that move about in matter ...
>
> It is for this reason, I think, that Plato assigned different types of knowing to the highest, the intermediate, and the lowest grades of reality. To indivisible realities he assigned intellect, which discerns what is intelligible with simplicity and immediacy, and by its freedom from matter, its purity, and its uniform mode of coming in contact with being is superior to all other forms of knowledge. To divisible things in the lowest level of nature, that is, to all objects of sense perception, he assigned opinion, which lays hold of truth obscurely, whereas to intermediates, such as the forms studied by mathematics, which fall short of indivisible but are superior to divisible nature, he assigned understanding....
>
> Hence Socrates describes the knowledge of understandables as being more obscure than the highest science but clearer than the judgements of opinion. For, the mathematical sciences are more explicative and discursive than intellectual insight but are superior to opinion in the stability and irrefutability of their ideas. And their proceeding from hypothesis makes them inferior to highest knowledge, while their occupation with immaterial objects makes their knowledge more perfect than sense perception.[25]

While the above statement of Proclus is from the Platonist school, the Aristotelean tradition also held more or less similar views on the nature of mathematical knowledge, as may be seen from the following extract from the canonical text on Mathematical Astronomy, the Almagest of Claudius Ptolemy (c.2^{nd} century AD):

[25] Proclus: *A Commentary on the First Book of Euclid's Elements*, Tr.G.R.Morrow, Princeton 1970, p. 3,10.

For Aristotle divides theoretical philosophy too,very fittingly, into three primary categories, physics, mathematics and theology. For everything that exists is composed of matter, form and motion; none of these [three] can be observed in its substratum by itself, without the others: they can only be imagined. Now the first cause of the first motion of the universe, if one considers it simply, can be thought of as invisible and motionless deity; the division [of theoretical philosophy] concerned with investigating this [can be called] 'theology', since this kind of activity, somewhere up in the highest reaches of the universe, can only be imagined, and is completely separated from perceptible reality. The division [of theoretical philosophy] which investigates material and ever-moving nature, and which concerns itself with 'white', 'hot', 'sweet', 'soft' and suchlike qualities one may call 'physics'; such an order of being is situated (for the most part) amongst corruptible bodies and below the lunar sphere. That division [of theoretical philosophy] which determines the nature involved in forms and motion from place to place, and which serves to investigate shape, number, size and place, time and suchlike, one may define as 'mathematics'. Its subject-matter falls as it were in the middle between the other two, since, firstly, it can be conceived of both with and without the aid of the senses, and, secondly, it is an attribute of all existing things without exception, both mortal and immortal: for those things which are perpetually changing in their inseparable form, it changes with them, while for eternal things which have an aethereal nature, it keeps their unchanging form unchanged.

From all this we concluded: that the first two divisions of theoretical philosophy should rather be called guesswork than knowledge, theology because of its completely invisible and ungraspable nature, physics because of the unstable and unclear nature of matter; hence there is no hope that philosophers will ever be agreed about them; and that only mathematics can provide sure and unshakeable knowledge to its devotees, provided one approaches it rigorously. For its kind of proof proceeds by indisputable methods, namely arithmetic and geometry. Hence we are drawn to the investigation of that part of theoretical philosophy, as far as we were able to the whole of it, but especially to the theory concerning the divine and heavenly things. For that

> alone is devoted to the investigation of the eternally unchanging. For that reason it too can be eternal and unchanging (which is a proper attribute of knowledge) in its own domain, which is neither unclear nor disorderly.[26]

The view, that it is mathematics which can provide "sure and unshakeable knowledge to its devotees" has persisted in the Greco-European tradition down to the modern times. For instance, we may cite the popular mathematician philosopher of our times, Bertrand Russel, who declares, "I wanted certainty in the kind of way in which people want religious faith. I thought that certainty is more likely to be found in mathematics than elsewhere". In a similar vein, David Hilbert, one of the foremost mathematicians of our times declared, "The goal of my theory is to establish once and for all the certitude of mathematical methods".[27]

3.2 The *raison d'être* of *Upapatti*

Indian epistemological position on the nature and validation of mathematical knowledge is very different from that in the Western tradition. This is brought out for instance by the Indian understanding of what indeed is the purpose or *raison d'être* of an *upapatti.* In the beginning of the *golādhyāya* of *Siddhāntaśiromaṇi*, Bhāskarācārya says:

> *madhyādyaṃ dyusadāṃ yadatra gaṇitaṃ tasyopapattiṃ vinā*
> *prauḍhiṃ prauḍhasabhāsu naiti gaṇako niḥsaṃśayo na svayam* |
> *gole sā vimalā karāmalakavat pratyakṣato dṛśyate*
> *tasmādasmyupapattibodhavidhaye golaprabandhodyataḥ* ||[28]

> Without the knowledge of *upapatti*-s, by merely mastering the *gaṇita* (calculational procedures) described here, from the *madhyamādhikara* (the first chapter of *Siddhāntaśiromaṇi*) onwards,

[26] *The Almagest* of Ptolemy, Translated by G.J.Toomer, London 1984, p. 36-7.

[27] Both quotations cited in Ruben Hersh, 'Some Proposals for Reviving the Philosophy of Mathematics', Adv. Math. **31**, 31-50, 1979.

[28] *Siddhāntaśiromaṇi* of Bhāskarācārya with *Vāsanābhāṣya* and *Vāsanāvārttika* of Nṛsiṃha Daivajña, Muralidhara Chaturveda (ed.), Varanasi 1981, p. 326.

> of the (motion of the) heavenly bodies, a mathematician will not have any value in the scholarly assemblies; without the *upapatti*-s he himself will not be free of doubt (*niḥsaṃśaya*). Since *upapatti* is clearly perceivable in the (armillary) sphere like a berry in the hand, I therefore begin the *golādhyāya* (section on spherics) to explain the *upapatti*-s.

As the commentator Nṛsiṃha Daivajña explains, 'the *phala* (object) of *upapatti* is *pāṇḍitya* (scholarship) and also removal of doubts (for oneself) which would enable one to reject wrong interpretations made by others due to *bhrānti* (confusion) or otherwise.'[29]

The same view is reiterated by Gaṇeśa Daivajña in his preface to *Buddhivilāsinī*:

> *vyakte vāvyaktasaṃjñe yaduditamakhilaṃ nopapattiṃ vinā tat*
> *nirbhrānto vā ṛte tāṃ sugaṇakasadasi prauḍhatāṃ naiti cāyam* |
> *pratyakṣaṃ dṛśyate sā karatalakalitādarśavat suprasannā*
> *tasmādagryopapattiṃ nigaditumakhilam utsahe buddhivṛddhyai* ||[30]

> Whatever is stated in the *vyakta* or *avyakta* branches of mathematics, without *upapatti*, will not be rendered *nirbhrānta* (free from confusion); will not have any value in an assembly of mathematicians. The *upapatti* is directly perceivable like a mirror in hand. It is therefore, as also for the elevation of the intellect (*buddhi-vṛddhi*), that I proceed to enunciate *upapatti*-s in entirety.

Thus, as per the Indian mathematical tradition, the purpose of *upapatti* is mainly: (i) To remove doubts and confusion regarding the validity and interpretation of mathematical results and procedures; and, (ii) To obtain assent in the community of mathematicians.

Further, in the Indian tradition, mathematical knowledge is not taken to be different in any 'fundamental sense' from that in natural sciences. The valid

[29] *Siddhantaśiromaṇi*, cited above, p. 326.
[30] *Buddhivilāsinī*, cited above, p. 3.

means for acquiring knowledge in mathematics are the same as in other sciences: *Pratyakṣa* (perception), *Anumāna* (inference), *Śabda* or *Āgama* (authentic tradition). In his *Vāsanābhāṣya* on *Siddhāntaśiromaṇi*, Bhāskarācārya refers to the sources of valid knowledge (*pramāṇa*) in mathematical astronomy, and declares that

> *yadyevamucyate gaṇitaskandhe upapattimān evāgamaḥ pramāṇam* |[31]
>
> For all that is discussed in Mathematical Astronomy, only an authentic tradition or established text which is supported by *upapatti* will be a *pramāṇa*.

Upapatti here includes observation. Bhāskarācārya, for instance, says that the *upapatti* for the mean periods of planets involves observations over very long periods.

3.3 The limitations of *Tarka* or proof by contradiction

An important feature that distinguishes the *upapatti*-s of Indian mathematicians is that they do not generally employ the method of proof by contradiction or *reductio ad absurdum.* Sometimes arguments, which are somewhat similar to the proof by contradiction, are employed to show the non-existence of an entity, as may be seen from the following *upapatti* given by Kṛṣṇa Daivajña to show that "a negative number has no square root":

> The square-root can be obtained only for a square. A negative number is not a square. Hence how can we consider its square-root? It might however be argued: 'Why will a negative number not be a square? Surely it is not a royal fiat'... Agreed. Let it be stated by you who claim that a negative number is a square as to whose square it is: Surely not of a positive number, for the square of a positive number is always positive by the rule...Not also of a negative number. Because then also the square will be positive by the rule...This being the case, we do not see any such number whose square becomes negative...[32]

[31] *Siddhāntaśiromaṇi*, cited above, p. 30.
[32] *Bījapallava*, cited earlier, p. 19.

Such arguments, known as *tarka* in Indian logic, are employed only to prove the non-existence of certain entities, but not for proving the existence of an entity, which existence is not demonstrable (at least in principle) by other direct means of verification.

In rejecting the method of indirect proof as a valid means for establishing existence of an entity which existence cannot even in principle be established through any direct means of proof, the Indian mathematicians may be seen as adopting what is nowadays referred to as the 'constructivist' approach to the issue of mathematical existence. But the Indian philosophers, logicians, etc., do much more than merely disallow certain existence proofs. The general Indian philosophical position is one of eliminating from logical discourse all reference to such *aprasiddha* entities, whose existence is not even in principle accessible to all means of verification.[33] This appears to be also the position adopted by the Indian mathematicians. It is for this reason that many an "existence theorem" (where all that is proved is that the non-existence of a hypothetical entity is incompatible with the accepted set of postulates) of Greek or modern Western mathematics would not be considered significant or even meaningful by Indian mathematicians.

3.4 *Upapatti* and "Proof"

We now summarize our discussion on the classical Indian understanding of the nature and validation of mathematical knowledge:

1. The Indian mathematicians are clear that results in mathematics, even those enunciated in authoritative texts, cannot be accepted as valid unless they are supported by *yukti* or *upapatti*. It is not enough that one has merely observed the validity of a result in a large number of instances.

2. Several commentaries written on major texts of Indian mathematics and astronomy present *upapatti*-s for the results and procedures enunciated in the text.

[33]For the approach adopted by Indian philosophers to *tarka* or the method of indirect proof see for instance, M.D.Srinivas, "The Indian Approach to Formal Logic and the Methodology of Theory Construction: A Preliminary View", PPST Bulletin **9**, 32-59, 1986.

3. The *upapatti*-s are presented in a sequence proceeding systematically from known or established results to finally arrive at the result to be established.

4. In the Indian mathematical tradition the *upapatti*-s mainly serve to remove doubts and obtain consent for the result among the community of mathematicians.

5. The *upapatti*-s may involve observation or experimentation. They also depend on the prevailing understanding of the nature of the mathematical objects involved.

6. The method of *tarka* or "proof by contradiction" is used occasionally. But there are no *upapatti*-s which purport to establish existence of any mathematical object merely on the basis of *tarka* alone.

7. The Indian mathematical tradition did not subscribe to the ideal that *upapatti*-s should seek to provide irrefutable demonstrations establishing the absolute truth of mathematical results. There was apparently no attempt to present the *upapatti*-s as a part of a deductive axiomatic system. While Indian mathematics made great strides in the invention and manipulation of symbols in representing mathematical results and in facilitating mathematical processes, there was no attempt at formalization of mathematics.

The classical Indian understanding of the nature and validation of mathematical knowledge seems to be rooted in the larger epistemological perspective developed by the *Nyāya* school of Indian logic. Some of the distinguishing features of *Nyāya* logic, which are particularly relevant in this context, are: That it is a logic of cognitions (*jñāna*) and not "propositions"; that it has no concept of pure "formal validity" as distinguished from "material truth"; that it does not distinguish necessary and contingent truth or analytical and synthetic truth; that it does not admit, in logical discourse, premises which are known to be false or terms that are non-instantiated; that it does not accord *tarka* or "proof by contradiction" a status of independent *pramāṇa* or means of knowledge, and so on.[34]

[34] For a discussion of some of these features, see J. N. Mohanty: *Reason and Tradition in Indian Thought*, Oxford 1992.

The close relation between the methodology of Indian mathematics and *Nyāya* epistemology, has been commented upon by a leading scholar of *navya-nyāya*:

> The western concept of proof owes its origin to Plato's distinction between knowledge and opinion or between reason and sense. According to Plato, reason not merely knows objects having ontological reality, but also yields a knowledge which is logically superior to opinion to which the senses can aspire. On this distinction is based the distinction between contingent and necessary truths, between material truth and formal truth, between rational knowledge which can be proved and empirical knowledge which can only be verified ...
>
> As a matter of fact, the very concept of reason is unknown in Indian philosophy. In the systems which accept inference as a source of true knowledge, the difference between perception and inference is not explained by referring the two to two different faculties of the subject, sense and reason, but by showing that inferential knowledge is caused in a special way by another type of knowledge (*vyāpti-jñāna* [knowledge of invariable concomitance]), whereas perception is not so caused ...
>
> In Indian mathematics we never find a list of self-evident propositions which are regarded as the basic premises from which other truths of mathematics follow ...
>
> Euclid was guided in his axiomatization of geometry by the Aristotelean concept of science as a systematic study with a few axioms which are self-evident truths. The very concept of a system thus involves a distinction between truths which need not be proved (either because they are self-evident as Aristotle thought, or because they have been just chosen as the primitive propositions of a system as the modern logicians think) and truths which require proof. But this is not enough. What is important is to suppose that the number of self-evident truths or primitive propositions is very small and can be exhaustively enumerated.
>
> Now there is no Indian philosophy which holds that some truths do not require any proof while others do. The systems which accept *svataḥ-prāmāṇyavāda* hold that all (true) knowledge is self-evidently true, and those which accept *parataḥ-prāmāṇyavāda*

> hold that all (true) knowledge requires proof; there is no system which holds that some truths require proof while others do not ... [35]

3.5 Towards a new epistemology for Mathematics

Mathematics today, rooted as it is in the modern Western tradition, suffers from serious limitations. Firstly, there is the problem of 'foundations' posed by the ideal view of mathematical knowledge as a set of infallible eternal truths. The efforts of mathematicians and philosophers of the West to secure for mathematics the status of indubitable knowledge has not succeeded; and there is a growing feeling that this goal may turn out to be a mirage.

After surveying the changing status of mathematical truth from the Platonic position of "truth in itself", through the early twentieth century position that "mathematical truth resides ... uniquely in the logical deductions starting from premises arbitrarily set by axioms", to the twentieth century developments which question the infallibility of these logical deductions themselves, Bourbaki are forced to conclude that:

> To sum up, we believe that mathematics is destined to survive, and that the essential parts of this majestic edifice will never collapse as a result of the sudden appearance of a contradiction; but we cannot pretend that this opinion rests on anything more than experience. Some will say that this is small comfort; but already for two thousand five hundred years mathematicians have been correcting their errors to the consequent enrichment and not impoverishment of this science; and this gives them the right to face the future with serenity.[36]

Apart from the problems inherent in the goals set for mathematics, there are also other serious inadequacies in the Western epistemology and philosophy of mathematics. The ideal view of mathematics as a formal deductive system

[35] Sibajiban Bhattacharya, 'The Concept of Proof in Indian Mathematics and Logic', in *Doubt, Belief and Knowledge*, Delhi 1987, p. 193, 196.

[36] N. Bourbaki, *Elements of Mathematics: Theory of Sets*, Springer 1968, p. 13; see also N. Bourbaki, *Elements of History of Mathematics*, Springer 1994, p. 1-45.

gives rise to serious distortions. Some scholars have argued that this view of mathematics has rendered philosophy of mathematics barren and incapable of providing any understanding of the actual history of mathematics, the logic of mathematical discovery and, in fact, the whole of creative mathematical activity.[37]

There is also the inevitable chasm between the ideal notion of infallible mathematical proof and the actual proofs that one encounters in standard mathematical practice, as portrayed in a recent book:

> On the one side, we have real mathematics, with proofs, which are established by the 'consensus of the qualified'. A real proof is not checkable by a machine, or even by any mathematician not privy to the *gestalt*, the mode of thought of the particular field of mathematics in which the proof is located. Even to the 'qualified reader' there are normally differences of opinion as to whether a real proof (i.e., one that is actually spoken or written down) is complete or correct. These doubts are resolved by communication and explanation, never by transcribing the proof into first order predicate calculus. Once a proof is 'accepted', the results of the proof are regarded as true (with very high probability). It may take generations to detect an error in a proof... On the other side, to be distinguished from real mathematics, we have 'meta-mathematics'... It portrays a structure of proofs, which are indeed infallible 'in principle'... [The philosophers of mathematics seem to claim] that the problem of fallibility in real proofs... has been conclusively settled by the presence of a notion of infallible proof in meta-mathematics... One wonders how they would justify such a claim.[38]

Apart from the fact that the modern Western epistemology of mathematics fails to give an adequate account of the history of mathematics and standard mathematical practice, there is also the growing awareness that the ideal of mathematics as a formal deductive system has had serious consequences in the teaching of mathematics. The formal deductive format adopted in

[37] I. Lakatos, *Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery*, Cambridge 1976.

[38] Philip J. Davis and Reuben Hersh, *The Mathematical Experience*, Boston 1981, p. 354-5.

mathematics books and articles greatly hampers understanding and leaves the student with no clear idea of what is being talked about.

Notwithstanding all these critiques, it is not likely that, within the Western philosophical tradition, any radically different epistemology of mathematics will emerge; and so the driving force for modern mathematics is likely to continue to be a search for infallible eternal truths and modes of establishing them, in one form or the other. This could lead to 'progress' in mathematics, but it would be progress of a rather limited kind.

If there is a major lesson to be learnt from the historical development of mathematics, it is perhaps that the development of mathematics in the Greco-European tradition was seriously impeded by its adherence to the cannon of ideal mathematics as laid down by the Greeks. In fact, it is now clearly recognized that the development of mathematical analysis in the Western tradition became possible only when this ideal was given up during the heydays of the development of "infinitesimal calculus" during $16^{th} - 18^{th}$ centuries. As one historian of mathematics notes:

> It is somewhat paradoxical that this principal shortcoming of Greek mathematics stemmed directly from its principal virtue– the insistence on absolute logical rigour…Although the Greek bequest of deductive rigour is the distinguishing feature of modern mathematics, it is arguable that, had all the succeeding generations also refused to use real numbers and limits until they fully understood them, the calculus might never have been developed and mathematics might now be a dead and forgotten science.[39]

It is of course true that the Greek ideal has gotten reinstated at the heart of mathematics during the last two centuries, but it seems that most of the foundational problems of mathematics can also be perhaps traced to the same development. In this context, study of alternative epistemilogies such as that developed in the Indian tradition of mathematics, could prove to be of great significance for the future of mathematics.

[39] C. H. Edwards, *History of Calculus*, New York 1979, p. 79.

Appendices

A List of Works Containing *Upapatti*-s

The following are some of the important commentaries available in print, which present *upapatti*-s of results and procedures in mathematics and astronomy:

1. *Bhāṣya* of Bhāskara I (c.629) on *Āryabhaṭīya* of Āryabhaṭa (c.499), K. S. Shukla (ed.), New Delhi 1975. *Bhāṣya* on *Gaṇitapāda* translated by Agathe Keller, 2 Volumes, Basel 2006.

2. *Bhāṣya* of Govindasvāmin (c.800) on *Mahābhāskarīya* of Bhāskara I (c.629), T. S. Kuppanna Sastri (ed.), Madras 1957.

3. *Vāsanābhāṣya* of Caturveda Pṛthūdakasvāmin (c.860) on *Brāhmasphuṭasiddhānta* of Brahmagupta (c.628), Chs. I-III, XXI, Ramaswarup Sharma (ed.), New Delhi 1966; Ch XXI, Edited and Translated by Setsuro Ikeyama, Ind. Jour. Hist. Sc. Vol. **38**, 2003.

4. *Vivaraṇa* of Bhāskarācārya II (c.1150) on *Śiṣyadhīvṛddhidatantra* of Lalla (c.748), Chandrabhanu Pandey (ed.), Varanasi 1981.

5. *Vāsanā* of Bhāskarācārya II (c.1150) on his own *Bījagaṇita*, Jivananda Vidya-sagara (ed.), Calcutta 1878; Achyutananda Jha (ed.) Varanasi 1949, Rep. 1994.

6. *Mitākṣarā* or *Vāsanā* of Bhāskarācārya II (c.1150) on his own *Siddhāntaśiromaṇi*, Bapudeva Sastrin (ed.), Varanasi 1866; Muralidhara Chaturveda (ed.), Varanasi 1981.

7. *Vāsanābhāṣya* of Āmarāja (c.1200) on *Khaṇḍakhādyaka* of Brahmagupta (c.665), Babuaji Misra (ed.), Calcutta 1925.

8. *Gaṇitabhūṣaṇa* of Makkībhaṭṭa (c.1377) on *Siddhāntaśekhara* of Śrīpati (c.1039), Chs. I-III, Babuaji Misra (ed.), Calcutta 1932.

9. *Siddhāntadīpikā* of Parameśvara (c.1431) on the *Bhāṣya* of Govindasvāmin (c.800) on *Mahābhāskarīya* of Bhāskara I (c.629), T.S. Kuppanna Sastri (ed.), Madras 1957.

10. *Āryabhaṭīyabhāṣya* of Nīlakaṇṭha Somasutvan (c.1501) on *Āryabhaṭīya* of Āryabhaṭa, K. Sambasiva Sastri (ed.), 3 Vols., Trivandrum 1931, 1932, 1957.

11. *Yuktibhāṣā* (in Malayālam) of Jyeṣṭhadeva (c.1530); *Gaṇitādhyaya*, Ramavarma Thampuran and A. R. Akhileswarayyar (eds.), Trichur 1948; K. Chandrasekharan (ed.), Madras 1953.

12. *Yuktidīpikā* of Śaṅkara Vāriyar (c.1530) on *Tantrasaṅgraha* of Nīlakaṇṭha Somasutvan (c.1500), K. V. Sarma (ed.), Hoshiarpur 1977.

13. *Kriyākramakarī* of Śaṅkara Vāriyar (c.1535) on *Līlāvatī* of Bhāskarācārya II (c.1150), K. V. Sarma (ed.), Hoshiarpur 1975.

14. *Sūryaprakāśa* of Sūryadāsa (c.1538) on Bhāskarācārya's *Bījagaṇita* (c.1150), Chs. I-V, Edited and translated by Pushpa Kumari Jain, Vadodara 2001.

15. *Buddhivilāsinī* of Gaṇeśa Daivajña (c.1545) on *Līlāvatī* of Bhāskarācārya II (c.1150), V. G. Apte (ed.), 2 Vols, Pune 1937.

16. *Ṭīkā* of Mallāri (c.1550) on *Grahalāghava* of Gaṇeśa Daivajña (c.1520), Balachandra (ed.), Varanasi 1865; Kedaradatta Joshi (ed.), Varanasi 1981.

17. *Bījanavāṅkurā* or *Bījapallavam* of Kṛṣṇa Daivajña (c.1600) on *Bījagaṇita* of Bhāskarācārya II (c.1150), V. G. Apte (ed.), Pune 1930; T. V. Radha Krishna Sastry (ed.), Tanjore 1958; Biharilal Vasistha (ed.), Jammu 1982.

18. *Śiromaṇiprakāśa* of Gaṇeśa (c.1600) on *Siddhāntaśiromaṇi* of Bhāskarācārya II (c.150), *Grahagaṇitādhyāya*, V. G. Apte (ed.), 2 Vols. Pune 1939, 1941.

19. *Gūḍhārthaprakāśa* of Raṅganātha (c.1603) on *Sūryasiddhānta*, Jivananda Vidyasagara (ed.), Calcutta 1891; Reprint, Varanasi 1990.

20. *Vāsanāvārttika*, commentary of Nṛsiṃha Daivajña (c.1621) on *Vāsanābhāṣya* of Bhāskarācārya II, on his own *Siddhantaśiromaṇi* (c.1150), Muralidhara Chaturveda (ed.), Varanasi 1981.

21. *Marīci* of Munīśvara (c.1630) on *Siddhantaśiromaṇi* of Bhāskarācārya (c.1150), *Madhyamādhikara*, Muralidhara Jha (ed.), Varanasi 1908; *Grahagaṇitādhyaya*, Kedaradatta Joshi (ed.), 2 vols. Varanasi 1964; *Golādhyāya*, Kedaradatta Joshi (ed.), Delhi 1988.

22. *Āśayaprakāśa* of Munīśvara (c.1646) on his own *Siddhāntasārvabhauma*, *Gaṇitādhyaya* Chs. I-II, Muralidhara Thakura (ed.), 2 Vols, Varanasi 1932, 1935; Chs. III-IX, Mithalal Ojha (ed.), Varanasi 1978.

23. *Śeṣavāsanā* of Kamalākarabhaṭṭa (c.1658) on his own *Siddhāntatattva-viveka*, Sudhakara Dvivedi (ed.), Varanasi 1885; Reprint, Varanasi 1991.

24. *Sauravāsanā* of Kamalākarabhaṭṭa (c.1658) on *Sūryasiddhānta*, Chs. I-X, Srichandra Pandeya (ed.), Varanasi 1991.

25. *Gaṇitayuktayaḥ*, Tracts on Rationale in Mathematical Astronomy by various Kerala Astronomers (c.$16^{th} - 19^{th}$ century), K. V. Sarma (ed.), Hoshiarpur 1979.

B *Upapatti* of the *Kuṭṭaka* Process

B.1 The *Kuṭṭaka* Process

The *Kuṭṭaka* process for solving linear indeterminate equations has been known to Indian mathematicians at least since the time of *Āryabhaṭa* (c.499 AD). Consider the first order indeterminate equation of the form

$$\frac{(ax \pm c)}{b} = y.$$

Here a, b, c are given positive integers, and the problem is to find integral values of x, y that satisfy the above equation; a is called the *bhājya* (dividend), b the *bhājaka* or *hāra* (divisor), c the *kṣepa* (interpolator). The *kṣepa* is said to be *dhana* (additive) or *ṛṇa* (subtractive) depending on whether the 'plus' or 'minus' sign is taken in the above equation. The numbers to be found are x, called the *guṇaka* (multiplier) and y the *labdhi* (quotient). The process of solution of the above equation is referred to as the *kuṭṭaka* process. *Kuṭṭaka* or *kuṭṭākāra* (translated as 'pulveriser') is the name for the *guṇaka* (multiplier) x. As Kṛṣṇa Daivajña explains:

> *Kuṭṭaka* is the *guṇaka*; for, multiplication is referred to by terms (such as *hanana, vadha, ghāta*, etc.), which have connotation of

"injuring", "killing" etc. By etymology and usage (*yogarūḍhi*), this term (*kuṭṭaka*) refers to a special multiplier. That number, which when multiplied by the given *bhājya* and augmented or diminished by the given *kṣepa* and divided by the given *hāra*, leaves no remainder, is called the *kuṭṭaka* by the ancients.[40]

The procedure for solution of the above equation is explained by Bhāskarācārya in his *Bījagaṇita* in verses 1-5 of the *Kuṭṭakādhyāya* paraphrased below:[41]

1. In the first instance, as preparatory to carrying out the *kuṭṭaka* process (or for finding the *kuṭṭaka*), the *bhājya, hāra* and *kṣepa* are to be factored by whatever number possible. If a number, which divides both the *bhājya* and *hāra*, does not divide the *kṣepa*, then the problem is an ill-posed problem.

2. When the *bhājya* and *hāra* are mutually divided, the last remainder is their *apavartana* or *apavarta* (greatest common factor). The *bhājya* and *hāra* after being divided by that *apavarta* will be characterised as *dṛḍha* (firm or reduced) *bhājya* and *hāra*.

3. Divide mutually the *dṛḍha-bhājya* and *hāra*, until unity becomes the remainder in the dividend. Place the quotients [of this mutual division] one below the other, the *kṣepa* below them and finally zero at the bottom.

4. (In this *vallī*) the number just above the penultimate number is replaced by the product of that number with the penultimate number, with the last number added to it. Then remove the last term. Repeat the operation till only a pair of numbers is left. The upper one of these is divided [abraded] by the *dṛḍha-bhājya*, the remainder is the *labdhi*. The other (or lower) one being similarly treated with the (*dṛḍha*) *hāra* gives the *guṇa*.

5. This is the operation when the number of quotients [in the mutual division of *dṛḍha-bhājya* and *dṛḍha-hāra*] is even. If the number of quotients be odd then the *labdhi* and *guṇa* obtained this way should be

[40] *Bījapallavam* commentary on *Bījagaṇita*, cited above, p. 86.
[41] *Bījapallavam* commentary on *Bījagaṇita*, cited above, p. 86-89.

subtracted from their abraders (*dṛḍha-bhājya* and *dṛḍha-hāra* respectively) to obtain the actual *labdhi* and *guṇa*.

B.2 An Example

Let us explain the above procedure with an example that also occurs later in the *upapatti* provided by Kṛṣṇa Daivajña.

$$\frac{1211x + 21}{497} = y.$$

Let *bhājya* be 1211, *hāra* 497 and *kṣepa* 21. The procedure outlined is for additive *kṣepa* and the equation we have to solve is $1211x + 21 = 497y$. The first step is to make *bhājya* and *hāra* mutually prime to each other (*dṛḍha*) by dividing them by their greatest common factor (*apavartāṅka*). The *apavartāṅka* is found, by the process of mutual division (the so-called Euclidean algorithm), to be 7. Now dividing *bhājya*, *hāra* and *kṣepa* by this *apavartāṅka*, we get the *dṛḍha-bhājya*, *hāra* and *kṣepa* to be 173, 71 and 3, respectively. Thus, the problem is reduced to the solution of the equation $\frac{173x+3}{71} = y$

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrr}
497) & 1211 & (2 & & & & & & & & \\
 & 994 & & & & & & & & & \\
\cline{2-2}
 & 217) & 497 & (2 & & & & & & & \\
 & & 434 & & & & & & & & \\
\cline{3-3}
 & & 63) & 217 & (3 & & & & & & \\
 & & & 189 & & & & & & & \\
\cline{4-4}
 & & & 28) & 63 & (2 & & & & & \\
 & & & & 56 & & & & & & \\
\cline{5-5}
 & & & & 7) & 28 & (4 & & & & \\
 & & & & & 28 & & & & & \\
\cline{6-6}
 & & & & & 0 & & & & & \\
\cline{6-6}
\end{array}$$

Now by mutually dividing the *dṛḍha-bhājya* and *hāra*, the *vallī* of quotients (which are the same as before) is formed, below which are set the *kṣepa* 3 and zero. Following the procedure stated (in verse 4, above) we get the two numbers 117, 48. Now, since the number of quotients is even, we need to follow the procedure (of verse 4 above) and get the *labdhi*, $y = 117$ and the *guṇa*, $x = 48$.

2	2	2	2	117	
2	2	2	48	48	$48 \times 2 + 21 = 117$
3	3	21	21		$21 \times 2 + 6 = 48$
2	6	6			$3 \times 6 + 3 = 21$
3	3				$2 \times 3 + 0 = 6$
0					

Now we shall present the *upapatti* of the above process as expounded by Kṛṣṇa Daivajña in his commentary on *Bījagaṇita*.[42] For convenience of understanding we divide this long proof into several steps:

B.3 Proof of the fact that when the *Bhājya, Hāra*, and *Kṣepa* are factored by the same number, there is no change in the *Labdhi* and *Guṇa*[43]

It is well known that whatever is the quotient (*labdhi*) of a given dividend and divisor, the same will be the quotient if both the dividend and divisor are multiplied or factored by the same number. In the present case, the given *bhājya* multiplied by some *guṇaka* and added with the positive or negative *kṣepa* is the dividend. The divisor is the given *hāra*. Now the dividend consists of two parts. The given *bhājya* multiplied by the *guṇaka* is one and the *kṣepa* is the other. If their sum is the dividend and if the dividend and divisor are both factored by the same number, then there is no change in the *labdhi*. Therefore, that factor from which the divisor is factored, by the same factor is the dividend, which is resolvable into two parts, is also to be factored. Now

[42] *Bījapallavam* commentary on *Bījagaṇita*, cited above, p. 89-99.

[43] *Bījapallavam* commentary on *Bījagaṇita*, cited above, p. 89-90.

the result is the same whether we factor the two parts and add or add the two parts and then factor the sum. Just as, if the dividend 27 is factored by 3 we get 9; alternatively the dividend is resolved into the parts 9, 18 which when factored by 3 give 3, 6 and these when added give the same factored dividend, viz., 9. In the same way in other instances also, if the dividend is resolved into two or many parts and these are factored and added, then the result will be the same as the factored dividend.

Therefore, when we factor the given *hāra*, then the given *bhājya* multiplied by the *guṇa* should also be factored and so also the *kṣepa*. Now *guṇa* being not known, the given *bhājya* multiplied by the *guṇa* will be another unknown, whose factoring is not possible; still, if the given *bhājya* is factored and then multiplied by the *guṇa*, then we get the same result as factoring that part of the dividend which is gotten by multiplying the given *bhājya* by *guṇa*. For, it does not make a difference whether we factor first and then multiply or whether we multiply first and then factor. Thus, just as the given *bhājya* multiplied by the *guṇa* will become one part in the resolution of the dividend, in the same way the factored *bhājya* multiplied by the same *guṇa* will become one part in the resolution of the factored dividend. The factored *kṣepa* will be the second part. In this manner, the *bhājya*, *hāra* and *kṣepa* all un-factored or factored will lead to no difference in the *guṇa* and *labdhi*, and hence for the sake of *lāghava* (felicity of computation) it is said that 'the *bhājya*, *hāra* and *kṣepa* have to be factored ... [verse 1]'. We will discuss whether the factoring is necessary or not while presenting the *upapatti* of 'Divide-mutually the *dṛḍha-bhājya* and *hāra*... [verse 3]'.

B.4 Proof of the fact that if a number, which divides both *Bhājya* and *Hāra*, does not divide the *Kṣepa*, then the problem is ill-posed[44]

Now the *upapatti* of *khilatva* or ill-posed-ness: Here, when the divisor and dividend are factored, even though there is no difference in the quotient, there is always a change in the remainder. The remainder obtained when (divisor and dividend) are fac-

[44] *Bījapallavam* commentary on *Bījagaṇita*, cited above, p. 90-91.

tored, if multiplied by the factor, will give us the remainder for the original (un-factored) divisor and dividend. For instance, let the dividend and divisor be 21, 15; these factored by 3 give 7, 5. Now if the dividends are multiplied by 1 and divided by the respective divisors, the remainders are 6, 2; when dividends are multiplied by 2 the remainders are 12, 4; when multiplied by 3 they are 3, 1; when multiplied by 4 they are 9, 3; when multiplied by 5, they are 0, 0. If we multiply by 6, 7 etc. we get back the same sequence of remainders. Therefore, if we consider the factored divisor, 5, the remainders are 0, 1, 2, 3, 4 and none other than these. If we consider the un-factored divisor 15, the remainders are 0, 3, 6, 9, 12 and none other than these. Here, all the remainders have the common factor 3.

Now, let us consider the *kṣepa*. When the *guṇaka* (of the given *bhājya*) is such that we have zero remainder (when divided by the given *hāra*), then (with *kṣepa*) we will have zero remainder only when the *kṣepa* is zero or a multiple of *hāra* by one, two, etc., and not for any other *kṣepa*... For all other *guṇakas* which leave other remainders, (when multiplied by *bhājya* and divided by *hāra*) then (with *kṣepa*) we have zero remainder when *kṣepa* is equal to the *śeṣa* (remainder) or *hāra* diminished by *śeṣa*, depending on whether *kṣepa* is additive or subtractive and not for any other *kṣepa*, unless it is obtained from the above by adding *hāra* multiplied by one, two, etc. Thus, in either case of *kṣepa* being equal to the *śeṣa* or *hāra* diminished by the *śeṣa*, since *kṣepa* will be included in the class of *śeṣas* discussed in the earlier paragraph, the *kṣepa* will have the same *apavarta* or factor (that *bhājya* and *hāra* have). This will continue to be the case when we add any multiple of *hāra* to the *kṣepa*. Thus we do not see any such *kṣepa* which is not factorable by the common factor of the *bhājya* and *hāra*. Therefore, when the *kṣepa* is not factorable in this way, with such a *kṣepa* a zero remainder can never be obtained (when *bhājya* is multiplied by any *guṇa* and divided by *hāra* after adding or subtracting the *kṣepa* to the above product); because the *kṣepas* that can lead to zero remainder are restricted as discussed above. With no more ado, it is indeed correctly said that the problem itself is ill-posed when the *kṣepa* is not divisible by the common factor of *bhājya* and *hāra*.

B.5 Rationale for the procedure for finding *Apavartāṅka* – the greatest common factor[44]

Now the rationale for the procedure for finding the *apavatāṅka* (greatest common factor). Here the *apavatāṅka* is to be understood as the factor such that when the divisor and dividend are factored by this, no further factorisation is possible. That is why they are said to be *dṛḍha* (firm, prime to each other) when factored by this *apavatāṅka*. Now the procedure for finding that: When dividend and divisor are equal, the greatest common factor (G.C.F.) is equal to them as is clear even to the dull-witted. Only when they are different will this issue become worthy of investigation. Now consider 221, 195. Between them the smaller is 195 and the G.C.F. being its divisor cannot be larger that that. The G.C.F. will be equal to the smaller if the larger number is divisible by the smaller number, i.e., leaves no remainder when divided. When the remainder is 26, then the G.C.F. cannot be equal to the smaller number 195, but will be smaller than that. Now let us look into that.

The larger number 221 is resolvable into two parts; one part is 195 which is divisible by the smaller number and another part is 26, the remainder. Now among numbers less than the smaller number 195, any number which is larger than the remainder 26, cannot be the G.C.F.; for, the G.C.F. will have to divide both parts to which the large number 221 is resolved. Now the remainder part 26, itself, will be the G.C.F., if the smaller number 195 were divisible by 26. As it is not, the G.C.F. is smaller than the remainder 26. Now let us enquire further.

The smaller number 195 is resolvable into two parts; 182 which is divisible by the first remainder 26 and the second remainder 13. Now, if a number between the earlier remainder 26 and the second remainder 13 is a G.C.F., then that will have to somehow divide 26, and hence the part 182; but there is no way in which such a number can divide the other part 13 and hence it will not divide the smaller number 195.

Thus, among numbers less than the first remainder 26, the G.C.F. can be at most equal to the second remainder 13. That too only

[44] *Bījapallavam* commentary on *Bījagaṇita*, cited above, p. 91-92.

if when the first remainder 26 is divided by the second remainder 13 there is no remainder ... Now when the first remainder divided by the second remainder leaves a (third) remainder, then by the same argument, the G.C.F. can at most be equal to the third remainder. And, by the same *upapatti*, when it happens that the previous remainder is divisible by the succeeding remainder then that remainder is the greatest common factor. Thus is proved "When *bhājya* and *hāra* are mutually divided, the last (non-zero) remainder is their *apavarta* ... (verse 2)".

B.6 Rationale for the *Kuṭṭaka* process when the *Kṣepa* is zero[45]

When there is no *kṣepa*, if the *bhājya* is multiplied by zero and divided by *hāra* there is no remainder and hence zero itself is both *guṇa* and *labdhi*; or if we take *guṇa* to be equal to *hāra*, then since *hāra* is divisible by *hāra* we get *labdhi* equal to *bhājya*. Therefore, when there is no *kṣepa*, then zero or any multiple of *hāra* by a desired number will be the *guṇa* and zero or the *bhājya* multiplied by the desired number will be the *labdhi*. Thus here, if the *guṇa* is increased by an amount equal to *hāra* then the *labdhi* will invariably be increased by an amount equal to *bhājya*...

Now even when *kṣepa* is non-zero, if it be equal to *hāra* or a multiple of *hāra* by two, three, etc., then the *guṇa* will be zero, etc. as was stated before. For, with such a *guṇa*, there will be a remainder (when divided by *hāra*) only because of *kṣepa*. But if *kṣepa* is also a multiple of *hāra* by one, two, etc., how can there arise a remainder? Thus for such a *kṣepa*, the *guṇa* is as stated before. In the *labdhi* there will be an increase or decrease by an amount equal to the quotient obtained when the *kṣepa* is divided by *hāra*, depending on whether *kṣepa* is positive or negative...

B.7 Rationale for the *Kuṭṭaka* process when *Kṣepa* is non-zero[46]

Now when the *kṣepa* is otherwise: The *upapatti* is via resolving the *bhājya* into two parts. The part divisible by *hāra* is one.

[45] *Bījapallavam* commentary on *Bījagaṇita*, cited above, p. 92-93.
[46] *Bījapallavam* commentary on *Bījagaṇita*, cited above, p. 93-98.

The remainder is the other. When *bhājya* and *hāra* are 16, 7 the parts of *bhājya* as stated are 14, 2. Now since the first part is divisible by *hāra*, if it is multiplied by any *guṇa* it will still be divisible by *hāra*. Now if the given *kṣepa* when divided by the second part leaves no remainder, then the quotient obtained in this division is the *guṇa* (in case the *kṣepa* is subtractive). For, when this *guṇa* multiplies the second part of *bhājya* and *kṣepa* is subtracted then we get zero. Now if the *kṣepa* is not divisible by the second part, then it is not simple to find the *guṇa* and we have to take recourse to other procedure.

When the *bhājya* is divided by *hāra*, if 1 is the remainder, then the second part is also 1 only. Then whatever be the *kṣepa*, if this remainder is multiplied by *kṣepa* we get back the *kṣepa* and so we can apply the above procedure and *guṇa* will be equal to *kṣepa*, when *kṣepa* is subtractive, and equal to *hāra* diminished by *kṣepa*, when the *kṣepa* is additive. In the latter case, when the *guṇa* multiplies the second part of *bhājya* we get *hāra* diminished by *kṣepa*, when the *kṣepa* is additive. In the later case, when the *guṇa* multiplies the second part of *bhājya* we get *hāra* diminished by *kṣepa*. When we add *kṣepa* to this we get *hāra*, which is trivially divisible by *hāra*. The *labdhi* will be the quotient, obtained while *bhājya* is divided by *hāra*, multiplied by *guṇa* in the case of subtractive *kṣepa* and this augmented by 1 in the case of additive *kṣepa*.

Now when *bhājya* is divided by *hāra* the remainder is not 1, then the procedure to find the *guṇa* is more complicated. Now take the remainder obtained in the division of *bhājya* by *hāra* as the divisor and *hāra* as the dividend. Now also if 1 is not the remainder then the procedure for finding the *guṇa* is yet more difficult. Now divide the first remainder by the second remainder. If the remainder is 1, then if the first remainder is taken as the *bhājya* and the second remainder is *hāra*, we can use the above procedure to get the *guṇa* as *kṣepa* or *hāra* diminished by *kṣepa*, depending on whether the *kṣepa* is additive or subtractive. But if the remainder is larger than 1 even at this stage, then the procedure to find *guṇa* is even more complicated. Therefore, when we go on doing mutual division, we want to arrive at remainder 1 at some stage. But how can that be possible if *bhājya* and *hāra* have a common factor, for the ultimate remainder in mutual division is the greatest common factor. Now if we factor the *bhājya* and *hāra* by the *apavartāṅka* (greatest common factor) then the remainders will also be factored by that, and the final remainder will be unity. This is why it is necessary to first reduce both *bhājya* and *hāra* by their greatest common factor.

Now, even when the penultimate remainder considered as a *bhājya* gives unity as the remainder when divided by the next remainder (considered as *hāra*) and from that a corresponding *guṇa* can be obtained, how really is one to find the *guṇa* appropriate to the originally specified *bhājya*. That is to be found by *vyasta-vidhi*, the reverse process or the process of working backwards. Now let the *bhājya* be 1211, *hāra* 497 and *kṣepa* 21. If *bhājya* and *hāra* are mutually divided, the final remainder (or their G.C.F.) is 7. Factoring by this, the reduced *bhājya*, *hāra* and *kṣepa* are 173, 71 and 3 respectively. Now by mutual division of these *dṛḍha-bhājya* and *hāra*, we get the *vallī* (sequence) of quotients 2, 2, 3, 2 and remainders 31, 9, 4, 1 and the various *bhājyas* and *hāras* as follows:

bhājya	173	71	31	9
hāra	71	31	9	4

Now in the last *bhājya* 9, there are two parts: 8 which is divisible by *hāra* 4 and remainder 1. Using the procedure stated above, the *guṇa* will be the same as the *kṣepa* 3, for the case of subtractive *kṣepa*. The quotient 2 (of the division of the last *bhājya* 9 by the *hāra* 4) multiplied by this *guṇa* 3 will give the *labdhi* 6. It is for this reason it is said that, "place the quotients one blow the other, the *kṣepa* below them and finally zero at the bottom... (verse 3)." Here the "last quotient multiplied by below... (verse 4)" gives (the changed *vallī* as shown):

2	
2	
3	
2	
3	*kṣepa*
0	

2	
2	
3	
6	*labdhi*
3	*guṇa*

Now, keeping the same *kṣepa*, we will discuss what will be the *guṇa* for the earlier pair of *bhājya* and *hāra* (given by) 31, 9. Here also the parts (to which the *bhājya* is to be resolved) as stated above are 27, 4. Now the first part, whatever be the number it is multiplied by, is divisible by *hāra*. Thus it is appropriate to look at the second part while considering the *guṇa* and *labdhi*. Thus we have the pair of *bhājya* and *hāra* 4, 9. This is only the previous pair (of 9, 4) considered with the *bhājya* and *hāra* interchanged and this leads to an interchange of the *guṇa* and *labdhi* also. This can be seen as follows.

> The *bhājya* 9, multiplied by *guṇa* 3 leads to 27 (and this) diminished by *kṣepa* 3 gives 24 (and this) divided by *hāra* 4 gives the *labdhi* 6. Now by inverse process, this *labdhi* 6 used as a *guṇa* of the new *bhājya* 4, gives 24 (and this) augmented by *kṣepa* 3 gives 27 (and this) is divisible by the new *hāra* 9; and hence 6, the *labdhi* for the last pair (of *bhājya* and *hāra*) is the *guṇa* for the present. The *labdhi* (considering the second part alone) is 3, the *guṇa* for the last pair.

2	
2	
3	
6	*guṇa*
3	*labdhi*

> But for the given *bhājya* (31), the *labdhi* for the earlier part (27) multiplied by the *guṇa* is to be added. The *guṇa* is the penultimate entry (6) in the *vallī* . The *labdhi* for the first part is the quotient (3) placed above that. And these two when multiplied will give the *labdhi* (18) for the first part. This is to be added to the *labdhi* for the second part which is 3 the last entry in the *vallī*. Thus we get a new *vallī*.

2	
2	
21	*labdhi*
6	*guṇa*
3	*labdhi*

> The last entry 3 is no longer relevant and omitting that we get the (transformed) *vallī*. So it is said "multiply the penultimate number by the number just above and add the earlier term. Then reject the lowest... (verse 4)". Thus for the pair 31, 9 we have obtained by the inverse process (*vyasta-vidhi*) the *labdhi* and *guṇa*, 21, 6 for additive (*kṣepa*).

2	
2	
21	*labdhi*
6	*guṇa*

Now for the still earlier pair of *bhājya* and *hāra*, namely 71, 31 and with the same *kṣepa*, let us enquire about the *guṇa*. Here again (the *bhājya* is divided into) parts 62, 9 as stated above, and keeping the first part aside we get the pair of *bhājya* and *hāra*, 9, 31. Again, since we have only interchanged the earlier *bhājya* and *hāra*, the same should happen to *labdhi* and *guṇa*. Thus we have as *guṇa* and *labdhi* 21, 6. Here also the *labdhi* of the first part is to be multiplied by the *guṇa*. The penultimate entry in the *vallī*, 21, which is now the *guṇa* is multiplied by the 2 which is above it and which is the *labdhi* of the first part (62), and to the result 42 is added the *labdhi* 6 of the second part (9), and thus we get the total *labdhi* 48.

The last entry of the *vallī* as shown is removed as before, and we get the (transformed) *vallī*. Thus by the inverse process we get for the pair of *bhājya* and *hāra* 71, 31, and for a subtractive *kṣepa*, the *labdhi* and *guṇa* 48,21.

2	
48	*labdhi*
21	*guṇa*

Now the enquiry into *guṇa* associated with the yet earlier pair of *bhājya* and *hāra*, 173, 71. Here also splitting (the *bhājya*) into two parts 142, 31 as stated before, we get the *bhājya* and *hāra* 31, 71. Here again, we only have an interchange of *bhājya* and *hāra* from what we discussed before and so by interchanging *labdhi* and *guṇa* as also the (status of additivity or subtractivity of the) *kṣepa*, we get the *labdhi* and *guṇa* 21, 48 for additive *kṣepa*. Here again to get the *labdhi* of the first part, the penultimate (entry in the *vallī*) 48 is multiplied by the entry 2 above it to get 96.

To get the total *labdhi*, the last entry 21 is added to get 117. Removing the last entry of the *vallī* which is no longer of use, we get the *vallī* as shown.

117	*labdhi*
48	*guṇa*

Thus for the main (or originally intended) pair of *bhājya* and *hāra* 173, 71 and with additive *kṣepa* 3, the *labdhi* and *guṇa* obtained are 117, 48. Therefore it is said “Repeat the operation till only two numbers are left . . . (verse[4])”

Except for the last *bhājya*, in all *bhājya*-s, while getting the *labdhi* for the first part, the *guṇa* will be penultimate (in the *vallī*) and hence it is said that the penultimate is multiplied by the number above. That is to be added to the last number which is the *labdhi* for the second part (of the *bhājya*). For the last *bhājya*, the last entry is the *guṇa* and there is no *labdhi* for the second part. Hence, the *Ācārya* has instructed the inclusion of zero below in the end (of the *vallī*) so that the procedure is the same all through. Thus are obtained the *labdhi* and *guṇa* 117, 48.

Now, it has been seen earlier itself that if we increase *guṇa* by *hāra*, then *labdhi* will get increased by *bhājya*; and by the same argument, if the *guṇa* is diminished by *hāra*, the *labdhi* will get diminished by *bhājya*. Hence when the *guṇa* is larger than *hāra*, then once, twice or, whatever be the number of times it may be possible, the *hāra* is to be subtracted from that *guṇa* so that a smaller *guṇa* is arrived at. The *labdhi* is (reduced by a multiple of *bhājya*) in the same way. Hence it is said "The upper one of these is divided [abraded] by the *dṛḍha-bhājya*, the remainder is the *labdhi*. The other (or lower) one being similarly treated with the (*dṛḍha*)*hāra* gives the *guṇa* (verse 4)". (*Ācārya*) also emphasises the above principle (in a) later (verse of *Bījagaṇita*): "The number of times that the *guṇa* and *labdhi* are reduced should be the same." If *guṇa* is reduced by *hāra* once, then the *labdhi* cannot be diminished by twice the *bhājya* and so on.

B.8 *Labdhi* and *Guṇa* for even and odd number of quotients[47]

If it were asked how we are to know whether the *labdhi* and *guṇa*, as derived above for the main *bhājya*, correspond to additive or subtractive *kṣepa*, for, (it may be said that) in the case of the last and penultimate *bhājya*-s, it is not clear whether the *guṇa* is for additive or subractive *kṣepa*-s, we state as follows. For the last pair of *bhājya* and *hāra*, the *guṇa* was derived straightaway taking the *kṣepa* to be subtractive. Thus by the *vyasta-vidhi* (inverse process), for the penultimate pair, the *guṇa* that we derived was for additive *kṣepa*. For the third pair, the *guṇa* that we derived

[47] *Bījapallavam* commentary on *Bījagaṇita*, cited above, p. 98-99.

was for subtractive *kṣepa*. It would be additive for the fourth and subtractive for the fifth pair. Now starting from the last pair, for each even pair, the *guṇa* derived would be for additive *kṣepa* and, for each odd pair, it would be for subtractive *kṣepa*. Now for the main (or originally given) pair of *bhājya* and *hāra*, this even or odd nature is characterised by the even or odd nature of the number of quotients in their mutual division. Hence, if the number of quotients is even, then the *labdhi*, *guṇa* derived are for additive *kṣepa*. If they are odd then the *labdhi* and *guṇa* derived for the main (or originally given) *bhājya* and *hāra* are for subtractive *kṣepa*. Since the (*Ācārya*) is going to state a separate rule for subtractive *kṣepa*, here we should present the process for additive *kṣepa* only. Hence it is said, "what are obtained are (the *labdhi* and *guṇa*) when the quotients are even in number ...... (verse 5)".

When the number of quotients is odd, the *labdhi* and *guṇa* that are obtained are those valid for subtractive *kṣepa*. But what are required are those for additive *kṣepa*. Hence it is said that "If the number of quotients be odd, then the *labdhi* and *guṇa* obtained this way should be subtracted from their abraders... (verse 5)." The rationale employed here is that the *guṇa* for subtractive *kṣepa*, if diminished from *hāra* will result in the *guṇa* for additive *kṣepa*.

This can also be understood as follows. Any *bhājya* which on being multiplied by a *guṇa* is divisible (without remainder) by its *hāra*, the same will hold when it is multiplied by the (two) parts of the *guṇa* and divided by the *hāra*. The *labdhi* will be the sum of the quotients. If there is a remainder when one of the partial products is divided by the *hāra*, the other partial product will be divisible by the *hāra* when it increased by the same remainder – or else the sum of the two partial products will not be divisible by the *hāra*.

Now, if the *bhājya* is multiplied by a *guṇa* equal to *hāra* and then divided by the *hāra*, it is clearly divisible and the *labdhi* is also the same as *bhājya*. Since the *guṇa* and *hāra* are the same in this case, the parts of the *guṇa* are the same as that of *hāra*. For example if *bhājya* is 17, *hāra* 15 and *guṇa* is also 15, then *bhājya* multiplied by *guṇa* is 225 and divided by *hāra* gives *labdhi* 17. If the two parts of *guṇa* are 1, 14, then the partial products are 17, 238. The first, if divided by *hāra*, leaves remainder 2. If we reduce this by the same *kṣepa* of 2, then it will be divisible, and *labdhi* will be 1. The other partial product, if increased by the same *kṣepa*, becomes 240 and will be divisible by the *hāra*. The *labdhi* will be 16. Or, if the parts of the *guṇa* are 2, 13, the partial products are 34, 221. The first when divided by *hāra* gives the remainder 4, and if reduced by that, it becomes 30 and will be divisible by the *hāra* and *labdhi* will be 2 and the partial *guṇa* 2. The other partial product 221, if increased by the same remainder, will be divisible by *hāra* and *labdhi* will be 15 and the partial *guṇa* 13. Or, if the parts of the *guṇa* are 3, 12, the partial products will be 51, 204. The first one when reduced by 6 and the second when increased by 6, will be divisible. Thus for *kṣepa* of 6, the *guṇa*-s when it is additive and subtractive are respectively the parts 12, 3. The *labdhi*-s are correspondingly 14, 3.

Hence, the *Ācārya* states (later in *Bījagaṇita*) "The *guṇa* and *labdhi* obtained for additive *kṣepa*, when diminished by their abraders, will result in those for negative *kṣepa*". Thus the procedure for arriving at *guṇa* and *labdhi* as outlined in the text starting with "Divide mutually ..." and ending with "... to give the actual *labdhi* and *guṇa*" (i.e., verses 3 to 5) has been demonstrated (*upapannam*).

ജ്യേഷ്ഠദേവകൃതമായ

ഗണിതയുക്തിഭാഷാ

അദ്ധ്യായം I - VII.

ഗണിതയുക്തിഭാഷാ

ഒന്നാം ഭാഗം

അദ്ധ്യായം ഒന്ന്

പരികർമ്മാഷ്ടകം

1. മംഗളാചരണം

[1]പ്രത്യൂഹവ്യൂഹവിഹതികാരകം പരമം മഹഃ !
അന്തഃകരണശുദ്ധിം മേ വിദധാതു സനാതനം ॥
ഗുരുപാദാംബുജം നത്വാ നമസ്കാര്യതമം മയാ ।
ലിഖ്യതേ ഗണിതം കൃത്സ്നം ഗ്രഹഗത്യുപയോഗി യത് ॥

2. സംഖ്യാസ്വരൂപം

അവിടെ നടേ[1] തന്ത്രസംഗ്രഹത്തെ അനുസരിച്ചുനിന്നു[2] ഗ്രഹഗതിയിങ്കൽ ഉപയോഗമുള്ള ഗണിതങ്ങളെ മുഴുവനേ[3] ചൊല്ലുവാൻ തുടങ്ങുന്നേടത്തു നടേ സാമാന്യഗണിതങ്ങളായിരിക്കുന്ന സങ്കലിതാദിപരികർമ്മങ്ങളെ ച്ചൊല്ലുന്നൂ. അവിടെ ഗണിതമാകുന്നതു ചില സംഖ്യേയങ്ങളിലെ സംഖ്യാവിഷയമായിട്ടിരിപ്പോരു പരാമർശവിശേഷം. സംഖ്യകൾ പിന്നെ ഒന്നു തുടങ്ങി പത്തോളമുള്ളവ പ്രകൃതികൾ എന്നപോലെ ഇരിക്കും. ഇവറ്റെ പ്രത്യേകം പത്തിൽ പെരുക്കി നൂറ്റോളമുള്ളവ ഇവറ്റിന്റെ വികൃതികൾ എന്ന പോലെ ഇരിക്കും. ഒന്നു തുടങ്ങിയുള്ളവറ്റിന്റെ സ്ഥാനത്തിങ്കന്ന് ഒരു സ്ഥാനം

---

1. 1. ആരംഭം: ഹരി ശ്രീ ഗണപതയെ നമ: അവിഘ്നമസ്തുഃ
   2. D.Missing പ്രത്യുഹ.....[to]......സംഖ്യയില്ലായ്കയാൽ (P.7,line 12)
2. 1. C.F.om. നടേ
   2. F.om. നിന്നു
   3. B മുഴുവനും, C. മുഴുവൻ

കരേറീട്ടിരിപ്പൂതും ചെയ്യും ഇവറ്റെ പത്തിൽ ഗുണിച്ചിരിക്കുന്നവറ്റിന്റെ സ്ഥാനം. പിന്നെ[4] ഇവ പ്രകൃതികൾ എന്ന[5]പോലെയിരുന്നിട്ട് ഇവറ്റിന്റെ സ്ഥാനത്തിങ്കന്ന് ഒരു സ്ഥാനം കരേറിയിരിക്കും ഇവറ്റെ പത്തിൽ പെരുക്കിയവ ആയിരത്തോളമുള്ള സംഖ്യകൾ. ഇങ്ങനെ അതാതിനെ പത്തിൽ പത്തിൽ ഗുണിച്ചവ പിന്നെ പിന്നത്തെ സംഖ്യകളാകുന്നവ. അവറ്റിന് ഓരോരോ സ്ഥാനം കൊണ്ട് ഉൽക്കർഷവുമുണ്ട്. ഇങ്ങനെയിരിക്കുന്നവ പതിനെട്ടു സ്ഥാനത്തിങ്കലേവറ്റിന്നുള്ള സംജ്ഞകൾ ഇവ-

ഏക-ദശ-ശത-സഹസ്രാ-യുത-ലക്ഷ-പ്രയുത-കോടയഃ ക്രമശഃ !
അർബുദ-മബ്ജം[6] ഖർവ്വ-നിഖർവ്വ-മഹാപത്മ-ശങ്കവസ് തസ്മാൽ !!
ജലധി-ശ്ചാന്ത്യം മദ്ധ്യം പരാർദ്ധമിതി ദശഗുണോത്തരാഃ സംജ്ഞാഃ !
സംഖ്യായാഃ സ്ഥാനാനാം വ്യവഹാരാർത്ഥം കൃതാഃ പൂർവ്വൈഃ !!

ലീലാവതി. 10

ഇതി

ഇങ്ങനെ സംഖ്യയ്ക്കു ഗുണനവും സ്ഥാനഭേദവും കല്പിയായ്കിൽ സംഖ്യേടെ പേർക്ക് അവസാനമില്ലായ്കയാൽ സംഖ്യകൾ തങ്ങളേയും അവറ്റിന്റെ ക്രമത്തേയും അറിഞ്ഞുകൂടാ. എന്നിട്ടു വ്യവഹാരത്തിന്നായിക്കൊണ്ട്[7] ഇവ്വണ്ണം കല്പിപ്പൂ. അവിടെ ഒന്നു തുടങ്ങി ഒമ്പതോളമുള്ള സംഖ്യകൾക്കു സ്ഥാനം നടേത്തേത്. പിന്നെ, ഇവറ്റെ എല്ലാറ്റേയും പത്തിൽ [8]ഗുണിച്ചവറ്റിന്റെ[9] സ്ഥാനം രണ്ടാമത്. അത്[10] ഇടത്തു[11]കല്പിക്കുന്നു. [12]ഏകസ്ഥാനം, ദശസ്ഥാനം എന്നിങ്ങനെ തുടങ്ങി ഇവറ്റിന്റെ പേർ. ഇങ്ങനെ സംഖ്യാസ്വരൂപം.[13]

---

2. 4. C. om. പിന്നെ
5. F. om. എന്ന
6. B. F. അർബുദവൃന്ദേഃ
7. B. om. കൊണ്ട്
8. B. F. ഗുണിച്ചിരിക്കുന്ന
9. B. C ഗുണിച്ചിരിക്കുന്നവറ്റിന്റെയും, F.വറ്റിന്
10. B. C. രണ്ടാമത്തെത്
11. B. അടുത്തടുത്ത്
12. F. adds ഇങ്ങിനെ
13. B. om. ഇങ്ങനെ സംഖ്യാരൂപം

3. ഗണിതഭേദങ്ങൾ

അനന്തരം ഇവറ്റെക്കൊണ്ടുള്ള[1] ഗണിതഭേദങ്ങളെ കാട്ടുന്നൂ. അവിടെ രണ്ടു പ്രകാരമുള്ളു[2] ഗണിതം, വൃദ്ധിസ്വരൂപമായിട്ടും,[3] ക്ഷയസ്വരൂപമായിട്ടും. അവിടെ[4] വൃദ്ധിക്കു സ്ഥാനമാകുന്നതു ഗണിതം, യോഗം, ഗുണം, വർഗ്ഗം, ഘനം എന്നിവ. പിന്നെ[5] ക്ഷയത്തിനു സ്ഥാനമാകുന്നതു വിയോഗം, ഹരണം, വർഗ്ഗമൂലം, ഘനമൂലം എന്നിവ. ഇവിടെ[6] യോഗത്തിന്നു ഗുണനത്തിങ്കലുപയോഗമുണ്ട്; ഗുണനത്തിന്നു വർഗ്ഗത്തിങ്കൽ, വർഗ്ഗത്തിന്നു ഘനത്തിങ്കൽ. ഇവ്വണ്ണമേ[7] വിയോഗത്തിന്നു ഹരണത്തിങ്കലുപയോഗമുണ്ട്, ഹരണത്തിന്നു വർഗ്ഗമൂലത്തിങ്കൽ, വർഗ്ഗമൂലത്തിന്നു ഘനമൂലത്തിങ്കൽ. ഇങ്ങനെ മുമ്പിലേവ [8]പിന്നത്തേവറ്റിലുപയോഗിക്കും.

4. സംകലിതവ്യവകലിതങ്ങൾ

അനന്തരം ഈ[1] ഉപയോഗപ്രകാരത്തെ കാട്ടുന്നൂ. അവിടെ[2] ഒരു[3] സംഖ്യയിൽ രൂപം ക്രമേണ കൂട്ടിയാൽ അതിങ്കന്നു തുടങ്ങി നിരന്തരേണ ഉള്ള മേലേ മേലേ സംഖ്യകളായിട്ടു വരുമവ. പിന്നെ ഒരേറിയ സംഖ്യയിങ്കന്നു ഓരോന്നിനെ ക്രമേണ കളയുക എന്നിരിക്കുമ്പോൾ[4] അതിങ്കന്നു തുടങ്ങി നിരന്തരേണ കീഴെ കീഴെ സംഖ്യകളായിട്ടു വരും. എന്നിങ്ങനെ എല്ലാസ്സംഖ്യകൾ തങ്ങളുടെ സ്വരൂപം ഇരിക്കുന്നൂ. അവിടെ[5] ഒരിഷ്ടസംഖ്യയിങ്കന്നു ക്രമേണ മേലേ മേലേ[6] സംഖ്യകളെ ഓർക്കുമ്പോൾ

---

3. 1. B. സംഖ്യകളെക്കൊണ്ട്
2. B. പ്രകാരമാണ്
3. C. F. വൃദ്ധിരൂപമായിട്ടും; ക്ഷയരൂപമായിട്ടും
4. B. C. om. അവിടെ
5. B. om. പിന്നെ
6. B. om. ഇവിടെ
7. B. F. അവ്വണ്ണമേ
8. C. പിന്നത്തെവറ്റിങ്കൽ; F. വറ്റിങ്കലുപയോഗിക്കും

4. 1. C. ആ ; F. om. ഈ
2. B. om. അവിടെ
3. B. ഓരോ
4. F. ഒരെയ സംഖ്യയാകുന്ന ഓരോന്നിനെ ക്രമേണ കളഞ്ഞ, കളഞ്ഞാതിരിക്കുമ്പോൾ
5. B. om. അവിടെ
6. B. om. മേലെ മേലെ

ക്രമേണ ഓരോ[7] സംഖ്യകളുടെ യോഗരൂപമായിട്ടിരിക്കും[8] അത്. പിന്നെ ഇഷ്ടത്തിങ്കന്നു തന്നെ ക്രമേണ കീഴെ കീഴെ സംഖ്യകളെ ഓർക്കുമ്പോൾ ക്രമേണ ഓരോരോ സംഖ്യേടെ വിയോഗ[9]രൂപമായിട്ടിരിക്കുമസ്സംഖ്യകൾ. എന്നാൽ സംഖ്യാസ്വരൂപത്തെ ക്രമേണ മേല്പോട്ടും കീഴ്പോട്ടും ഓർക്കുമ്പോൾ തന്നെ ഓരോരോ സംഖ്യേടെ യോഗവിയോഗങ്ങൾ സിദ്ധിക്കും. പിന്നെ ആയിഷ്ടസംഖ്യയിൽ ഒന്നിനെ എത്ര ആവൃത്തി കൂട്ടുവാൻ നിനച്ചു അത്ര ഒന്നിനെ വേറെ[10] ഒരേടത്തു കൂട്ടി അതിനെ [11]ഒരിക്കാലെ [12]ഇഷ്ടസംഖ്യയിൽ [13]കൂട്ടൂ, എന്നാലും വെവ്വേറെ കൂട്ടിയപോലെ[14] സംഖ്യതന്നെ വരും, എന്നിതും ഓർക്കുമ്പോൾ അറിയായിട്ടിരിക്കും. അവ്വണ്ണം എത്ര ആവൃത്തി ഒന്നിനെക്കളവാൻ നിനച്ചൂ, അവറ്റെ ഒക്ക ഒരിക്കാലെ[15] കളകിലും ഇഷ്ടത്തിങ്കന്ന്[16] അത്ര കീഴെ സംഖ്യ വരും എന്നും അറിയാം. ആകയാൽ മേല്പോട്ടും കീഴ്പോട്ടുമുള്ള എണ്ണം[17] അറിയപ്പോകുമെങ്കിൽ[18] യോഗവിയോഗങ്ങൾ സിദ്ധിക്കും. ഈ യോഗവിയോഗങ്ങളെ "സംകലിത -വ്യവകലിതങ്ങൾ" എന്നു ചൊല്ലുന്നു. ഒന്നിനെ 'രൂപം' എന്നും 'വ്യക്തി'യെന്നും ചൊല്ലുന്നു. ഇങ്ങനെ സംകലിത വ്യവകലിതങ്ങൾ[19].

---

4. 7. F. ഓരോരോ
8. C. F. യോഗമായിട്ടിരിക്കും
9. F. രൂപങ്ങളായിട്ടിരിക്കും
10. B. om. വേറെ
11. B.C. ഒരിക്കലെ
12. B. ഇഷ്ടത്തിൽ
13. F. പോലെ സംഖ്യതന്നെ വരും യന്നിത്യം ഒക്കും പൊളരിയായിട്ടിരിക്കും
14. B. om. പോലെ
15. F. ഒരിക്കലെ
16. B. ഇഷ്ടത്തിന്നത്ര
17. B. adds സംഖ്യകൾ എണ്ണങ്ങൾ
18. C. ഏറിപ്പോകുമെങ്കിൽ; F. അറിയപ്പോം
19. B. om. ഇങ്ങനെ ......to..... ലിതങ്ങൾ

5. സാമാന്യഗുണനം

5.i. ഗുണനപ്രകാരങ്ങൾ

അനന്തരം ഗുണനം[1]. അതാകുന്നതു[2] സംകലിതം തന്നെയത്രെ[3] ഓർക്കുമ്പോൾ. അവിടെ ഒന്നിനെ ഒന്നിനെക്കൊണ്ടു[4] ഗുണിക്കുമ്പോൾ യാതൊന്നിനെ ഗുണിക്കുന്നു അതിന് 'ഗുണ്യം' എന്നു പേർ. യാതൊന്നുകൊണ്ടു ഗുണിക്കുന്നൂ അതിന് 'ഗുണകാരം' എന്നു പേർ[5]. അവിടെ ഗുണ്യത്തിൽ കൂട്ടുന്നൂ, ഗുണ്യത്തെത്തന്നെ കൂട്ടുന്നൂതും[6] എന്നു വിശേഷമാകുന്നത്[7]. അവിടെ ഗുണകാരത്തിങ്കൽ[8] എത്ര സംഖ്യാവ്യക്തികളുള്ളൂ അത്ര ആവൃത്തി ഗുണ്യത്തെ കൂട്ടുന്നൂതും[9], എന്നീ[10] നിയമത്തോടുകൂടിയുള്ള[11] യോഗം[12] "ഗുണന"മാകുന്നത്[13]. ഇതിനെ[14] കാട്ടുന്നു.

5.ii. ഒന്നാമത്തെ ഗുണനപ്രകാരം

ഇവിടെ[15] ഗുണ്യത്തിന്റെ[16] ഒടുക്കത്തെ സ്ഥാനത്തെ ഗുണകാരം കൊണ്ടു നടെ ഗുണിക്കേണ്ടൂ. എന്നാൽ ഗുണിച്ച സംഖ്യകളും ഗുണിയാത്ത സംഖ്യകളും തമ്മിൽ കൂടുകയില്ല എന്നൊരെളുപ്പമുണ്ട്[17]. അവിടെ ഗുണ്യത്തിന്റെ ഒടുക്കത്തെ സ്ഥാനത്ത് ഒരു സംഖ്യ ഉണ്ട് എന്നിരിപ്പൂ. അതിനെ

---

5. 1. B. അഥ ഗുണനം
2. B. ഗുണനമാകുന്നത്
3. B. om. അത്രെ
4. B. ഒന്നിനെ മറ്റൊന്നുകൊണ്ട്
5. B. reads ഗുണ്യമെന്നും ഏതുകൊണ്ട് ഗുണിക്കുന്നു അതിന് ഗുണകാരമെന്നും ചൊല്ലും.
6. B. കൂട്ടുന്നു; F. കൂട്ടുന്നതും
7. B. om. എന്നു വിശേഷമാകുന്നത്; ഇതിനെ കാട്ടുന്നു
8. B. ഗുണകാരത്തിൽ
9. B. വ്യക്തികളുണ്ടോ അത്ര ആവൃത്തി കൂട്ടുന്നു
10. B. ഈ
11. B. കൂടിയ
12. B. യോഗത്തെയാണ്
13. B. ഗുണനമെന്നു പറയുന്നത്
14. B. അതിനെ
15. F. ഇവിടെ; അവിടെ; പിന്നെ അവിടെ
16. B. ഗുണ്യത്തിലെ
17. B. om. എന്നൊരെളുപ്പമുണ്ട്

നൂറുകൊണ്ടു ഗുണിക്കേണ്ടൂ എന്നും[18] കല്പിപ്പൂ[19]. അപ്പോൾ ആ[20] ഒന്നിനെ നൂറ്റിൽ ആവർത്തിക്കേണം. അവിടെ അതിനെ പത്തിൽ ആവർത്തിക്കുമ്പോൾ ദശസ്ഥാനത്ത് ഒന്നു കരേറും, മുമ്പിൽ ചൊല്ലിയ[21] ന്യായം കൊണ്ട്. പിന്നേയും ഒരിക്കൽ ആ[22] ഒന്നിനെ പത്തിൽ ആവർത്തിക്കുമ്പോൾ ദശസ്ഥാനത്ത് രണ്ടുണ്ടാകും. ഇങ്ങനെ നൂറുവട്ടം ആവർത്തിക്കുമ്പോൾ ശതസ്ഥാനത്ത് ഒന്നു ഉണ്ടാകും.

ആകയാൽ ഗുണകാരത്തിങ്കൽ[23] ശതസ്ഥാനത്ത് ഒരു സംഖ്യയുണ്ടായ്കിൽ[24] ഗുണ്യത്തിന്റെ അന്ത്യസ്ഥാനത്തെ അവിടുന്നു ശതസ്ഥാനത്തു വെയ്പ്പൂ. എന്നാൽ അതിനെ നൂറ്റിൽ[25] ഗുണിച്ചൂതായിട്ടുവരും[26]. അപ്പോൾ[27] ഗുണ്യത്തിങ്കൽ[28] കീഴു ചില സംഖ്യയുണ്ടെന്നു കല്പിക്കേണ്ടാ. അന്നേരത്ത് അവറ്റെക്കൊണ്ടുപയോഗമില്ല എന്നിട്ട്. അവ്വണ്ണമാകുമ്പോൾ ഗുണ്യത്തിന്റെ അന്ത്യസ്ഥാനത്തിനുനേരെ ആദ്യസ്ഥാനം വരുമാറു ഗുണകാരത്തെ വെയ്പ്പൂ[29]. പിന്നെ[30] ഗുണ്യത്തിന്റെ അന്ത്യസ്ഥാനത്തെ ഗുണകാരത്തിന്റെ അന്ത്യസ്ഥാനത്തിനുനേരെ വെയ്പ്പൂ,

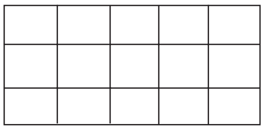
---

5. 18. B. ഗുണിക്കേണമെന്നു
19. F. കല്പിച്ചു
20. C. om. ആ
21. F. മുൻചൊല്ലിയ
22. B.c. om. ആ
23. B. കാരത്തിൽ; C. om. ശതസ്ഥാനത്ത്
24. B. യുണ്ടെങ്കിൽ; F. യുണ്ടായെങ്കിൽ
25. B. C. നൂറിൽ
26. B. C. ഗുണിപ്പുതാകും; F. ച്ചതാകും
27. F. ഇപ്പോൾ
28. B. ഗുണ്യത്തിൽ
29. B. വയ്ച്ച്
30. B. for പിന്നെ ഗുണ്യത്തിന്റെ; to ഊഹിച്ചുകൊള്ളു substitutes the following:
അന്ത്യം കൊണ്ടു പെരുക്കി ഗുണകാന്ത്യത്തിന്റെ നേരേ ഏകസ്ഥാനം വരുമാറു വയ്ക്കൂ. പിന്നെ ഗുണകത്തിന്റെ ഉപാന്ത്യം കൊണ്ടും ഗുണ്യാന്ത്യത്തെത്തന്നെ പെരുക്കി ഗുണകോപാന്ത്യത്തിനു നേരേ അതിന്റെ ഏകസ്ഥാനം വരുമാറു വയ്ക്കൂ. ഇങ്ങിനെ ഗുണകത്തിലുള്ള എല്ലാ സ്ഥാനങ്ങൾ കൊണ്ടും ഗുണ്യാന്ത്യത്തെ വെവ്വേറെ പെരുക്കി സ്ഥാനക്രമത്തിൽ വച്ചാൽ ഗുണകത്തെ ഗുണ്യത്തിന്റെ ഉപാന്ത്യത്തിന്നു നേരേ ഏകസ്ഥാനം വരുമാറു വച്ച്. മേൽപ്രകാരം തന്നെ ഗുണകത്തിലെ എല്ലാ സ്ഥാനങ്ങൾ കൊണ്ടും ഗുണ്യോപാന്ത്യത്തെ പെരുക്കി അതാതു സ്ഥാനത്ത് വച്ച് ഗുണകത്തെ ഒരു സ്ഥാനം കൂട്ടി കീഴ്പ്പോട്ടെറക്കി വയ്ക്കുക. ഇങ്ങിനെ ഗുണകത്തിലെ എല്ലാ സ്ഥാനംകൊണ്ടും ഗുണ്യത്തിലെ ഓരോ സ്ഥാനങ്ങളേയും ഇപ്രകാരം പ്രത്യേകം പെരുക്കൂ. ഗുണ്യത്തിൽ വല്ല സ്ഥാനവും ശൂന്യമാണെങ്കിൽ ആ സ്ഥാനത്തിനുനേരേ ഗുണകത്തെ വച്ച് പെരുക്കേണ്ട. അടുത്ത സംഖ്യയുള്ള സ്ഥാനത്തോളം ഒന്നിച്ചു പെരുക്കിയാൽ മതി. പിന്നെ ഗുണ്യത്തേയോ ഗുണകത്തേയോ, ഗുണ്യഗുണകങ്ങളേ രണ്ടിനേയുമോ ഖണ്ഡിച്ചും പെരുക്കാം. ഇഷ്ടം പോലെ ഖണ്ഡിക്കുകയും ചെയ്യാം. $9 \times 8 = (4+5) \times 8 = (5+4) \times (3+5) = (7+2) \times (2+5) = (8+1) \times 8 = 72$

ഗുണകാരാന്ത്യസ്ഥാനത്തിങ്കൽ ഒന്നു സംഖ്യ എന്നുകിൽ[31]. അവിടെ സംഖ്യ രണ്ടെങ്കിൽ ഗുണ്യാന്ത്യസ്ഥാനത്തെ രണ്ടിൽ ആവർത്തിച്ചിട്ടു വെയ്പ്പൂ. അപ്പോൾ ഗുണകാരത്തിന്റെ അന്ത്യസ്ഥാനത്തെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ചൂതായി. പിന്നെ [32]അന്ത്യസ്ഥാനത്ത് അടുത്തു കീഴേതിന്ന് 'ഉപാന്ത്യ'മെന്നു പേർ. ഇങ്ങനെ ഉപാന്ത്യസ്ഥാനത്തിങ്കൽ എത്ര ഗുണകാരത്തിന്നു സംഖ്യ ഉള്ളൂ, ആ സ്ഥാനത്ത് അത്രയിലാവർത്തിച്ചിട്ടു വെയ്പ്പൂ ഗുണ്യാന്ത്യസ്ഥാനത്തെ. എന്നാലതിനെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ചൂതായി. ഇങ്ങനെ ഗുണകാരത്തിന്റെ ആദ്യസ്ഥാനത്തോളമുള്ളവറ്റേക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ച് അതതിന്റെ സ്ഥാനത്തു നേരെ വയ്പ്പൂ ഗുണ്യാന്ത്യസ്ഥാനസംഖ്യയെ. എന്നാൽ ഗുണ്യത്തിന്റെ അന്ത്യസ്ഥാനത്തെ ഗുണകാരസ്ഥാനങ്ങൾ എല്ലാംകൊണ്ടും ഗുണിച്ചൂതായിട്ടു വരും. അവിടെ ഗുണകാരത്തിന്റെ യാതൊരു സ്ഥാനത്തു സംഖ്യയില്ലായ്കയാൽ അവിടം ശൂന്യസ്ഥാനമാകുന്നു[33]. അതിനുനേരെ

ഇനിയും ഏതു പ്രകാരത്തിലെങ്കിലും ഖണ്ഡിക്കാം.

ഗുണിതത്തെ ക്ഷേത്രഫലമായിട്ടു കാണിക്കാം. ഗുണ്യം = 5. ഗുണകം = 3 എങ്കിൽ ഈ ഗുണ്യഗുണകങ്ങളുടെ ഗുണിതത്തെ അറ്റത്തു കാണിച്ചിട്ടുള്ളതുപോലെ ഒരു ആയത ചതുരശ്രക്ഷേത്രമായി കാണിക്കാം.



ഇവിടത്തെ ഓരോ വരികളിലും ഗുണ്യത്തോളം കള്ളികളുണ്ട്. ഗുണകത്തോളം വരികളുമുണ്ട്. ഗുണ്യത്തോളം ആവർത്തി ഗുണകത്തേയോ ഗുണകത്തോളം ആവർത്തി ഗുണ്യത്തേയോ സംകലനം ചെയ്താൽ ഇങ്ങിനെ ഇരിയ്ക്കുമെന്ന് ഈ ക്ഷേത്രത്തിൽ നോക്കിയാൽ സ്പഷ്ടമാകും. പിന്നെ ഗുണഗുണ്യങ്ങളിൽ ഒരിഷ്ടസംഖ്യയെ കൂട്ടിയോ കുറച്ചോ ഗുണിക്കുമ്പോൾ അതാതിങ്കൽ കൂട്ടിയേടത്തോളം സംഖ്യയെ ഋണമായിട്ടും കുറച്ചിടത്തോളം സംഖ്യയെ ധനമായിട്ടും ചേർത്ത് ഗുണിക്കണം. അതിനെ അവിടെ ധനങ്ങൾ തമ്മിൽ ഗുണിച്ചതും ഋണങ്ങൾ തമ്മിൽ ഗുണിച്ചതും, ധനം തന്നെ. ഋണധനങ്ങൾ തമ്മിൽ ഗുണിച്ചത് ഋണമായിരിക്കും. പതിനേഴ് ഗുണ്യം പതിനാല് ഗുണകം എന്ന് കല്പിക്കൂ. ഇവിടെ ഗുണ്യത്തിന്റെ ഇഷ്ടം മൂന്ന്, ഗുണകത്തിൽ ഹാരം കൂട്ടിയാൽ ഗുണ്യഗുണകങ്ങൾ രണ്ടും 20x20. ഇവ തമ്മിൽ ഗുണിയ്ക്കുമ്പോൾ ഗുണ്യത്തിൽ മൂന്നും ഗുണകത്തിൽ ആറും ഋണമായി ചേർക്കണം. എന്നിട്ട് ഗുണിച്ചാൽ പതിനേഴിനെ പതിനാലുകൊണ്ട് ഗുണിച്ച ഫലം വരും. ഇങ്ങിനെ സർവ്വം ഗ്രഹിച്ചുകൊള്ളണം.

20 − 3 X 20 −6	=	238
20 X 20	=	400
20 X −3	=	−60
−6 X 20	=	−120
−6 X −3	=	18
418 − 180	=	238

31. F.എങ്കിൽ ;
32. F.അന്ത്യസ്ഥാനത്തിന്നടുത്ത്
33. D.Damaged upto this portion

ഗുണ്യത്തെ വെയ്ക്കേണ്ടാ. മറ്റേ സ്ഥാനങ്ങളിലെ സംഖ്യകൾ കരേറി ഉണ്ടാകുമത്രേ അവിടെ സംഖ്യ. പിന്നെ ഗുണ്യത്തിന്റെ ഉപാന്ത്യസ്ഥാനത്തിനു നേരെ ഏകസ്ഥാനം വരുമാറു വെയ്പ്പൂ ഗുണകാരത്തെ. അതിനേയും ഇവ്വണ്ണം ഗുണിപ്പൂ. ഇവ്വണ്ണം ഗുണ്യാന്ത്യസ്ഥാനത്തോളവും. അപ്പോൾ ഗുണ്യത്തെ മുഴുവനും ഗുണിച്ചൂതായി.

5.iii. രണ്ടാമത്തെ ഗുണനപ്രകാരം

പിന്നെ[34] ഇവ്വണ്ണമാകിലുമാം ഗുണനപ്രകാരം. ഗുണ്യത്തിന്റെ ഓരോ സ്ഥാനങ്ങളിലെ സംഖ്യയെ വേറെ എടുത്തുകൊണ്ടു ഗുണകാരത്തെ[35] ഇവ്വണ്ണം ഗുണിച്ച്[36] അതാതു സ്ഥാനമാദിയായിട്ടു കൂട്ടി ഒരുമിച്ചുകൊള്ളൂ എന്നാകിലുമാം. അവിടെ അന്ത്യസ്ഥാനം തുടങ്ങൂ എന്നുള്ള നിയമം വേണ്ടാ, സംഖ്യകൾ[37] കലരുകയില്ല അപ്പോൾ, എന്നിട്ട്.[38] ഗുണ്യത്തെ എന്നവണ്ണം ഗുണകാരത്തെ ഖണ്ഡിച്ചു ഗുണിക്കിലുമാം. അവിടെ ഗുണകാരത്തിനു മൂന്നുസ്ഥാനം എന്നിരിപ്പൂ. ഇരുന്നൂറ്റിമുപ്പത്തിനാല് എന്നിരിപ്പൂ സംഖ്യ. അതിനെ ഖണ്ഡിപ്പൂ മൂന്നായിട്ട്. അവിടെ[39] ഒന്ന് ഇരുന്നൂറ്, ഒന്ന് മുപ്പത്, ഒന്നു നാല് ഇങ്ങനെ മൂന്നു ഗുണകാരം എന്നു കല്പിപ്പൂ[40]. പിന്നെ ഗുണ്യത്തെ മുഴുവനേ മൂന്നേടത്തുവെച്ച് ഇവ ഓരോന്നിനെക്കൊണ്ട് ഗുണിപ്പൂ.[41] പിന്നെ സ്ഥാനം പകരാതെ തങ്ങളിൽ കൂട്ടൂ. ഇതും മുമ്പിലെപ്പോലെ ഗുണിച്ചതായി വരും[42]. അവിടെ ഇരുന്നൂറ്റിൽ ആവർത്തിച്ചത് ഒന്ന്, മുപ്പതിലാവർത്തിച്ചത് വേറെ ഒന്ന്, നാലിലാവർത്തിച്ചത് വേറെ ഒന്ന്. പിന്നെ ഇവ ഒക്ക കൂട്ടുമ്പോൾ ഇരുനൂറ്റിമുപ്പത്തിനാലിൽ ഗുണിച്ചതായിട്ടുവരും.

5.iv. മൂന്നാമത്തെ ഗുണനപ്രകാരം.

അനന്തരം സ്ഥാനനിയമം കൂടാതെ മറ്റൊരുപ്രകാരം സംഖ്യകളെക്കൊണ്ടു പെരുക്കിലുമാം. അവിടെ ഒന്നു നൂറ്റൊരുപത്, ഒന്നു നൂറ്റിരുപത്തിനാല്.

---

5. 34. D.F. om. പിന്നെ
35. C. F. adds കൊണ്ട്
36. D. ഇവിടെ നിന്നും ഓലയുടെ മുഴുവൻ ഭാഗവും നശിച്ചു പോയിരിക്കുന്നു. വലതുവശം മൂന്നിലൊന്ന് ദ്രവിച്ച രൂപത്തിൽ മാത്രം ഉപലഭ്യമാണ്.
37. F. ഖ്യകളിട
38. F. adds. ഈ
39. C. om. അവിടെ
40. F. കല്പിച്ച്
41. F. ഗുണിച്ച്
42. C. തായിട്ടുവരും; F. തായിട്ടും ആകും

ഇങ്ങനെ താൻ ഖണ്ഡിപ്പൂ[43]. ഇവ്വണ്ണം[44] ഗുണ്യത്തെ ആകിലുമാം. ഇങ്ങനെ രൂപവിഭാഗവും സ്ഥാനവിഭാഗവും എന്നു രണ്ടു പ്രകാരം ഖണ്ഡിക്കാം. ഇങ്ങനെ ഗുണനപ്രകാരം കൊണ്ടു തന്നെ ഖണ്ഡഗുണന പ്രകാരവുമുണ്ടാകും.

5.v. ഘാതത്തെ ക്ഷേത്രമായി കല്പിക്കൽ

പിന്നെ ഇങ്ങനെ ഗുണിച്ചിരിക്കുന്ന സംഖ്യയെ ക്ഷേത്രമായിട്ടും കല്പിക്കാം[45]. എന്നാലുണ്ടു ചില എളുപ്പം. അവിടെ "ക്ഷേത്ര"മെന്നതു സമതലമായി ചതുരശ്രമായിരിപ്പോരു പ്രദേശം. അതു[46] നീണ്ടിട്ടിരിക്കിലുമാം സമചതുരശ്രമായിട്ടാകിലുമാം[47]. അവിടെ ഗുണ്യം വലുത് ഗുണകാരം ചെറുത് എന്നിരിക്കുമ്പോൾ കോൽ, വിരൽ എന്നിവറ്റിൽ ഏതാനും ഒരു മാനം കൊണ്ടു ഗുണ്യസംഖ്യയോളം നീളമായി ഗുണകാരസംഖ്യയോളം ഇടമായി ഇരുന്നൊന്ന് ഈ ക്ഷേത്രമാകുന്നത് എന്നു കല്പിക്കേ വേണ്ടുവത്. പിന്നെ ഇതിങ്കൽ കോൽമാനമാകുന്നത് എങ്കിൽ ഒരിക്കോലൊരിക്കോൽ അകലത്തിൽ നീളവും വിലങ്ങും[48] ചില രേഖകളെ ഉണ്ടാക്കൂ. അപ്പോൾ ഒരിക്കോൽ പോന്നോ ചിലവ സമചതുരശ്രങ്ങളെക്കൊണ്ടു നിറയപ്പെട്ടിരിക്കും ഈ ക്ഷേത്രം. ഈ ഖണ്ഡങ്ങൾ പംക്തികളായിട്ട്[49] ഇരിപ്പൂതും ചെയ്യും. അവിടെ നീളത്തിലുള്ള ഓരോ വരിയിൽ ഗുണ്യത്തിന്റെ സംഖ്യയോളം ഖണ്ഡങ്ങളുള്ളവ, ഗുണകാരസംഖ്യയോളം വരിയുമുള്ളവ[50]. പിന്നെ വിലങ്ങത്തിൽ വരിയാകുന്നു എന്നു കല്പിക്കുന്നതാകിൽ വരിയിലോരോന്നിൽ ഗുണകാരത്തോളം ഖണ്ഡങ്ങൾ ഗുണ്യസംഖ്യയോളം വരികൾ എന്നാകിലുമാം. ഈ ഖണ്ഡങ്ങൾക്ക് 'ക്ഷേത്രഫലം[51]' എന്നു പേർ. ഈവണ്ണം കല്പിക്കുമ്പോൾ ക്ഷേത്രത്തിന്റെ നീളവും ഇടവും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചാൽ ചതുരശ്രക്ഷേത്രഫലങ്ങളുണ്ടാം എന്നുവരും. പിന്നെ ഗുണ്യത്തെക്കൊണ്ട് ആവർത്തിച്ചിരിക്കും ഗുണകാരമെന്നും ഗുണകാരത്തെക്കൊണ്ട് ആവർത്തിച്ചിരിക്കും ഗുണ്യമെന്നും വ്യക്തമാകും.

5. 43. F. ഖണ്ഡിച്ചു
44. F. അതിൻവണ്ണം
45. D. കല്പിക്കുകിലുമാം
46. F. ഇത്; D. നീണ്ടിരിക്കിലുമാം
47. C. സമചതുരശ്രമാകിലുമാം; F. സമചതുരമായിരിക്കിലുമാം
48. F. നീളമായും വിലങ്ങനെയും
49. D. പത്തികളായിട്ട്; F. വരികളായിട്ട്
50. F. വരിയുള്ളവ
51. D. ക്ഷേത്രഫലങ്ങൾ

ഗുണിതഫലത്തിങ്കൽ ഇതു സമകർണ്ണമായിരിപ്പൊന്നു ക്ഷേത്രം. ഇവിടെ പിന്നെ ചതുരശ്രക്ഷേത്രത്തിന്റെ ഒരു കോണിൽനിന്നു[52] തുടങ്ങി ക്ഷേത്രമദ്ധ്യേ കൂടി മറ്റെ കോണിൽ സ്പർശിക്കുന്ന സൂത്രം കർണ്ണമാകുന്നത്. ഇതിന്നു 'ഘാതക്ഷേത്ര'മെന്നുപേർ[53]. പിന്നെ വർഗ്ഗത്തേയും ക്ഷേത്രരൂപേണ കല്പിക്കാം. അവിടെ വർഗ്ഗക്ഷേത്രമെങ്കിൽ[54] സമചതുരശ്രമായിട്ടേ ഇരിക്കുമത്രേ എന്നു നിയതം. ഇങ്ങനെ സാമാന്യഗുണനം.

6. ഗുണനത്തിങ്കലെ വിശേഷതകൾ

6.i. ഒന്നാമത്തെ വിശേഷത

അനന്തരം ഗുണ്യത്തിങ്കത്താൻ ഗുണകാരത്തിങ്കത്താൻ ഒരിഷ്ടസംഖ്യ[1] കൂട്ടിത്താൻ കളഞ്ഞു താൻ ഇരിക്കുന്നവറ്റെ തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചുവെങ്കിൽ കേവലങ്ങളാകുന്ന ഗുണഗുണ്യങ്ങളുടെ ഘാതത്തിങ്കന്ന് എത്ര ഏറിത്താൻ കുറഞ്ഞുതാൻ ഇരിക്കുന്നൂ ഈ ഘാതം എന്നതിനെ അറിയും പ്രകാരം. ഇവിടെ[2] ഗുണഗുണ്യങ്ങളിൽവച്ച് ചെറിയതിങ്കന്ന് ഒരിഷ്ടസംഖ്യയെ കളഞ്ഞിട്ടു ശേഷത്തെക്കൊണ്ടു വലിയതിനെ ഗുണിപ്പൂതാകിൽ[3] ആ ക്ഷേത്രം അത്ര ഇടം കുറഞ്ഞിരിക്കും. ആകയാൽ ആ ഇഷ്ടത്തെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ച് വലിയതിനെ കൂട്ടണം. എന്നാൽ തികയും വരി, ഇഷ്ടസംഖ്യയെ കൂട്ടീട്ട് എങ്കിൽ അത്ര വരി ഏറി എന്നിട്ട്[4]. ഈവണ്ണം വലിയതിങ്കന്ന് ഒരിഷ്ടസംഖ്യയേ കളകതാൻ കൂട്ടുകതാൻ ചെയ്തിട്ട് ഗുണിപ്പൂതാകിൽ ഇഷ്ടത്തെക്കൊണ്ടു ചെറിയതിനെ ഗുണിച്ചിട്ടു കൂട്ടുകതാൻ കളകതാൻ ചെയ്യേണം എന്നത്[5] വിശേഷമല്ല.

---

5. 52. C. om. നിന്നു
53. C. D. F. add ഘാതമെന്നും സംവർഗ്ഗമെന്നും ഗുണനത്തിനു പേർ
54. F. ക്ഷേത്രമാകിൽ

6 1. C. സംഖ്യയെ
2. D. F. അവിടെ
3. F. ഗുണിച്ചൂതാകിൽ
4. C. D. add ഇഷ്ടം കൊണ്ടു ഗുണിച്ചു വലിയതിനെ കളയണം ഈവണ്ണം
5. F. എന്നിതു

6.ii. രണ്ടാമത്തെ വിശേഷത

അനന്തരം ഗുണഗുണ്യങ്ങളിൽ ചെറിയതിൽ വലിയൊരിഷ്ടം കൂട്ടൂ, വലിയതിങ്കന്നു ചെറിയൊരിഷ്ടം കളയൂ. പിന്നെ ഇവ തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചൂവെങ്കിൽ അവിടെയെത്ര കൂട്ടി അത്ര വരി ഏറിപ്പോയി. എത്രയുണ്ടു മറ്റേതിങ്കന്നു കളഞ്ഞത്, അത്രച്ച വരിയിലെ ഖണ്ഡസംഖ്യയും കുറഞ്ഞു പോയി. ഇങ്ങനെ ഇരിപ്പൊന്ന് അക്ഷേത്രം[6]. അവിടെ വലിയ ഗുണ്യത്തിങ്കന്നു കുറഞ്ഞൊരു സംഖ്യ കളഞ്ഞത്, ചെറിയ ഗുണകാരത്തിങ്കൽ ഏറിയ സംഖ്യ[7] കൂട്ടിയത് എന്നു കൽപിക്കുമ്പോൾ ഇഷ്ടം പോയ ഗുണ്യത്തോളം നീളമുള്ള വരികൾ ഏറിയത്. അവിടെ[8] പിന്നേയും ഗുണകാരത്തിങ്കലെ ഇഷ്ടത്തോളം വരികൾ ഏറി. എന്നിട്ടു ഗുണകാരത്തിങ്കൽ കൂട്ടിയ ഇഷ്ടത്തെക്കൊണ്ടു ഇഷ്ടം പോയ ഗുണ്യത്തെ ഗുണിച്ചിട്ടുള്ളത് ഈ ക്ഷേത്രത്തിങ്കന്നു കളയേണം. പിന്നെ ഗുണ്യത്തിങ്കലെ ഇഷ്ടത്തോളം വിലങ്ങുള്ള വരികൾ കൂട്ടേണ്ടുവത്. ആകയാൽ കേവലഗുണകാരത്തെ ഗുണ്യത്തിങ്കലെ ഇഷ്ടത്തെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ചു[9] കൂട്ടേണ്ടൂ എന്നിങ്ങനെ സ്ഥിതമിത്. ഈവണ്ണം ഗുണഗുണ്യങ്ങളിൽ രണ്ടിങ്കലും ഇഷ്ടത്തെ കൂട്ടുകതാൻ കളകതാൻ ചെയ്യുന്നേടത്തും ഊഹിച്ചുകൊള്ളു.

6.iii. മൂന്നാമത്തെ വിശേഷത

അനന്തരം ഗുണകാരത്തെ ഏതാനും ഒരിഷ്ടത്തെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലത്തെ തന്നിൽ തന്നെ കൂട്ടി പിന്നെ അതിനെക്കൊണ്ടു ഗുണ്യത്തെ ഗുണിപ്പൂ[10], എങ്കിൽ അതിങ്കന്ന്[11] എത്ര കളയേണ്ടൂ എന്ന്. അവിടെ ഗുണകാരസംഖ്യ[12] പന്ത്രണ്ട് എന്നും കൽപിപ്പൂ[13]. പന്ത്രണ്ടിൽ തന്നെ ഹരിച്ച ഫലം ഒന്നും കൂട്ടിയത്[14] എന്നു കൽപിപ്പൂ[15]. പിന്നെ ഇതിനെക്കൊണ്ടു

---

6. 6. C. ആ ക്ഷേത്രം
7. C. സംഖ്യയും
8. F. അവിടെയും
9. D. ഗുണിച്ചിട്ട്
10. B. C. ഗുണിച്ചൂ
11 B. അതിൽ നിന്ന്
12. B. ഗുണകാരം
13. B. കല്പിച്ച്; B. പന്ത്രണ്ട് കൊണ്ട്
14. B. കൂട്ടിയാൽ പതിമൂന്ന്
15. B. F. Adds എന്ന് കല്പിപ്പൂ

ഗുണിപ്പൂ[16] ഗുണ്യത്തെ. എന്നാൽ[17] ഗുണ്യത്തോളം നീളമുള്ള[18] പതിമ്മൂന്നു വരികൾ ഉണ്ടാകും. അവിടുന്ന് ഒരു വരി പോവാനായിക്കൊണ്ട്[19] പതിമൂന്നിൽ ഹരിച്ച ഫലം[20] കളയേണ്ടുവതു[21] പന്ത്രണ്ടിൽ ഹരിച്ച ഫലമല്ല[22]. കേവലത്തിന്റെ[23] പന്ത്രണ്ടാലൊന്നു യാതൊന്ന് ഈ അംശത്തോടു[24] കൂട്ടിയതിങ്കന്ന് പതിമൂന്നാലൊന്നായിരിക്കും[25] ഈ[26] ഫലം. എന്നീവണ്ണം[27] വ്യക്തമാകയാൽ യാതൊരു ഹാരകം കൊണ്ടു നടേ[28] ഹരിച്ചൂ അതിൽ ഒരു സംഖ്യ കൂട്ടിയതു പിന്നയ്ക്കു ഹാരകമാകുന്നത്[29]. പതിമ്മൂന്നു വരിയുള്ള[30] അംശകക്ഷേത്രത്തിങ്കന്ന്[31] ഒരു വരി കളയേണ്ടുമ്പോൾ അതു പതിമ്മൂന്നാലൊന്നായിരിക്കും[32], നടേ പന്ത്രണ്ടാലൊന്നു കൂട്ടീട്ടു പതിമ്മൂന്നായി. പിന്നെ പതിമ്മൂന്നാലൊന്നു കളഞ്ഞാൽ[33] പന്ത്രണ്ടു വരുന്നൂ എന്നിട്ട്.

പിന്നെ ഇവ്വണ്ണം പന്ത്രണ്ടാലൊന്നു കളകചെയ്തതു പന്ത്രണ്ടിങ്കന്ന് എങ്കിൽ പിന്നെ ശേഷത്തിങ്കന്നുള്ള പതിനൊന്നാലൊന്നു കൂട്ടിയാൽ പന്ത്രണ്ടാകുന്നു. ആകയാൽ, യാതൊരു ഹാരകം കൊണ്ടു ഹരിച്ചു[34] ഗുണകാരത്തിങ്കന്നു കളഞ്ഞുവോ[35], ഗുണിച്ച ഫലത്തിങ്കന്ന്[36] അതിലൊന്നു കുറഞ്ഞ ഹാരകം കൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലം[37] കൂട്ടേണം. എന്നാൽ

---

6. 16. F. adds ഈ
17. B. ഗുണ്യത്തെ ഗുണിച്ചാൽ
18. B.C.F. നീളത്തിൽ
19. B. om. ക്കൊണ്ട്
20. B. ഫലമാണ്
21. B. കളയേണ്ടത്; F. കളയേണ്ടൂ
22. F. ഫലമല്ലാതെ, ഫലത്തിന്റെ
23. F. om. കേവലത്തിന്റെ
24. F. അംഗത്തോടു
25. C. F. ഒന്നായിട്ടിരിക്കും
26. F. om. ഈ
27. F. എന്നിവിടെ
28. C.D.om. നടേ
29. B. മാകുന്നു
30. F. വരിയുള്ളൊരു
31. B. D. F. om. അംശക
32. B. C. ന്നായിട്ടിരിക്കും
33. B. ഞ്ഞാലും
34. B. adds പിന്നെ
35. B. കളയേണം; F. C. കളഞ്ഞ്
36. B. ഫലം അതിങ്കേന്ന്
37. B. F. ഫലത്തെ

വാസ്തവമായിരിക്കുന്ന ഫലം[38] വരും. ഇങ്ങനെ[39] ഗുണിച്ച ഫലത്തിങ്കന്നു ചൊല്ലിയ ഹാരകം കൊണ്ടുഹരിച്ച ഫലത്തെ കൂട്ടുകതാൻ കളകതാൻ ചെയ്യാം, ഔചിത്യത്തിനു തക്കവണ്ണം. ഗുണിക്കുന്നതിനു മുമ്പിലെ ഗുണഗുണ്യങ്ങളിൽ ഒന്നിങ്കന്ന് ഈയംശത്തെ ഉണ്ടാക്കി തന്നിൽതന്നെ കളയുകതാൻ കൂട്ടുകതാൻ ചെയ്കിലുമാം. എന്നാലും ഫലമൊക്കും. അവിടയ്ക്കു ഹാരകം മുമ്പിൽ[40] ചൊല്ലിയതു തന്നെ. ഒന്നു കളകതാൻ കൂട്ടുകതാൻ ചെയ്തതു മുമ്പിലെ ഹാരകത്തിൽ, അതു പിന്നെയ്ക്കു ഹാരകമാകുന്നത് എന്നു ചൊല്ലപ്പെട്ടത്. അവിടെ യാതൊരുപ്രകാരം ഗുണകാരത്തിങ്കൽ[41] കൂട്ടിയ അംശത്തെ അതിങ്കന്നുതന്നെ കളഞ്ഞാൽ വാസ്തവമായിരിക്കുന്ന ഫലം വരുന്നു, അവ്വണ്ണം ഗുണ്യത്തിന്റെ ആയംശത്തെ അതിങ്കന്നു[42] കളഞ്ഞാലും ഫലം തുല്യം. ഗുണകാരത്തിങ്കന്നു തന്നെ കളയുമ്പോൾ വാസ്തവമായിരിക്കുന്ന വരികൾ ഉണ്ടാവും[43] എന്നു വരുന്നത്[44] ഗുണ്യത്തിങ്കന്നു കളയുന്നതാകിൽ വരിയിലെ[45] ഖണ്ഡസംഖ്യ കുറക ചെയ്യുന്നത് എന്നേ വിശേഷമുള്ളൂ. വാസ്തവക്ഷേത്രത്തേക്കാൾ ഇടമേറി നീളംകുറഞ്ഞു എന്നു വരുന്നതേ ഉള്ളൂ[46]. ക്ഷേത്രഫലം തുല്യം.

6.iv. നാലാമത്തെ വിശേഷത

അനന്തരം ഗുണഗുണ്യങ്ങളിൽ വെച്ചു ഗുണകാരം പന്ത്രണ്ട് എന്നു കല്പിച്ചേടത്ത് അതിനെ പന്ത്രണ്ടിൽ ഹരിക്കുന്നു[47] എന്നിരിക്കുന്നു. ഫലത്തെ പിന്നെ ഏതാനുമൊന്നു കൊണ്ടു ഗുണിച്ചു, പന്ത്രണ്ടിൽകൂട്ടി എന്നിരിക്കുന്നതാകിൽ[48] അവിടെ വിശേഷം. ഇവിടെ പന്ത്രണ്ടിൽ ഹരിച്ച ഫലത്തെ അഞ്ചിൽ ഗുണിച്ചിട്ടു ഗുണകാരമാകുന്ന പന്ത്രണ്ടിൽ കൂട്ടി എന്നു കല്പിക്കുന്നു. അവിടെ[49] അഗ്ഗുണകാരം കൊണ്ടു ഗുണിച്ചിരിക്കുന്ന[50]

38. B. F. വാസ്തവഫലം
39. B. F. ഇങ്ങിനെ
6. 40. B. അവിടെ മുൻപേ; F. മുൻപ്
41. B.C.D.F. ഗുണകാരത്തിൽ
42. C. D. F.add തന്നെ
43. F. ഉണ്ടാവു
44. B. വരുന്നു, ആ
45. F. വരികളിലെ
46. B. എന്നേയുള്ളു; D. എന്നാലാവുന്നതേയുള്ളു; F. എന്ന് വന്നതേയുള്ളു
47. B. ഹരിക്കു
48. B. എന്നിരിക്കിൽ
49. B. F ആ
50. B. adds. രിക്കുന്ന പന്ത്രണ്ടിൽ കൂട്ടി എന്നു കല്പിക്കുന്നു. അവിടെ ആ ഗുണകാരം കൊണ്ട് ഗുണിച്ചിരിക്കുന്ന ഫലം ക്ഷേത്രത്തിങ്കൽ

ഫലക്ഷേത്രത്തിങ്കൽ പതിനേഴുവരിയുണ്ടാവും[51]. അവിടെ ഒരു വരിയിലെ ഖണ്ഡസംഖ്യ ഉണ്ടാവാൻ ക്ഷേത്രഫലത്തെ പതിനേഴിൽ ഹരിക്കേണ്ടൂ. പിന്നെ ആ സംഖ്യയെ അഞ്ചിൽ ഗുണിച്ചിട്ട് ഉണ്ടായതിനെ മുമ്പിൽ ഉണ്ടായ ക്ഷേത്രഫലത്തിങ്കന്നു[52] കളകവേണം, വാസ്തവമായിരിക്കുന്ന ക്ഷേത്രഫലമുണ്ടാവാൻ. അവിടെ നടേത്തെ ഹാരകത്തിന്റെ ഫലത്തെ എത്രകൊണ്ടു ഗുണിച്ച് അഗ്ഗുണകാരത്തെ കൂട്ടിയ ഹാരകം പിന്നെയ്ക്കു ഹാരകമാകുന്നത് എന്നു വരും. ഈവണ്ണം ഫലത്തെ കളയുന്നതാകിൽ അവിടെ ക്ഷേത്രഫലം ഏഴു വരിയായിരിക്കും. അവിടെ ഏഴിൽ ഹരിച്ചിട്ടു വരിയിലെ ഖണ്ഡസംഖ്യ ഉണ്ടാക്കേണ്ടൂ[53]. ആകയാൽ അവിടെ ഫലഗുണകാരമാകുന്ന അഞ്ചിനെ കളകവേണ്ടത്[54] പന്ത്രണ്ടിങ്കന്ന്. അതു പിന്നെയ്ക്കു ഹാരകമാകുന്നതെന്നും വരും. ഗുണകാരം ഫലത്തിന്റേതു നടേത്തെ അഞ്ചുതന്നെയത്രെ താനും രണ്ടേടത്തും എന്നിങ്ങനെ ഇപ്രകാരങ്ങളെല്ലാറ്റേയും അറിയുന്ന ഈ[55] ഘാതത്തെ ക്ഷേത്രഫലമാക്കീട്ടു നിരൂപിക്കുമ്പോൾ അറിയുന്നേടത്തേയ്ക്ക് എളുപ്പമുണ്ട്.

6.v. അഞ്ചാമത്തെ വിശേഷത

പിന്നെ പന്ത്രണ്ടു ഗുണകാരമാകുന്നേടത്ത് അപ്പന്ത്രണ്ടിനെ നാലിൽ ഹരിച്ചാൽ അപ്ഫലം[56] മൂന്ന്. ആ മൂന്നിനെക്കൊണ്ടു ഗുണിപ്പൂ ഗുണ്യത്തെ. പിന്നെ അഗ്ഗുണിച്ചിരിക്കുന്നതിനെ തന്നെ നാലാകുന്ന ഹാരകം കൊണ്ടും ഗുണിപ്പൂ. അപ്പോൾ അതു പന്ത്രണ്ടിൽ ഗുണിച്ചതായിട്ടു വരും. അവിടെ നടേ ഗുണ്യത്തെ മൂന്നിൽ ഗുണിക്കുമ്പോൾ ഗുണ്യം മൂന്നുവരിയായിട്ടുണ്ടാവും. പിന്നെ അതിനെ നാലിൽ ഗുണിക്കുമ്പോൾ മുമ്മൂന്നു വരിയായിട്ടുണ്ടാകും നാലേടത്ത്. അപ്പോൾ പന്ത്രണ്ടുവരി ഉണ്ടാകും. ആകയാൽ ഗുണഗുണ്യങ്ങളിൽവെച്ച് ഒന്നിനെ ഏതാനും ഒരു ഹാരകം കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ മുടിയുമെങ്കിൽ ഈ ഹാരകം കൊണ്ടു ഗുണഗുണ്യങ്ങളിൽ മറ്റേതിനെ ഗുണിപ്പൂ. പിന്നെ ഗുണിച്ചതിനെ തന്നെ ഹരിച്ച ഫലത്തെക്കൊണ്ടും ഗുണിപ്പൂ. അപ്പോൾ ഇഷ്ടഗുണഗുണ്യങ്ങൾ തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചുതായിട്ടു വരും. ഇങ്ങനെ[57] പലപ്രകാരത്തിലുള്ള ഗുണനത്തെ ചൊല്ലീതായി.

---

51. B. F. വരിയുണ്ടാവൂ
52. B. reads ഗുണിച്ചിട്ട് ഉണ്ടായ ക്ഷേത്രഫലത്തിങ്കേന്ന്
53. D. reads ഉണ്ടാവാൻ ക്ഷേത്രഫലത്തെക്കൊണ്ട് ആകയാൽ
54. B. വേണ്ടൂ
55. D. om. അറിയുന്ന ഈ
56. B. ഹരിച്ച ഫലം
57. B. C.D പല പ്രകാരം; D. F. പല പ്രകാരമുള്ള ഗുണനപ്രകാരത്തെ ചൊല്ലീതായി

7. ഹരണം

അനന്തരം[1] "ഹരണം". അവിടെ യാതൊന്നിനെ ഹരിക്കുന്നൂ അതിന്നു 'ഹാർയ്യ'മെന്നു പേർ. യാതൊന്നിനെക്കൊണ്ടു ഹരിക്കുന്നൂ[2] അതിന്നു 'ഹാരക'മെന്നു പേർ. അവിടെ[3] ഹാർയ്യത്തെ ഒരു ഘാതക്ഷേത്രമെന്നു കല്പിച്ച് ഇതിന്റെ ഒരു പാർശ്വത്തിന്റെ നീളം ഒരു ഹാരകസംഖ്യയോളമെന്നു കല്പിപ്പൂ. പിന്നെ ഈ ഹാരത്തെ എത്ര ആവൃത്തി കളയാം ഹാർയ്യത്തിങ്കൽനിന്ന് അത്രവരേ[4] ഉണ്ട് ആ ഘാതക്ഷേത്രത്തിങ്കൽ[5] ഹാരകത്തോളം വരിയിൽ ഓരോന്നിലെ ഖണ്ഡസംഖ്യ. ഇങ്ങനെ ഫലവും ഹാരകവും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചിരിപ്പോരു ഘാതക്ഷേത്രം ഈ ഹാർയ്യമാകുന്നത്. അവിടെ ഹാരകത്തെ ഹാർയ്യത്തിന്റെ ശതസ്ഥാനമാദിയായിട്ടുവെച്ചിട്ടു വാങ്ങാമെങ്കിൽ[6] നൂറ് ആവൃത്തി കളഞ്ഞതായിട്ടുവരും ഹാരകം. അവിടെ ഫലം നൂറുണ്ടായിട്ടു വരും. ശതസ്ഥാനത്ത് ഒന്നു വെയ്ക്കുമ്പോൾ അതു നൂറായിട്ടിരിക്കും[7]. ആകയാൽ യാതൊരിടമാദിയായിട്ടു[8] ഹാർയ്യത്തിങ്കന്നു ഹാരകത്തെ കളഞ്ഞു ആ സ്ഥാനത്തു ഫലത്തെ വെക്കേണ്ടൂ. എത്ര ആവൃത്തി അവിടന്നു കളഞ്ഞു അത്ര ഫലം ആ സ്ഥാനത്തുള്ളൂതും. ഇങ്ങനെ ആദ്യസ്ഥാനത്തോളം[9] ഫലം ഉണ്ടാക്കൂ[10]. എന്നിങ്ങനെ ഹരണപ്രകാരം.

---

7 1. B. അഥ
2. D. F.adds പിന്നെ
3. B. om. അവിടെ
4. B. വരി
5. C.D. ത്തിൽ; C. ത്തീന്ന്
6. C. D. F. വാങ്ങാമെന്നിരിക്കിൽ
7. B. D. F നൂറായിട്ടുവരും
8. B. om. ട്ടു; F. രിടമായിട്ടു
9. B. ത്തോളവും
10. B. F. ഉണ്ടാകും

8. വർഗ്ഗം

8.i. ഒന്നാമത്തെ വർഗ്ഗപ്രകാരം

അനന്തരം 'വർഗ്ഗം'[1]. അവിടെ വർഗ്ഗമാകുന്നതു ഗുണനം തന്നെയത്രെ. ഗുണ്യവും ഗുണകാരവും[2] സംഖ്യകൊണ്ടു[3] തുല്യമെന്നു വിശേഷമാകുന്നത്. ആകയാൽ 'വർഗ്ഗക്ഷേത്രം' സമചതുരശ്രമായിട്ടിരിക്കും[4]. ആകയാൽ രണ്ടു വരിയിലെ ഖണ്ഡസംഖ്യകളും തുല്യങ്ങളായിട്ടിരിക്കും[5], ഇവിടെ. മുമ്പിൽ ഗുണനത്തെ ചൊല്ലിയേടത്തു ഗുണ്യത്തിന്റെ അന്ത്യസ്ഥാനത്തിന്നു നേരെ ആദ്യസ്ഥാനം വരുമാറു ഗുണകാരത്തെവെച്ച്[6] ഗുണ്യാന്ത്യസ്ഥാനത്തെ ഗുണകാരത്തിന്റെ അതതു സ്ഥാനത്തെ സംഖ്യകൊണ്ടു ഗുണിച്ച്, അതതു സ്ഥാനത്തിന്റെ നേരെ വെപ്പൂ എന്നല്ലൊ മുമ്പിൽ ചൊല്ലിയത്. അവ്വണ്ണമാകുമ്പോൾ ഗുണഗുണ്യങ്ങളുടെ സ്ഥാനയോഗത്തിങ്കന്ന് ഒന്നുപോയ സ്ഥാനസംഖ്യയിങ്കൽ ഗുണിച്ചതിനെ വേക്കേണ്ടൂ എന്നു വന്നിരിക്കും. ഇവിടെ പിന്നെ ഗുണഗുണ്യങ്ങൾക്കു സ്ഥാനം തുല്യമാകയാൽ വർഗ്ഗ്യസ്ഥാനത്തെ ഇരട്ടിച്ചതിൽ[7] ഒന്നു കുറഞ്ഞത് ഒരു ഓജസ്ഥാനമായിട്ടിരിക്കും. ആകയാൽ അന്ത്യത്തെ അന്ത്യം കൊണ്ടു ഗുണിച്ചത് ഒരു ഓജസ്ഥാനത്തു വരും[8]. അന്ത്യത്തെ ഉപാന്ത്യംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചത് അതിനടുത്തു കീഴെ യുഗ്മസ്ഥാനത്തിങ്കൽ, ഉപാന്ത്യത്തെ അന്ത്യം കൊണ്ടു ഗുണിച്ചതും ആ സ്ഥാനത്തുതന്നെ[9] വരും. പിന്നെ ഉപാന്ത്യത്തെ ഉപാന്ത്യംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചത് അതിനു കീഴെ ഓജസ്ഥാനത്തിങ്കൽ. ഇങ്ങനെ തുല്യസ്ഥാനങ്ങൾ തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതിന്ന് ഓജസ്ഥാനമാകുന്നത്. അതുല്യസ്ഥാനങ്ങൾ തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതിന്നു യുഗ്മം.

ആകയാൽ അന്ത്യസ്ഥാനത്തിന്റെ വർഗ്ഗത്തെ നടേ ഒരിടത്തുവെയ്പൂ. പിന്നെ വർഗ്ഗത്തിങ്കൽ വർഗ്ഗ്യത്തിന്റെ എല്ലാസ്ഥാനത്തേയും എല്ലാസ്ഥാനത്തെക്കൊണ്ടും ഗുണിക്കേണ്ടുകയാൽ തുല്യസ്ഥാന

8 1. B. അഥ വർഗ്ഗം
2. B. ഗുണകവും
3. B. തുല്യസംഖ്യയാണെന്ന്
4. F. ചതുരമായിട്ടിരിക്കും
5. F. ആയിരിക്കും
6. B. ഗുണകത്തെ വെ
7. F. ഇരട്ടിച്ചതിങ്കന്ന്
8. B. ഓജസ്ഥാനമായിരിക്കും
9. F. അസ്ഥാനത്തിങ്കൽ

ഘാതത്തിന്നു 'വർഗ്ഗം' എന്നും, അതുല്യസ്ഥാനങ്ങൾ തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതിനു 'ഘാത'മെന്നും പേർ. എന്നിട്ടു പറയുന്നൂ ഒറ്റപ്പെട്ടതിന് 'ഓജ'മെന്നും ഇരട്ടപ്പെട്ടതിന്നു 'യുഗ്മ'മെന്നും പേർ. ഒട്ടുസംഖ്യ കൂട്ടിയതിന്നു 'രാശി' എന്നും പേർ. അവിടെ[10] അന്ത്യവർഗ്ഗംവെച്ച്[11] അനന്തരം[12] ഗുണ്യത്തിന്റെ അന്ത്യവും ഗുണകാരത്തിന്റെ ഉപാന്ത്യവും പിന്നെ ഗുണ്യത്തിന്റെ ഉപാന്ത്യവും ഗുണകാരത്തിന്റെ അന്ത്യവും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചാൽ സ്ഥാനവും സംഖ്യയും ഒന്ന്[13]. ആകയാൽ അന്ത്യസ്ഥാനത്തെ[14] ഇരട്ടിച്ച് ഉപാന്ത്യസ്ഥാനത്തെ ഗുണിച്ച്[15] ഉപാന്ത്യസ്ഥാനത്തിന്നു നേരെ വെയ്പൂ. അന്ത്യസ്ഥാനത്തിന്റെ വർഗ്ഗത്തെ വെച്ചതിനടുത്തു കീഴെയിരിക്കുമത്. പിന്നെ ഈവണ്ണം തന്നെ ഇരട്ടിച്ച അന്ത്യത്തെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ച ഉപാന്ത്യത്തിന്നു കീഴെ സംഖ്യകൾ എല്ലാറ്റേയും അതതിനുനേരെ കീഴെ വെയ്പൂ. പിന്നെ അന്ത്യസ്ഥാനത്തെ[16] കളയാം. ഗുണ്യാന്ത്യം കൊണ്ടും ഗുണകാരാന്ത്യം കൊണ്ടും ഗുണിക്കേണ്ടുവത് ഒക്ക കഴിഞ്ഞു എന്നിട്ട്. പിന്നെ ഉപാന്ത്യാദിസ്ഥാനങ്ങളെ ഒക്ക ഒരു സ്ഥാനം കിഴിച്ചിട്ടു വെയ്പൂ. അപ്പോൾ മുമ്പിൽ അന്ത്യസ്ഥാനത്തിന്റെ വർഗ്ഗത്തെ യാതൊരിടത്തു വെച്ചൂ[17] അതിങ്കന്ന് അടുത്തു[18] കിഴേതിന്നു നേരെ കീഴെ ഇരിക്കും. അവിടെത്തന്നെ ഉപാന്ത്യസ്ഥാനത്തിന്റെ വർഗ്ഗത്തെ കൂട്ടൂ. പിന്നെ ഉപാന്ത്യസ്ഥാനത്തെ ഇരട്ടിച്ചതിനെക്കൊണ്ടു അതിനു കീഴെസ്ഥാനങ്ങളെ ഗുണിച്ച് അതതിന്നു നേരെ കൂട്ടൂ. പിന്നെ ഉപാന്ത്യത്തെ കളവൂ[19]. പിന്നെ ഒരു സ്ഥാനം കിഴിച്ച് ഉപാന്ത്യത്തിന്നു കീഴെ സ്ഥാനത്തിന്റെ വർഗ്ഗം കൂട്ടൂ. പിന്നെ ഇതിനെ ഇരട്ടിച്ച് അതിന്ന് കീഴെ സ്ഥാനങ്ങളെ ഗുണിച്ചിട്ട്[20] അന്നേരത്തിരിക്കുന്ന[21] സ്ഥാനത്തിന്നു നേരെ കൂട്ടൂ പിന്നെ കിഴിച്ചിട്ടു വർഗ്ഗം. ഇങ്ങനെ[22] സ്ഥാനമൊടുങ്ങുവോളം ഇച്ചൊല്ലിയ ക്രിയയെ ചെയ്ക. ഇങ്ങനെ

---

8. 10. B.om. അവിടെ
11. B. ർഗ്ഗത്തെ
12. B. om. അനന്തരം (to) അന്ത്യസ്ഥാനത്തെ
13. F. ഒന്നേ
14. B. അന്ത്യത്തെ
15. B. ഉപാന്ത്യത്തെ പെരുക്കി
16. D. കീഴെ നേരെ വെയ്പ്പൂ; F. നേരേ വെച്ച് അന്ത്യത്തെ കളയാം
17. B. വെച്ചേയ്പ്പൂ
18. D. അടുത്തു കീഴേതിന്നുകീഴെ നേരേ ഇരിക്കും; F. യാതോരേടത്ത് വെച്ച് അത്ര തന്നെ അടുത്ത് കീഴെ
19. B. C. D. F om. പിന്നെ ഉപാന്ത്യത്തെ കളവൂ
20. B. ഗുണിച്ച്
21. C. om. അന്നേരത്തിരിക്കുന്ന; F. അന്നേരത്തെ
22. B. C. F. om. ഇങ്ങനെ (to) ക്രിയയെ ചെയ്ക

വർഗ്ഗമാകുന്നതു ഗുണനം തന്നെ.[23] ഗുണനമാകുന്നതു സംകലിതം തന്നെയത്രേ എന്നോ മുമ്പിൽ ചൊല്ലിയല്ലോ. എന്നാലിതും സംകലിതവിശേഷമത്രേ. ഇങ്ങനെ ഒരു പ്രകാരം വർഗ്ഗത്തെ ചൊല്ലീതായി[24].

8.ii. രണ്ടാമത്തെ വർഗ്ഗപ്രകാരം

അനന്തരം ഇതിനെത്തന്നെ[25] ക്ഷേത്രത്തിങ്കൽ കാട്ടുന്നു. അവിടെ[26] വർഗ്ഗമെന്നൊരു സമചതുരശ്രക്ഷേത്രം[27]. ഇതിന്റെ അന്ത്യസ്ഥാനത്തിന്റെ വർഗ്ഗത്തെ വെയ്ക്കുമ്പോൾ അത്രപോന്നൊരു സമചതുരശ്ര ക്ഷേത്രമുണ്ടാകും[28]. അതൊരു കോടിയിലുണ്ടാകും. അതും പിന്നെയിവിടെ[29] വർഗ്ഗ്യരാശി[30] ഖണ്ഡിച്ചിട്ടു[31] വർഗ്ഗിക്കുമാറ് ഓർക്കുന്നു. അവിടെ അതിന്റെ[32] അന്ത്യസ്ഥാനം ഒരു ഖണ്ഡം. കീഴെസ്ഥാനങ്ങൾ ഒക്ക കൂടിയത് ഒരു ഖണ്ഡം. ഇങ്ങനെ ഗുണകാരത്തേയും പിന്നെ ഗുണ്യത്തേയും[33] ഖണ്ഡിപ്പൂ[34] ഇവ്വണ്ണം തന്നെ. എന്നാൽ[35] ഗുണകാരത്തിന്റെ അന്ത്യഖണ്ഡം കൊണ്ടു ഗുണ്യത്തിന്റെ അന്ത്യഖണ്ഡത്തെ[36] ഗുണിച്ചത് ഒന്ന്. ഗുണ്യത്തിന്റെ ആദ്യഖണ്ഡത്തെ ഗുണിച്ചതു രണ്ടാമത്[37]. പിന്നെ ഗുണകാരത്തിന്റെ ആദ്യഖണ്ഡത്തെക്കൊണ്ടു ഗുണ്യത്തിന്റെ അന്ത്യഖണ്ഡത്തെ ഗുണിച്ചത് മൂന്നാമത്[38]. ഇതിനെക്കൊണ്ട് ആദ്യഖണ്ഡത്തെ ഗുണിച്ചത് നാലാമത്[39]. ഇങ്ങനെ വർഗ്ഗക്ഷേത്രം[40] നാലുഖണ്ഡമായിട്ടിരുന്നൊന്ന്[41]. അവിടെ നടേത്തേ ഖണ്ഡവും നാലാമതും സമചതുരശ്രമായിട്ടിരുന്നൊന്ന്. എന്നിട്ട് ഇവ രണ്ടും വർഗ്ഗക്ഷേത്രം[42].

8. 23. B. om. തന്നെ
24. B. om. ഇങ്ങനെ (to) ചൊല്ലീതായി
25. B. om. ഇതിനെത്തന്നെ
26. B. om. അവിടെ
27. C. സമചതുരക്ഷേത്രം
28. C. D. F സമചതുരശ്രമുണ്ടാകും
29. B. om. അതും പിന്നെ
30. C. D. F. വർഗ്ഗ്യരാശിയെ
31. B. ഖണ്ഡിച്ച്
32. B. om. അവിടെ അതിന്റെ
33. B. ഗുണ്യത്തെയും ഗുണകത്തെയും
34. F. ഖണ്ഡിച്ച്
35. B. om. ഇവ്വണ്ണം തന്നെ എന്നാൽ
36. B. ഗുണ്യാന്ത്യഖണ്ഡത്തെ
37. B. ഗുണകാന്ത്യ ഗുണ്യാദ്യഘാതം രണ്ടാമത്തേത്; ഗുണിച്ചതു തന്നെ
38. B. ഗുണകാദ്യ ഗുണ്യന്ത്യാഘാതം മൂന്നാമത്തേത്
39. B. ആദ്യഖണ്ഡവർഗ്ഗം നാലാമത്തേത്
40. B. നാലുഖണ്ഡമുള്ള ഒരു സമചതുരശ്രമാകുന്നു
41. F. ഖണ്ഡമായത്
42. B. ഇതിൽ ഒന്നും നാലും ഖണ്ഡങ്ങൾ വർഗ്ഗങ്ങളാകയാൽ സമചതുരശ്രങ്ങളായിരിക്കും. രണ്ടും മൂന്നും ഘാതങ്ങളാണെങ്കിൽ സമചതുരശ്രമാവുകയില്ല.

രണ്ടാമതും മൂന്നാമതും ഘാതക്ഷേത്രം. അവിടെ നൂറ്റി ഇരുപത്തിമൂന്നിന്റെ വർഗ്ഗം വേണ്ടുവത് എന്നിരിക്കുമ്പോൾ, ശതസ്ഥാനത്തിങ്കലെ ഒന്ന് ഒരു ഖണ്ഡമാകുന്നത്[43] കീഴെ സ്ഥാനങ്ങൾ രണ്ടും കൂടി[44] ഇരുപത്തിമൂന്നു മറ്റേ ഖണ്ഡമാകുന്നത്. അവിടെ നടേ നൂറ്റിന്റെ വർഗ്ഗം വെയ്ക്കുമ്പോൾ നൂറുവരിയും[45] ഓരോ വരിയിൽ നൂറു നൂറു ഖണ്ഡങ്ങളും കൂടിയിരിപ്പോരു സമചതുരശ്രമുണ്ടാകും. ഇത് ഈശകോണിൽ എന്നു കല്പിപ്പൂ. പിന്നെ ഘാതങ്ങൾ രണ്ടും ഇതിന്റെ തെക്കും[46] പടിഞ്ഞാറും വെയ്പൂ. അവ[47] രണ്ടും നൂറു[48] നീളവും ഇരുപത്തിമൂന്ന് ഇടവും[49] ഇങ്ങനെ ഇരിപ്പോ ചില രണ്ടു ക്ഷേത്രങ്ങൾ ഇവ. പിന്നെ[50] ഇരുപത്തിമൂന്നിന്റെ വർഗ്ഗം നിരൃതികോണിൽ വരും. പിന്നെ ആ ക്ഷേത്രത്തിങ്കലും ഇരുപതും മൂന്നും ഇങ്ങനെ സ്ഥാനത്തെ[51] ഖണ്ഡിച്ചു വർഗ്ഗിക്കാം. അവിടെ ഇരുപതിന്റെ വർഗ്ഗം അവിടുത്തെ ഈശകോണിങ്കൽ കൽപിപ്പൂ. പിന്നെ ഇരുപതു നീളവും മൂന്നിടവും[52] ഇങ്ങനെ രണ്ടു ഘാതക്ഷേത്രം, തെക്കും പടിഞ്ഞാറും. പിന്നെ[53] മൂന്നിന്റെ വർഗ്ഗം ഇതിന്റെ നിരൃതികോണിൽ[54]. ഇങ്ങനെ സ്ഥാനമൊടുങ്ങുവോളം. ഇങ്ങനെ ഒരു വർഗ്ഗപ്രകാരം. ഇങ്ങനെ[55] ഒരു രാശിയെ വർഗ്ഗിക്കേണ്ടുമ്പോൾ അതിനെ രണ്ടായി ഖണ്ഡിച്ചു തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചിരട്ടിച്ചു

---

8. 43. B. മാകുന്നു
44. B. om രണ്ടും കൂടി
45. B. നൂറ് വരികളും ഖണ്ഡങ്ങളും ഉണ്ടാകുന്നു. ഇത് ഒരു സമചതുരശ്രം
46. C. ഇതിന്റെ
47. B. ഇവ
48. B. om. രണ്ടും
49. B. ഇരുപത്തിമൂന്നു വീതിയും ഉള്ള ഓരോ
50. B. om. പിന്നെ
51. B. om. സ്ഥാനത്തെ
52. B. മൂന്നു വീതിയുമായ ഓരോ ക്ഷേത്രങ്ങൾ തെക്കും പടിഞ്ഞാറും കല്പിപ്പു.
53. B. F. om. പിന്നെ
54. B. ണിലും കല്പിപ്പൂ
55. B. reads, ഇങ്ങിനെ വർഗ്ഗയോഗവും ഘാതവും നിരൃതികോണിലും കല്പിപ്പൂ. ഇങ്ങിനെ വർഗ്ഗയോഗവും ഘാതചതുഷ്ടയവും കൂടിയാൽ യോഗവർഗ്ഗം എന്ന് ചൊല്ലിയതായി. ഘാതചതുഷ്ടയവും അന്തരവർഗ്ഗവും കൂട്ടിയാലും യോഗവർഗ്ഗമാകും. ഘാതചതുഷ്ടയങ്ങൾക്ക് വലിയ ഖണ്ഡത്തോളം നീളവും ചെറിയ ഖണ്ഡത്തോളം ഇടവും ഉണ്ടാകും. ഘാതക്ഷേത്രങ്ങളിൽ ഒന്നിന് ഈശകോണിൽ നിന്ന് തെക്കോട്ടും, ഒന്നിനെ അഗ്നികോണിൽ നിന്നു പടിഞ്ഞാറോട്ടും ഒന്നിനെ നിരൃതികോണിൽ നിന്നും വടക്കോട്ടും, ഒന്നിനെ വായുകോണിൽ നിന്നും കിഴക്കോട്ടും അടുപ്പിച്ചു ചേർത്താൽ നടുവിൽ ഒരേ സ്ഥലം ബാക്കിയുണ്ടാവും. അവിടെ അന്തരവർഗ്ഗത്തേയും ചേർത്താൽ സ്ഥലം ബാക്കിയില്ല. എല്ലാം കൂട്ടിയാൽ യോഗവർഗ്ഗക്ഷേത്രമായിട്ടിരിക്കുകയും ചെയ്യും. ഘാതചതുഷ്ടയവും അന്തരവർഗ്ഗവും കൂട്ടിയാൽ വർഗ്ഗയോഗമായിരിക്കും. ഇതിൽ ഖണ്ഡഘാതത്തെ ഇരട്ടിച്ചതിനെ കൂട്ടിയത് മുൻവർഗ്ഗത്തെ ഉണ്ടാക്കിയെന്നിട്ട്. ഇവിടെ പിന്നെ ഖണ്ഡവർഗ്ഗത്തെ ഒരു ക്ഷേത്രമെന്നു കല്പിക്കുമ്പോൾ ഘാതക്ഷേത്രകർണ്ണസമചതുരശ്രബാഹുവായിട്ടിരിപ്പോരു വർഗ്ഗക്ഷേത്രമതെന്നും വരും. (ഇതിൻ പ്രകാരം.....)

രണ്ടു ഖണ്ഡത്തിന്റേയും വർഗ്ഗവും കൂട്ടിയാൽ ഖണ്ഡയോഗത്തിന്റെ വർഗ്ഗമായിട്ടിരിക്കും എന്നു ചൊല്ലീ.

8.iii. മൂന്നാമത്തെ വർഗ്ഗപ്രകാരം.

അനന്തരം ഖണ്ഡഘാതത്തെ നാലിൽ ഗുണിച്ചിട്ട് അതിൽ ഖണ്ഡാന്തരവർഗ്ഗവും കൂട്ടൂ. എന്നാലും ഈ വർഗ്ഗമുണ്ടാകും. ഇതിൻപ്രകാരം– ഇവിടെ ഘാതക്ഷേത്രമാകുന്നതു വലിയ ഖണ്ഡത്തോളം നീളവും ചെറിയ ഖണ്ഡത്തോളം ഇടവും ഉണ്ടായിരിക്കും. ഇതിങ്കൽ ഒരു കർണ്ണരേഖയും വരപ്പൂ. ഇങ്ങനെ നാലുള്ള ഇവറ്റെക്കൊണ്ടു വർഗ്ഗക്ഷേത്രമുണ്ടാക്കും പ്രകാരം. ഈ ഘാതക്ഷേത്രത്തിൽ ഒന്നിനെ വർഗ്ഗക്ഷേത്രത്തിന്റെ ഈശകോണിൽ നിന്നു തുടങ്ങി തെക്കോട്ടു വെയ്പൂ. പിന്നെ ഒന്നിനെ ഇതിന്റെ അഗ്നികോണിൽ[56] നിന്നു പടിഞ്ഞാറോട്ട്. പിന്നെ നിരൃതികോണിങ്കന്നു വടക്കോട്ട്. പിന്നെ വായുകോണിങ്കന്നു കിഴക്കോട്ട്. ഇങ്ങനെ വെച്ചാൽ ക്ഷേത്രമദ്ധ്യത്തിൽ ഖണ്ഡാന്തരവർഗ്ഗത്തോളം പോരാതെയിരിക്കും. അതും കൂട്ടിയാൽ തികയും. ചെറിയ ഖണ്ഡത്തോളം ഇരുപുറവുമുണ്ടാകുമ്പോൾ നടുവിൽ അന്തരത്തോളം ശേഷിക്കും, എന്നിട്ട്. ആകയാൽ നാലുഘാതവും അന്തരവർഗ്ഗവും കൂട്ടിയാലും ഖണ്ഡയോഗവർഗ്ഗം ഉണ്ടാകും. പിന്നെ ഇച്ചൊല്ലിയതു കൊണ്ടു തന്നെ ഖണ്ഡങ്ങളുടെ വർഗ്ഗയോഗം ഘാതത്തെ ഇരട്ടിച്ചതും അന്തരവർഗ്ഗവും കൂടിയായിരിക്കും എന്നു[57] വരും. ഇതിൽ ഖണ്ഡഘാതത്തെ ഇരട്ടിച്ചതിനെ കൂട്ടീട്ടല്ലോ മുമ്പിൽ വർഗ്ഗത്തെ ഉണ്ടാക്കി[58] എന്നിട്ട്.

8.iv. ഭുജാകോടി കർണ്ണന്യായം.

ഇവിടെ പിന്നെ ഖണ്ഡവർഗ്ഗയോഗത്തെ ഒരു ക്ഷേത്രമെന്നു കല്പിക്കുമ്പോൾ ഘാതക്ഷേത്രത്തിന്റെ കർണ്ണം[59] സമചതുരശ്ര ബാഹുവായിട്ടിരിപ്പോരു വർഗ്ഗക്ഷേത്രമത് എന്നു വരും. ഇതിൻപ്രകാരം. അവിടെ[60] നാലു ഘാതക്ഷേത്രത്തെ വെച്ച് അവറ്റിന്ന് ഓരോ കർണ്ണരേഖകൾ. മുമ്പിൽ[61] ചൊല്ലിയവറ്റിന്റെ അഗ്രം സമചതുരശ്രകോണിൽ അല്ലാ വേണ്ടൂ,

8. 56. D. കോണിങ്കന്ന്
57. C. കൂടിയായിട്ടിരിക്കും; കൂടിയതായിട്ടുവരും; D. കൂടിയതായിട്ടിരിക്കും എന്ന്
58. F. വർഗ്ഗത്തോളം
59. B. ഖണ്ഡബാഹു
60. F. ഇവിടെ
61. F. രേഖ; മുൻചൊല്ലിയ

മറ്റേ[62] കോടികളെ സ്പർശിക്കുമാറ് ഇരിക്കേണ്ടൂ. ഇങ്ങനെ ഇരിക്കുന്നേടത്ത് ആ കർണ്ണരേഖാമാർഗ്ഗേണ പെളിച്ചു പുറത്തു ഖണ്ഡങ്ങൾ ഓരോന്നു നാലിങ്കന്നും കളയൂ[63]. അപ്പോൾ അതിന്നകം[64] അക്കർണ്ണരേഖകൾ ചതുരശ്രബാഹുക്കൾ നാലുമായിട്ടിരിപ്പോരു സമചതുരശ്രം ശേഷിക്കും. പിന്നെ കളഞ്ഞ ഖണ്ഡങ്ങൾ നാലിൽ ഈരണ്ടു തങ്ങളിൽ കൂട്ടിയാൽ രണ്ടു ഘാതക്ഷേത്രങ്ങൾ ഉണ്ടാകും. ഈവണ്ണമാകുമ്പോൾ വർഗ്ഗയോഗം കർണ്ണവർഗ്ഗമെന്നും വർഗ്ഗയോഗത്തിങ്കൽ ഇരട്ടിയിങ്കന്നു യോഗവർഗ്ഗം അന്തരവർഗ്ഗം കൊണ്ടു കുറഞ്ഞിരിക്കുമെന്നും വരും. ആകയാൽ ഇവിടെ വർഗ്ഗയോഗത്തിങ്കന്നു ഘാതത്തിലിരട്ടി കളഞ്ഞാലും യോഗവർഗ്ഗത്തിങ്കന്നു ഘാതത്തിൽ[65] നാന്മടങ്ങു പോയാലും വർഗ്ഗയോഗത്തിൽ ഇരട്ടിയിങ്കന്നു യോഗവർഗ്ഗം പോയാലും മൂന്നിങ്കലും അന്തരവർഗ്ഗം ശേഷിക്കും എന്നു വരും.

8.v. നലാമത്തെ വർഗ്ഗപ്രകാരം

അനന്തരം വർഗ്ഗിക്കേണ്ടുന്ന രാശിയെ രണ്ടേടത്തുവച്ച് ഒന്നു ഗുണകാരമെന്നും ഒന്നു ഗുണ്യമെന്നും കല്പിച്ച് ഇതിൽ[66] ഒന്നിങ്കന്ന് ഒരിഷ്ടസംഖ്യയെ[67] കളവൂ. അതിനെത്തന്നെ മറ്റേതിൽ കൂട്ടൂ. പിന്നെ തങ്ങളിൽ ഗുണിപ്പൂ. ആ ക്ഷേത്രം ഇഷ്ടോനത്തോളം ഇടവും ഇഷ്ടാധികത്തോളം നീളവുമായിട്ടിരിക്കും[68]. അവിടെ നീളം ഏറിയതിനെ മുറിച്ച് ഇടം പോരാത്തേടത്തു വെയ്പൂ. അപ്പോൾ ഒരു കോണിൽ ഇഷ്ടവർഗ്ഗത്തോളം പോരാതെയിരിക്കും[69]. അതും കൂട്ടിയാൽ വർഗ്ഗക്ഷേത്രം മുമ്പിലത്തേതു തന്നെ.

8.vi. യോഗാന്തരാഹതി വർഗാന്തരം

അനന്തരം ഈ ഖണ്ഡവർഗ്ഗന്യായം ചൊല്ലിയതിനെക്കൊണ്ടു തന്നെ ഒരിഷ്ടരാശിയെ വർഗ്ഗിച്ചതിനെ രണ്ടേടത്തുവെച്ചു രണ്ടാമതൊരു ഇഷ്ടസംഖ്യയെ കല്പിപ്പൂ. പിന്നെ പ്രഥമദ്വിതീയേഷ്ടങ്ങളുടെ ഘാതത്തെ ഇരട്ടിച്ച് അതിനെ ഒന്നിൽ കൂട്ടൂ. ഒന്നിൽ കളയൂ. പിന്നെ ദ്വിതീയേഷ്ടവർഗ്ഗം

8. 62. B. അവറ്റേ
63. F. കളവൂ
64. F. ഇതിനകം
65. B. ത്തിങ്കന്ന്
66. B. അതിൽ
67. C. D. F. ഒരിഷ്ടത്തെ കളവൂ
68. B. മായിരിക്കും
69. C. പോരാതിരിക്കും

രണ്ടിലും കൂട്ടൂ. അപ്പോൾ പ്രഥമേഷ്ടത്തിൽ ദ്വിതീയേഷ്ടം കൂട്ടിയതിന്റേയും കളഞ്ഞതിന്റേയും വർഗ്ഗമായിട്ടിരിക്കുമവ രണ്ടും. അവറ്റെ മൂലിച്ചാൽ[70] ഒരു യോഗവർഗ്ഗമൂലവും ഒരന്തരവർഗ്ഗമൂലവുമായിട്ടിരിക്കുമവ.

ഇവിടെ യാതൊന്നു മുമ്പിൽ ഖണ്ഡവർഗ്ഗക്ഷേത്രം ചൊല്ലപ്പെട്ടത് ഈശകോണിൽ വലിയ ഖണ്ഡത്തിന്റെ വർഗ്ഗം, നിരൃതികോണിൽ ചെറിയതിന്റെ വർഗ്ഗം[71], മറ്റേ കോണുകളിൽ ഖണ്ഡദ്വയഘാതക്ഷേത്രങ്ങളും ഈ നാലു ക്ഷേത്രവും കൂടിയത് ആ ഖണ്ഡയോഗവർഗ്ഗക്ഷേത്രമാകുന്നത് എന്നിങ്ങനെ[72] ചൊല്ലിയേടത്ത് ആ നിരൃതികോണിലെ ഖണ്ഡക്ഷേത്രം ഒരിഷ്ടവർഗ്ഗക്ഷേത്രം; പിന്നെ ഈശകോണിലേതു മറ്റൊരു ഇഷ്ടവർഗ്ഗക്ഷേത്രം. ഇവിടെ ഈശകോണിലെ വർഗ്ഗക്ഷേത്രത്തെക്കാട്ടിൽ മറ്റെ മൂന്നു ക്ഷേത്രങ്ങളും കൂടിയത് അഖണ്ഡമായിരിക്കുന്ന വലിയ രാശിയുടെ[73] വർഗ്ഗക്ഷേത്രത്തിൽ[74] ഏറിയ ഭാഗമാകുന്നത്. ആകയാൽ ആ ക്ഷേത്രങ്ങൾ മൂന്നും കൂടിയത് വർഗ്ഗാന്തരമാകുന്നത്.

ഈ[75] വർഗ്ഗാന്തരക്ഷേത്രമാകുന്നതിനെ വരുത്തുംപ്രകാരം പിന്നെ. ഇവിടെ ഈശകോണിലെ വർഗ്ഗക്ഷേത്രത്തിന്റെ തെക്കേ പുറത്തും പടിഞ്ഞാറെ പുറത്തും ഓരോ ഘാതക്ഷേത്രമുള്ളവ ഇവിടേയ്ക്കു ചെറിയ രാശിയെ രാശ്യന്തരം കൊണ്ടു ഗുണിച്ചതായിട്ടിരിക്കുമവ. പിന്നെ[76] നിരൃതികോണിലേത് അന്തരവർഗ്ഗമായിട്ടിരിക്കും. ആകയാൽ ചെറിയ രാശിയെ ഇരട്ടിച്ചതിനേയും രാശികൾ രണ്ടിന്റേയും അന്തരത്തേയും അന്തരം കൊണ്ടു ഗുണിക്കേണം. ആകയാൽ ചെറിയ രാശിയും വലിയ രാശിയും കൂടിയുള്ള യോഗത്തെ രാശ്യന്തരം കൊണ്ടു ഗുണിച്ചിട്ടുള്ളതായിട്ടിരിക്കും[77]. ചെറിയരാശിയും അന്തരവുമുള്ള യോഗം വലിയ രാശിയായിട്ടിരിക്കും, എന്നിട്ട്. യോഗാന്തരാഹതി വർഗ്ഗാന്തരമെന്നും വരും.

8. 70. F. ഒരു വർഗ്ഗയോഗമൂലവും വർഗ്ഗാന്തരമൂലവും, ആയിട്ടിരിക്കും മൂലിച്ചാൽ
71. F. ചെറിയ ഖണ്ഡത്തിന്റെ
72. F. ഇങ്ങിനെ
73. F. om. വലിയ
74. B.F. ത്തിങ്കൽ
75. B. ആകുന്ന വലിയ രാശിയുടെ വർഗ്ഗക്ഷേത്രത്തിങ്കൽ ഏറിയ ഭാഗമാകുന്നതിനെ വരുത്തും പ്രകാരം
76. D. അന്തരവും ഉള്ള യോഗം വലിയ രാശിയായിട്ടിരിക്കും. എന്നിട്ട് (പിന്നെ.....)
77. D. F. ഗുണിച്ചതായിട്ടിരിക്കും

8.vii. ഏകാദിദ്വിചയ ശ്രേഢീക്ഷേത്രം

ഇവ്വണ്ണമാകുമ്പോൾ[78] ഒന്നിന്റെ വർഗ്ഗം ഒന്നിൽ നിന്നു ശൂന്യവർഗ്ഗമായ ശൂന്യത്തെ കളഞ്ഞാൽ ശേഷം ഒന്ന്. ഒന്നും രണ്ടും ഉള്ള യോഗം ആകുന്ന[79] മൂന്നിനെ അന്തരമാകുന്ന ഒന്നിനെക്കൊണ്ട് ഗുണിച്ചാൽ സംഖ്യാ[80]ഭേദമില്ലായ്കയാൽ മുന്നു തന്നെ യോഗാന്തരാഹതിയാകുന്നത്. ആകയാൽ ഒന്നും രണ്ടും തങ്ങളിലുള്ള വർഗ്ഗാന്തരം മൂന്ന്. ഈ മൂന്നിനെ ഒന്നിന്റെ വർഗ്ഗമാകുന്ന ഒന്നിൽ കൂട്ടിയാൽ നാലു രണ്ടിന്റെ വർഗ്ഗമായിട്ടിരിക്കും[81]. ഈവണ്ണം രണ്ടും മൂന്നും കൂടിയ അഞ്ചു രണ്ടിന്റേയും മൂന്നിന്റേയും വർഗ്ഗാന്തരമാകുന്നത്. പിന്നെ മൂന്നിന്റേയും നാലിന്റേയും വർഗ്ഗാന്തരം ഏഴ്. നാലുമഞ്ചുമുള്ള വർഗ്ഗാന്തരം ഒമ്പത്. ഇങ്ങനെ ഒന്നു തുടങ്ങി ഈരണ്ടീരണ്ടു സംഖ്യ നിരന്തരേണ ഏറി ഏറിയിരിക്കും ഒന്നു തുടങ്ങിയുള്ള നിരന്തരസംഖ്യകളുടെ വർഗ്ഗാന്തരം. ആകയാൽ ഒന്നു തുടങ്ങി[82] ഈരണ്ടീരണ്ടേറി ഇരിപ്പോരു 'ശ്രേഢീക്ഷേത്ര'മായിരിക്കുമത്[83]. ഏകാദിക്രമേണയുള്ള സംഖ്യകളുടെ വർഗ്ഗക്ഷേത്രമായിട്ടിരിക്കുമത്[84]. ഇങ്ങനെ ആകുമ്പോൾ[85] ഏകാദിദ്വിചയ ശ്രേഢീക്ഷേത്രമായിട്ടും കല്പിക്കാം വർഗ്ഗക്ഷേത്രത്തെ[86]. അവിടെ ചതുരശ്രബാഹുവിങ്കലെ സംഖ്യയോളം വരി, നടേത്തെ വരിയിൽ ഒരു ഖണ്ഡം, പിന്നത്തേതിൽ[87] മൂന്നു ഖണ്ഡം, പിന്നത്തെ വരിയിൽ അഞ്ച്, ഇങ്ങനെ വരിയിൽ ഖണ്ഡസംഖ്യകൾ ഈരണ്ടീരണ്ടേറീട്ടിരുന്നോ ചിലവ. ഇപ്രകാരം ശ്രേഢീക്ഷേത്രസ്വഭാവം. ഇതിനെ മേലിൽ വിസ്തരിക്കുന്നു ജ്യാപ്രകരണത്തിങ്കൽ. ഇങ്ങനെ ചൊല്ലീതായി വർഗ്ഗപരികർമ്മം.

8\. 78. B. C.D.F. om. മ്പോൾ
79\. B. D. om. ആകുന്ന
80\. F. om. സംഖ്യ
81\. C. D. F. adds പിന്നെ
82\. F. തുടങ്ങി ഏറി ഏറി
83\. F. om. ആയിരിക്കുമത്
84\. C. ക്ഷേത്രമായിട്ടിരിക്കുമത്; അത്
85\. F. adds വർഗ്ഗക്ഷേത്രം
86\. B. അംശക്ഷേത്രത്തെ
87\. B. പിന്നേതിൽ

൯. വർഗ്ഗമൂലം

അനന്തരം വർഗ്ഗമൂലം. അതു വർഗ്ഗത്തിന്റെ വിപരീതക്രിയയായിരുന്നൊന്ന്. അവിടേയുമാദ്യസ്ഥാനത്തിങ്കന്നു തുടങ്ങി അന്ത്യസ്ഥാനമൊടുക്കമായിട്ടുള്ള വർഗ്ഗക്രിയയിങ്കന്നു വിപരീതമായിരുന്നൊന്നു മൂലക്രിയ[1]. അവിടെ[2] നൂറ്റിരുപത്തിമൂന്നിനെ ആദ്യസ്ഥാനത്തിങ്കന്നു തുടങ്ങി വർഗ്ഗിക്കുംപ്രകാരം. ആദ്യസ്ഥാനത്തെ മൂന്നിന്റെ വർഗ്ഗം ഒമ്പതിനെ ആദ്യസ്ഥാനത്തിന് നേരെ വെയ്പൂ. അതു നടേത്തെ ക്രിയയാകുന്നത്. പിന്നെ ഈ മൂന്നിനെ ഇരട്ടിച്ച ആറുകൊണ്ട് രണ്ടാംസ്ഥാനത്തെ രണ്ടിനേയും മുന്നാംസ്ഥാനത്തെ ഒന്നിനേയും ഗുണിച്ച് അതതിനുനേരെ നടേ വർഗ്ഗം വച്ചതിന്റെ വരിയിൽ വെയ്പൂ. ഇതു രണ്ടാം ക്രിയ. പിന്നെ ദ്വിതീയസ്ഥാനത്തെ രണ്ടിനേയും തൃതീയസ്ഥാനത്തെ ഒന്നിനേയും ഓരോ സ്ഥാനം മേൽപ്പോട്ടു നീക്കി രണ്ടിന്റെ വർഗ്ഗം നാലിനെ ശതസ്ഥാനത്തു വെയ്പൂ എന്നു മൂന്നാംക്രിയ. പിന്നെ രണ്ടിനെ ഇരട്ടിച്ച നാലിനെക്കൊണ്ടു മൂന്നാം സ്ഥാനത്തെ ഒന്നിനെ നീക്കി നാലാംസ്ഥാനത്തിന്നു നേരെ ഇരിക്കുന്നതിനെ ഗുണിച്ച നാലിനെ സഹസ്രസ്ഥാനത്തിന്നു നേരെ വയ്പ്പു. ഇതു നാലാംക്രിയ. പിന്നെ[3] മൂന്നാംസ്ഥാനത്തിരുന്ന ഒന്നിനെ നീക്കി നാലാം[4] സ്ഥാനത്താക്കിവെച്ചതു യാതൊന്ന്, പിന്നെയുമതിനെ നീക്കി അഞ്ചാം സ്ഥാനത്തിങ്കൽ ഇതിന്റെ വർഗ്ഗമൊന്നു വയ്പൂ. ഇതു അഞ്ചാം ക്രിയ[5]. ഇങ്ങനെ മൂന്നു സ്ഥാനമുള്ളതിന്റെ ക്രിയ[6].

ഇതിന്റെ മൂലം ഇച്ചൊല്ലിയ വർഗ്ഗക്രിയയിങ്കന്നു വിപരീതമായിട്ടിരിപ്പൊന്ന്. ഇവിടെ[7] എല്ലായിലും ഒടുക്കത്തെ ക്രിയയാകുന്നത് അഞ്ചാം സ്ഥാനത്തിങ്കൽ[8] ഒന്നിന്റെ വർഗ്ഗം വെക്ക. അവിടുന്നു[9] ഒന്നിന്റെ വർഗ്ഗം വാങ്ങുക. അവിടെ നടേത്തെ ക്രിയ ആകുന്നത്. പിന്നെ കീഴെ സ്ഥാനത്തിങ്കന്ന് ഇതിനെ ഇരട്ടിച്ചു

---

9. 1. B. C. D മൂലീകരണക്രിയ
2. D. അതിൽ
3. F. തന്നെ മൂന്നാം സ്ഥാനത്തെ
4. F. സ്ഥാനത്തിരുന്നതിനെ
5. B. അഞ്ചാം സ്ഥാനത്തേക്കു നീക്കി അതിന്റെ വർഗ്ഗമൊന്നു വയ്പു ഇത് അഞ്ചാമത്തെ ക്രിയ
6. B. മുന്നാം സ്ഥാനത്തിന്റെ വർഗ്ഗം; C. മുള്ളതിന്റെ വർഗ്ഗക്രിയ
7. F. om. ഇവിടെ
8. F. സ്ഥാനത്ത്
9. F. അവിടെ

ഹരിക്കുക[10]. മുമ്പിൽ നാലാമതു ഗുണിച്ചു വെക്കുക[11]. പിന്നെ ഫലത്തിന്റെ വർഗ്ഗം അതിന്നു[12] കീഴെ സ്ഥാനത്തിങ്കന്നു വാങ്ങുക. പിന്നെ ഈ സ്ഥാനങ്ങൾ രണ്ടും കൂടി കീഴെ സ്ഥാനത്തിങ്കന്നു ഹരിക്ക. പിന്നെ ഫലത്തിന്റെ വർഗ്ഗം അതിന്നു കീഴെ സ്ഥാനത്തിങ്കന്നു വാങ്ങുക. ഇങ്ങിനെ[13] വിപരീതക്രിയയുടെ പ്രകാരം. ഒടുക്കത്തെ ക്രിയ നടേത്തെ ക്രിയ, നടേത്തെ ക്രിയ ഒടുക്കത്തെ ക്രിയ. കൂട്ടുന്നേടത്തു കളയുക[14], കളയുന്നേടത്തു കൂട്ടുക. സ്ഥാനം കരേറ്റുന്നേടത്തു കിഴിക്ക[15]. ഇങ്ങനെ മൂലീകരണമാകുന്നത് വർഗ്ഗക്രിയയുടെ വിപരീതക്രിയ.

10. വർഗ്ഗയോഗമൂലവും വർഗ്ഗാന്തരമൂലവും

പിന്നെ ഈ ന്യായംകൊണ്ടു തന്നെ രണ്ടു വർഗ്ഗങ്ങളെ കൂട്ടി[1] മൂലിച്ചു മൂലമുണ്ടാക്കണമെങ്കിൽ ചെറിയ രാശിയുടെ വർഗ്ഗത്തിങ്കന്നു വലിയ രാശിയെ ഇരട്ടിച്ചതിനെക്കൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ[2]. പിന്നെ ഫലത്തിന്റെ വർഗ്ഗം വാങ്ങൂ. ഫലത്തെ ഇരട്ടിച്ചു ഹാരകത്തിൽ കൂട്ടൂ. പിന്നെയുമിങ്ങനെ. ഇവിടെ ഹാര്യത്തിന്റെ[3] എത്രാം സ്ഥാനത്തിങ്കന്നു ഹരിച്ചൂ ഫലത്തെ ഇരട്ടിച്ചതിനെ ഹാരകത്തിന്റെ അത്രാം സ്ഥാനത്തു കൂട്ടേണ്ടൂ എന്നു നിയമം[4]. പിന്നെ ഒടുക്കത്തെ ഹാരാർദ്ധം[5] യോഗമൂലമാകുന്നത്. അവിടെ ഹരിച്ചാൽ എത്ര ഫലമുണ്ടാകുമെന്ന്[6] ഊഹിച്ചിട്ട് ആ ഫലത്തെ ഇരട്ടിയാതെ ഹാരകത്തിൽ കൂട്ടീട്ടാവു ഹരിപ്പത്. എങ്കിൽ പിന്നെ ഫലത്തിന്റെ വർഗ്ഗത്തെ വേറെ വാങ്ങേണ്ടാ. അതുകൂടി പോയിട്ടിരിക്കും. പിന്നെ ഹരിച്ചാലും ഫലത്തെ[7]

9\. 10. C. D. ഹരിക്ക
11. C. D വെക്ക
12. C. D. F.om. അതിന്നു
13. A. ഇതിനെ
14. B. കളക
15. B. കിഴിക്കുക

10\.1. C. D. കൂട്ടിച്ചു
2. F. ഹരിച്ചു
3. C. അവിടെ ഹാരകത്തിന്റെ
4. B. എന്നു നിയമം
5. B. ഹാരകാർദ്ധം
6. C. D. എന്നതിനെ
7. B. C. ഫലം

ഹാരകത്തിൽ കൂട്ടൂ. അപ്പോൾ ഇരട്ടിച്ചു കൂട്ടിയതായിരിക്കും[8]. പിന്നെ കീഴെ സ്ഥാനത്തിങ്കന്നു ഹരിക്കുമ്പോൾ എത്ര ഫലമുണ്ടാകുമെന്നതിനെക്കണ്ട് അതിനെ ഹാരകത്തിന്റെ കീഴെ സ്ഥാനത്തു[9] കൂട്ടീട്ടു ഹരിപ്പൂ. പിന്നെയും ഫലത്തെ കൂട്ടൂ. ഇങ്ങനെ ഹാര്യമൊടുങ്ങുവോളം ക്രിയ ചെയ്‌വൂ. ഹാരകാർദ്ധം യോഗവർഗ്ഗമൂലം[10]. ഇവിടെ വർഗ്ഗയോഗത്തിങ്കന്നു വലിയ രാശീടെ വർഗ്ഗത്തെ കളഞ്ഞു മൂലത്തെ ഇരട്ടിച്ചു വെച്ചിരിക്കുന്നതു[11] ഹാരകമാകുന്നത്[12] എന്നു കല്പിക്കുന്നത് സ്ഥാനവിഭാഗത്തിന്നു തക്കവണ്ണമല്ല, നടേത്തെ വർഗ്ഗത്തെ കളഞ്ഞു, സംഖ്യാവിഭാഗത്തിന്നു തക്കവണ്ണമത്രെ എന്നു മുമ്പിൽ ചൊല്ലിയ മൂലീകരണക്രിയയിങ്കന്നു വിശേഷമാകുന്നത്. ഇങ്ങനെ[13] വർഗ്ഗയോഗമൂലീകരണം.

പിന്നെ വർഗ്ഗാന്തരമൂലമറിയേണ്ടിവരികിൽ ഇപ്രകാരം തന്നെ ഹാര്യത്തേയും ഹാരകത്തേയും വെച്ചു ഹരിക്കുന്നേടത്തു ഹാരകത്തിങ്കന്നു ഫലത്തെ കളഞ്ഞിട്ടു ഹരിക്കേണം. ഹരിച്ചനന്തരം ഫലത്തെ കളവൂതും ചെയ്‌വൂ[14]. പിന്നെ സ്ഥാനം കിഴിച്ചിട്ടു ഹരിക്കുന്നേടത്തുണ്ടാകുന്ന ഫലത്തെ ഊഹിച്ചിട്ടു മുമ്പേ ഹാരകത്തിങ്കന്ന് അത്രാം സ്ഥാനത്തിങ്കന്നു കളഞ്ഞശേഷത്തെക്കൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ. ഹരിച്ചനന്തരം ഫലത്തെ കളവൂ. ഇങ്ങനെ ഹാര്യാന്തം ക്രിയാ. ഒടുക്കത്തെ ഹാരകത്തെ അർദ്ധിച്ചതു വർഗ്ഗാന്തരമൂലമായിട്ടിരിക്കും. ഇങ്ങനെ വർഗ്ഗാന്തരമൂലം.

[ഗണിതയുക്തിഭാഷയിൽ പരികർമ്മാഷ്ടകമെന്ന ഒന്നാമദ്ധ്യായം സമാപ്തം]

10.8. C. D. കൂട്ടിയതായിട്ടിരിക്കും; F. കൂട്ടിയതായിട്ടും ഇരിക്കും
9. F. സ്ഥാനത്തിങ്കൽ
10. B. C. D. F. വർഗ്ഗയോഗമൂലം
11. F. adds. ഈ
12. C. F. ഹാരകമാകുന്നത്
13. F. om. ഇങ്ങനെ
14. F. കളവൂ

അദ്ധ്യായം രണ്ട്

ദശപ്രശ്നോത്തരം

അനന്തരം രണ്ടു രാശികളുടെ യോഗം, അന്തരം, ഘാതം, വർഗ്ഗയോഗം, വർഗ്ഗാന്തരം എന്നീ അഞ്ചു വസ്തുക്കളിൽ ഈരണ്ടു വസ്തുക്കളെ അറിഞ്ഞാൽ അവ സാധനമായിട്ടു രണ്ടു രാശികളേയും വേറെ അറിയും പ്രകാരം.

1. *ഒന്നാമത്തെ പ്രശ്നം*

ഇവിടെ[1] രണ്ടു രാശിയുടെ യോഗത്തിൽ അവറ്റിന്റെ അന്തരത്തെ കൂട്ടിയാൽ വലിയ രാശിയുടെ[2] ഇരട്ടിയായിട്ടിരിക്കും. പിന്നെ ആ യോഗത്തിങ്കന്നുതന്നെ ആയന്തരത്തെ കളഞ്ഞാൽ ചെറിയ രാശിയുടെ ഇരട്ടിയായിട്ടിരിക്കും[3]. പിന്നെ രണ്ടിനെയും അർദ്ധിച്ചാൽ രാശികൾ രണ്ടുമുളവാകും.

2. *രണ്ടാമത്തെ പ്രശ്നം*

അനന്തരം[4] യോഗവും, ഘാതവും അറിഞ്ഞാൽ രാശികളെ അറിയും പ്രകാരം. അവിടെ മുമ്പിൽ പറഞ്ഞ[5] ന്യായത്തിനു തക്കവണ്ണം യോഗത്തിന്റെ വർഗ്ഗത്തിങ്കന്നു നാലിൽ ഗുണിച്ച ഘാതത്തെ കളഞ്ഞ ശേഷത്തെ മൂലിപ്പിച്ചതു രാശ്യന്തരം. പിന്നെ മുമ്പിൽ പറഞ്ഞതുപോലെ[6] വേർപ്പെടുത്തിക്കൊള്ളൂ രാശികൾ രണ്ടിനേയും[7].

---

1. 1. B. C. D. F. അവിടെ
2. B. C.D. F. രാശിയിൽ
3. F. രാശിയെ ഇരട്ടിച്ചതായിട്ടുവരും
4. F. om. അനന്തരം
5. B. C. D.F. ചൊല്ലിയ
6. C. D. F. ചൊല്ലിയ
7. B. om. രാശികൾ രണ്ടിനേയും

3. *മൂന്നാമത്തെ പ്രശ്നം*

പിന്നെ യോഗവും വർഗ്ഗയോഗവും. അവിടെ[8] വർഗ്ഗയോഗത്തെ ഇരട്ടിച്ചതിങ്കന്നു യോഗവർഗ്ഗത്തെ കളഞ്ഞുമൂലിച്ചതു അന്തരം.

4. *നാലാമത്തെ പ്രശ്നം*

പിന്നെ യോഗത്തെക്കൊണ്ട് വർഗ്ഗാന്തരത്തെ ഹരിച്ച ഫലം രാശ്യന്തരമായിട്ടുവരും[9], മുമ്പിൽ[10] ചൊല്ലിയ ന്യായം കൊണ്ട്.

5. *അഞ്ചാമത്തെ പ്രശ്നം*

അനന്തരം അന്തരവും ഘാതവും. അവിടെ ഘാതത്തെ നാലിൽ ഗുണിച്ചതിൽ അന്തരവർഗ്ഗത്തെ കൂട്ടി മൂലിച്ചതു[10] രാശിയോഗമായിട്ടിരിക്കും[11].

6. *ആറാമത്തെ പ്രശ്നം*

പിന്നെ അന്തരവും വർഗ്ഗയോഗവും[12]. വർഗ്ഗയോഗത്തെ ഇരട്ടിച്ചതിങ്കന്ന് അന്തരവർഗ്ഗത്തെ കളഞ്ഞു മൂലിച്ചതു രാശിയോഗം[13].

7. *ഏഴാമത്തെ പ്രശ്നം*

പിന്നെ അന്തരത്തെക്കൊണ്ടു വർഗ്ഗാന്തരത്തെ ഹരിച്ചതു യോഗം.

8. *എട്ടാമത്തെ പ്രശ്നം*

അനന്തരം ഘാതവും വർഗ്ഗയോഗവും. അവിടെ ഘാതത്തെ ഇരട്ടിച്ചതിനെ വർഗ്ഗയോഗത്തിങ്കന്നു കളഞ്ഞു[14] ശേഷത്തിന്റെ മൂലം അന്തരം. നാലിൽ[15] ഗുണിച്ച ഘാതത്തിൽ അന്തരവർഗ്ഗം കൂട്ടി മൂലിച്ചതു യോഗം[16].

9. *ഒമ്പതാമത്തെ പ്രശ്നം*

പിന്നെ ഘാതവും വർഗ്ഗാന്തരവും. അവിടെ രാശികൾ രണ്ടിന്റേയും

---

1. 8. F. യോഗവർഗ്ഗത്തിങ്കന്ന് വർഗ്ഗയോഗത്തെ ഇരട്ടിച്ച് കളഞ്ഞ ശേഷത്തെ മൂലിച്ചനന്തരം
9. B. om. ആയിട്ടുവരും
10. B. C മൂലിച്ചാൽ യോഗം
11. F. ആയിരിക്കും
12. A. B. om. this sentence
13. F. വർഗ്ഗം പോയ ശേഷത്തിന്റെ മൂലം രാശിയോഗം
14. D. കളഞ്ഞുമൂലിച്ചത് അനന്തരം; F. കളഞ്ഞശേഷം അനന്തരവർഗ്ഗമായിട്ടിരിക്കും
15. F. add. പിന്നെ ഇതിനേയും
16. F. അവ രാശി അന്തരയോഗങ്ങൾ

വർഗ്ഗങ്ങളുണ്ടാകുന്നത്. അതിൻ പ്രകാരം[17]. ഇവിടെ രാശികളെക്കൊണ്ടു ചെയ്യുന്ന ക്രിയകളെ വർഗ്ഗങ്ങളുണ്ടാകുന്ന രാശികളെക്കൊണ്ടു ചെയ്യാം. എന്നാൽ ഫലങ്ങളും വർഗ്ഗരൂപങ്ങളായിട്ടിരിക്കും[18] എന്നേ വിശേഷമുള്ളൂ. അവിടെ ഘാതത്തെ വർഗ്ഗിച്ചാൽ വർഗ്ഗങ്ങളുടെ ഘാതമായിട്ടിരിക്കും, ഗുണനത്തിങ്കൽ ക്രമഭേദം കൊണ്ടു ഫലഭേദമില്ല. ആകയാൽ വർഗ്ഗങ്ങളുടെ ഘാതവും അന്തരവും അറിഞ്ഞത്[19] എന്നു കല്പിച്ചിട്ടു രാശ്യന്തരവും ഘാതവും അറിഞ്ഞിട്ടു രാശിയോഗത്തെ ഉണ്ടാക്കുംവണ്ണം വർഗ്ഗയോഗത്തെ ഉണ്ടാക്കാം. അവിടെ ഘാതവർഗ്ഗത്തെ നാലിൽ ഗുണിച്ചു വർഗ്ഗാന്തരവർഗ്ഗവും കൂട്ടി മൂലിച്ചതു വർഗ്ഗയോഗമായിട്ടിരിക്കും. പിന്നെ ഈ വർഗ്ഗയോഗത്തെ രണ്ടേടത്തു വെച്ച് ഒന്നിൽ വർഗ്ഗാന്തരത്തെ കൂട്ടൂ. മറ്റേതിങ്കന്നു കളവൂ. പിന്നെ രണ്ടിനെയും അർദ്ധിപ്പൂ. അവ രാശികൾ രണ്ടിന്റേയും വർഗ്ഗമായിട്ടിരിക്കും[20].

10. *പത്താമത്തെ പ്രശ്നം*

പിന്നെ വർഗ്ഗയോഗവും വർഗ്ഗാന്തരവും അറിഞ്ഞതു പത്താമത്. അതും ചൊല്ലീതായി. ഇങ്ങനെ ദശപ്രശ്നങ്ങൾ. ഇവറ്റിന്നു പലേടത്തും ഉപയോഗമുണ്ട്, എന്നിട്ടു ചൊല്ലി.

ഘനമൂലങ്ങൾക്കു ഗ്രഹഗണിതത്തിങ്കലെ[21] ഉപയോഗമില്ല. എന്നിട്ടു[22] അവറ്റെ ഇവിടെ ചൊല്ലുന്നീല. ഇങ്ങനെ ഒരു വഴി പരികർമ്മങ്ങൾ[23].

[ഗണിതയുക്തിഭാഷയിൽ ദശപ്രശ്നോത്തരമെന്ന രണ്ടാമദ്ധ്യായം സമാപ്തം]

---

1. 17. F. ഇതിൻ പ്രകാരം
18. B. om. രൂപ
19. F. അറിഞ്ഞിട്ട്
20. F. adds ഇങ്ങനെ ഒമ്പതാം പ്രശ്നം
21. F. ഗണിതത്തിങ്കൽ ഏറെ
22. F. ഇല്ലാഞ്ഞിട്ട്
23. B. ഇങ്ങനെ ദശപ്രശ്നങ്ങൾ

അദ്ധ്യായം മൂന്ന്

ഭിന്നഗണിതം

1. ഭിന്നസ്വരൂപം

അനന്തരം നാനാപ്രകാരങ്ങളായി അവയവങ്ങളായിട്ടിരിക്കുന്ന രാശികളുടെ സംകലിതാദികളെ ചൊല്ലുന്നു. അവിടെ തികഞ്ഞിരിക്കുന്ന ഒന്നിനു 'രൂപ'മെന്നു പേർ. ഇങ്ങനെ പൂർണ്ണരൂപമായിരിക്കുന്ന ഒന്നിൽ പൂർണ്ണരൂപമായിട്ടേ ഇരിക്കുന്ന ഒന്നിനെ കൂട്ടിയാൽ രണ്ടാകും. പിന്നെയുമതിൽ അവ്വണ്ണമിരിപ്പൊന്നു[1] കൂട്ടിയാൽ മൂന്നാകും. പിന്നെ ഈ മൂന്നിങ്കന്നു പൂർണ്ണരൂപമായിരിക്കുന്ന ഒന്നിനെ കളഞ്ഞാൽ രണ്ടുണ്ടാകും. ഇതിങ്കന്നു[2] രൂപം പോയാൽ ഒന്നാകും. ഇങ്ങനെ സദൃശങ്ങളാകുന്നവറ്റിന്റെ യോഗം കൊണ്ടു മീത്തെ മീത്തെ സംഖ്യ ആയിട്ടുവരും[3].

അവ്വണ്ണമേ സദൃശങ്ങളുടെ വിയോഗം കൊണ്ടു കീഴെ കീഴെ സംഖ്യയും വരും. സദൃശങ്ങളല്ലാത്തവറ്റിന്റെ യോഗമാകുന്നത് ഒന്നിൽ അരതാൻ കാൽ താൻ കൂട്ടുക. എന്നാൽ അതു രണ്ടെന്നു വരാ. രണ്ടിൽ അര താൻ കാൽ താൻ കുറഞ്ഞതു ഒന്നാകുകയുമില്ല. ആകയാൽ സദൃശങ്ങൾക്കേ യോഗവിയോഗങ്ങൾക്ക് ആഞ്ജസ്യമുള്ളു. യോഗവിയോഗങ്ങൾ കൊണ്ടു സംഖ്യ ഏറുകയും കുറയുകയും ചെയ്യേണം. അതേ ആഞ്ജസാലുള്ള യോഗവിയോഗങ്ങളായിട്ടിരിപ്പൂ. ഒന്നേകാൽ കുറയ രണ്ട് എന്നു തുടങ്ങിയുള്ളേടത്ത് എല്ലാം യോഗവിയോഗങ്ങൾ ഉണ്ടായീലാ, വേർപ്പെട്ടിരിക്കുന്നത്രെ[4]. ആകയാൽ ഭിന്നപ്രമാണങ്ങളാകുന്ന അവയവങ്ങൾ തങ്ങളിത്താൻ അവയവവും അവയവിയും തങ്ങളിത്താൻ യോഗവിയോഗങ്ങൾ ചെയ്യേണ്ടുങ്കിൽ, വണ്ണമൊപ്പിച്ചിട്ട് ഒരു തരമേ ആക്കിക്കൊണ്ടിട്ടുവേണം.

---

1. 1. B. ഇരിക്കുന്ന ഒന്നിനെ കൂട്ടിയാൽ
2. F. അതിങ്കന്ന്
3. F. ആയിട്ടിരിക്കും
4. D. പെട്ടിരിക്കുന്നുവെത്രേ

2. സവർണ്ണീകരണം

വണ്ണമൊപ്പിക്കും പ്രകാരം, പിന്നെ. ഒരു രൂപത്തിന്റെ അഞ്ചൊന്നും നാലൊന്നും തമ്മിൽ[1] കൂട്ടേണമെങ്കിൽ അവിടെ ഒന്നിനെക്കൊണ്ടു നാലു - പെളിച്ചതിൽ ഒരു കൂറു നാലൊന്നാകുന്നത്. അതിനെ അഞ്ചു പെളിച്ചാൽ ഇരുപതുപെളിച്ചതിൽ അഞ്ചു കൂറായിട്ടിരിക്കും. രൂപത്തിൽ അഞ്ചൊന്നു പിന്നെ രൂപത്തെ അഞ്ച് [2]അംശിച്ചതിൽ ഒരു കൂറ്. അതിനെ പിന്നെ നാലു പെളിച്ചാൽ ഇരുപത് അംശിച്ചതിൽ നാലുകൂറായിട്ടിരിക്കും. ഇവ്വണ്ണമാകുമ്പോൾ അഞ്ചൊന്നായിരിക്കുന്ന നാലും നാലൊന്നായിരിക്കുന്ന അഞ്ചും തങ്ങളിൽ വണ്ണമൊക്കയാൽ യോഗവിയോഗങ്ങൾ ചെയ്യാം. രണ്ടു വകയും ഇരുപതാലൊന്നാകയാൽ വണ്ണമൊക്കുന്നു. ഇവിടെ നാലൊന്നിലൊന്നാകുന്നവ നാലുകൂട്ടിയവ പൂർണ്ണരൂപമാകുന്നത് എന്നറിവാൻ അടയാളമായിട്ടു നാലിനെ ഛേദമായിട്ടു കീഴെ വെപ്പൂ[3], ഒന്നിനെ അംശമായിട്ടു മേലേയും വെപ്പൂ. പിന്നെ അഞ്ചൊന്നിങ്കൽ അഞ്ചിനെ[4] കീഴെ ഛേദമായിട്ടും ഒന്നിനെ മീത്തെ അംശമായിട്ടും വെപ്പൂ. പിന്നെ നാലൊന്നിന്റെ ഛേദമായ[5] നാലിനെക്കൊണ്ട് അഞ്ചൊന്നിന്റെ ഛേദമായ അഞ്ചിനേയും അംശമായ ഒന്നിനേയും ഗുണിപ്പൂ[6]. പിന്നെ അഞ്ചാകുന്ന ഛേദത്തെക്കൊണ്ടു നാലൊന്നിന്റെ[7] ഛേദമാകുന്ന നാലിനേയും അംശമാകുന്ന ഒന്നിനേയും ഗുണിപ്പൂ. ഈവണ്ണമാകുമ്പോൾ രണ്ടിങ്കലും ഛേദസംഖ്യ ഇരുപതായിട്ടി രിക്കും. അംശങ്ങൾ നാലൊന്നിങ്കൽ അഞ്ചും അഞ്ചൊന്നിങ്കൽ നാലും ആയിട്ടിരിക്കും. ഇവിടേയും നാലൊന്നും അഞ്ചൊന്നുമായിട്ടിരിക്കുന്നതിനു വിശേഷമില്ല. ഒട്ടേറെ ചെറിയ നുറുക്കുകൾ ഇപ്പോൾ എന്നേ വിശേഷമുള്ളു. ഇങ്ങനെ ഒന്നിന്റെ ഛേദത്തെക്കൊണ്ടു മറ്റേതിന്റെ ഛേദത്തേയും അംശത്തേയും ഗുണിപ്പൂ. പിന്നെ മറ്റേതിന്റെ ഛേദം കൊണ്ട് ഈ

---

2. 1. C. D. F. തങ്ങളിൽ
2. F. അംശിച്ചാൽ ഒരു കൂറിനെ
3. F. മേലേയും വയ്പ്പു
4. F. അഞ്ചൊന്നിൻ അഞ്ചാം
5. C. D ഛേദമാകുന്ന
6. C. അഞ്ചൊന്നിനേയും അഞ്ചൊന്നിന്റെ ഛേദത്തെയും; F. om. അഞ്ചൊന്നിന്റെ (......to) ഗുണിപ്പൂ.
7. C. D. നാലിന്റെ

ഛേദത്തേയും അംശത്തേയും ഗുണിപ്പൂ. അപ്പോൾ[8] സമച്ഛേദങ്ങളായി വർണ്ണമൊത്തിരിക്കും. ആകയാൽ യോഗാന്തരങ്ങൾക്കു യോഗ്യങ്ങളായിട്ടു വരും[9]. ആകയാൽ ഇവറ്റിന്റെ[10] യോഗത്തിങ്കൽ ഒമ്പതായിട്ടിരിക്കും. അന്തരത്തിങ്കൽ ഒന്നുമായിട്ടിരിക്കും. ഇവ പൂർണ്ണരൂപമായിരിക്കുന്ന ഒന്നിന്റെ ഇരുപതാലൊന്നു താനും.

ഇങ്ങനെ[11] പലവക ഉണ്ടായിരിക്കിലും സമച്ഛേദങ്ങളാക്കാം[12]. അവിടെ ഛേദം കൊണ്ടു തന്നേയും തന്റെ അംശത്തെയും ഒഴിച്ച് എല്ലാറ്റേയും ഗുണിപ്പൂ. എന്നാൽ സമച്ഛേദങ്ങളായി[13] സംകലിതവ്യവകലിത യോഗ്യങ്ങളായിട്ടു വരും. പിന്നെ ഇവറ്റോട് ഒരു പൂർണ്ണരൂപത്തെ കൂട്ടേണമെങ്കിൽ ഈ സമച്ഛേദത്തെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ചുകൊള്ളു. എന്നാൽ അവയവങ്ങളോടു വർണ്ണമൊക്കുമാറു വരും[14] പൂർണ്ണരൂപമായിട്ടിരിക്കുന്നത്. ഇങ്ങനെ സവർണ്ണനം.

3. അംശഗുണനം

അനന്തരം അവയവത്തിന്റെ ഗുണനം. അവിടെ ഒരു രൂപത്തിന്റെ ചതുരംശം ഗുണ്യം, ചില പൂർണ്ണരൂപങ്ങൾ ഗുണകാരങ്ങൾ എന്നും വരുമ്പോൾ ഗുണകാരത്തിന്റെ വ്യക്തികൾ എത്ര അത്ര സ്ഥാനത്തു വെപ്പൂ ഗുണ്യമാകുന്ന ചതുരംശത്തെ[1], പിന്നെ തങ്ങളിൽ കൂട്ടൂതും ചെവൂ. അപ്പോൾ മുമ്പിൽ ചൊല്ലിയ ഖണ്ഡഗുണനന്യായത്തിന്നു തക്കവണ്ണം ആ ഗുണ്യത്തെ ഗുണിച്ചതായിട്ടു വരും. അവിടെ ഗുണകാരത്തിങ്കൽ പത്തു രൂപവ്യക്തികൾ ഉണ്ട് എന്നിരിപ്പൂ. അപ്പോൾ രൂപചതുരംശത്തെ പത്തേടത്ത് ഉണ്ടാക്കൂ. അവറ്റിന്റെ യോഗം ഗുണിച്ചതായിട്ടിരിക്കും. അതു പിന്നെ സമച്ഛേദങ്ങളായിരിപ്പോ ചിലവ പത്ത് അംശങ്ങളായിട്ടിരിക്കും. ഇതുഹേതുവായിട്ടുതന്നെ രൂപചതുരംശത്തെക്കൊണ്ടു[2] പത്തിനെ ഗുണിച്ചാലും വിശേഷമില്ല. പത്തു ചതുരംശമായിട്ടേ ഇരിക്കുമത്രേ.

---

2. 8. C. D. ഇപ്പോൾ
9. F. യോഗ്യങ്ങളായിട്ടിരിക്കും
10. B. അവറ്റിന്റെ യോഗം ഒമ്പത്. അന്തരം ഒന്ന് ഇവ പൂർണ്ണരൂപമായിരിക്കുന്ന
11. F. ഇവ പിന്നെ
12. F. adds ഈവണ്ണം
13. B. reads ഒഴിച്ച് മറ്റെല്ലാത്തേയും ഗുണിച്ചാൽ സമച്ഛേദങ്ങളായി
14. F. അവ്വണ്ണമൊക്കും

3. 1. F. രൂപ ചതുരംഗത്തെ
2. F. തന്നെ

ഗുണ്യാവൃത്തമായിരിക്കുന്ന ഗുണകാരവും ഗുണകാരാവൃത്തമായിരിക്കുന്ന ഗുണ്യവും ഒന്നുതന്നെ എന്നു മുമ്പിൽ[3] ചൊല്ലീ, എന്നിട്ട്[4]. ഇങ്ങനെ ആകുമ്പോൾ ഛേദമുണ്ടാകയാൽ ഛേദം കൊണ്ടു ഹരിച്ചേ ഗുണിച്ചുണ്ടായ പൂർണ്ണരൂപങ്ങളായിട്ടു വരൂ എന്നേ വിശേഷമുള്ളൂ. ഇങ്ങനെ ഗുണ്യഗുണകാരങ്ങളിൽ വച്ച് ഒന്നിങ്കൽ ഛേദമുണ്ടായിരിക്കുമ്പോൾ പിന്നെ രണ്ടിങ്കലും കൂടി ഛേദമുണ്ടായിരിക്കിൽ[5] ഛേദങ്ങൾ രണ്ടിനെക്കൊണ്ടും ഹരിക്കേണം. ആകയാൽ ഛേദങ്ങൾ തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതിനെക്കൊണ്ടു ഹരിക്കേണം. ആകയാൽ അവയവഗുണനത്തിങ്കൽ ഗുണ്യ ഗുണകാരങ്ങളുടെ അംശങ്ങൾ തങ്ങളിൽ[6] ഗുണിപ്പൂ. ഛേദങ്ങൾ തങ്ങളിലും[7] ഗുണിപ്പൂ. അപ്പോൾ ഗുണ്യഗുണകാരങ്ങൾ തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചൂതായിട്ടുവരും. ആകയാൽ അഞ്ചൊന്നും നാലൊന്നും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചാൽ ഇരുപതാലൊന്നായിട്ടിരിക്കും. ഇങ്ങനെ അംശഗുണനം.

4. അംശഭാഗഹരണം

അനന്തരം അംശഭാഗഹരണം. ഇവിടെ അംശരൂപമായിരിക്കുന്ന ഹാരകത്തെ അവ്വണ്ണമിരിക്കുന്ന ഹാര്യത്തിങ്കന്ന് എത്ര ആവൃത്തി കളയാം അത്ര പൂർണ്ണരൂപങ്ങളായിട്ടിരിക്കുന്ന ഫലങ്ങളുളവാകും എന്നു മുമ്പിൽ ചൊല്ലിയ ന്യായം തന്നെ അത്രേ ഇവിടേയ്ക്കുമാകുന്നത്. അവിടെ ഒരു രൂപത്തിന്റെ ചതുരംശത്തെ പൂർണ്ണരൂപങ്ങൾ പത്തിനെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ രൂപചതുരംശങ്ങൾ പത്ത് ഉളവാകും. നാലിൽ ഇറങ്ങിയ പത്ത് എന്നും പറയുമിതിനെ[1]. ഇങ്ങനെ ഇരിക്കുന്ന ഇതിനെ ഗുണകാരം കൊണ്ടു ഹരിക്കിൽ[2] ഗുണ്യം ഫലമായിട്ടു വരും. ഗുണ്യം കൊണ്ടു ഹരിക്കിൽ ഗുണകാരം ഫലമായിട്ടു വരും. അവിടെ ഗുണ്യമാകുന്ന നാലിൽ ഇറങ്ങിയ ഒന്നിനെ പത്താവൃത്തി[3] കളയാം. അപ്പോൾ പൂർണ്ണരൂപങ്ങൾ പത്ത് ഉളവാം[4].

3\. 3. F. മുൻപ്
4\. B. om എന്നിട്ട്
5\. F. യിരിക്കൂന്നതാകിൽ
6\. B. തമ്മിൽ
7\. B. തമ്മിൽ

4\. 1. B. ചൊല്ലു; C. D. ചൊല്ലുമിതിനെ; F. ചൊല്ലും
2\. F. ഹരിച്ചാൽ
3\. F. പത്താക്കി
4\. B. ഉളവാകും

അതു ഫലമായിട്ടുവരും[5], ചൊല്ലിയ ന്യായം കൊണ്ട്. പിന്നെ പൂർണ്ണരൂപങ്ങൾ പത്തിനെ ഇതിങ്കന്നു കളയേണ്ടുമ്പോൾ ഈ ഹാര്യമാകുന്ന[6] പത്തു ചതുരംശമല്ലൊ. ആകയാൽ ഇത്തരം നാല്പതു കൂടിയേ പൂർണ്ണരൂപങ്ങളായിരിക്കുന്ന പത്തിനെ ഒരാവൃത്തി കളവാൻ പോരൂ. അപ്പോളേ ഫലം ഒരു രൂപം തികവൂ[7]. ആകയാൽ ഈ ഹാര്യത്തിങ്കൽ ഫലം രൂപചതുരംശമേ ഉള്ളു എന്നു വന്നൂ[8]. ഈവണ്ണമാകുമ്പോൾ അതിന്റെ ക്രിയ പിന്നെ ഹാരകത്തെ ചെറുതാക്കിലുമാം. ഹാര്യത്തെ പെരുക്കിലുമാം. അവിടെ നാലിലിറങ്ങിയ പത്തിനെ നാലിലിറങ്ങിയ[9] ഒന്നിനെക്കൊണ്ടു ഹരിക്കുമ്പോൾ ഹാരകമാകുന്ന ഒന്നിനു ഹാരകം നാല്. ആ നാലിനെക്കൊണ്ടു ഹാര്യമാകുന്ന പത്തിനെ ഗുണിപ്പൂ. പിന്നെ ഒന്നിനെക്കൊണ്ടു തന്നെ ഹരിക്കേ വേണ്ടൂ. ഹാര്യത്തിന്നു നടേയുള്ള ഛേദത്തെക്കൊണ്ടും. ആകയാൽ ഒന്നും നാലുമുള്ള ഘാതം നാല്. അതിനെക്കൊണ്ടു നാല്പതിനെ ഹരിച്ച ഫലം പത്തുണ്ടാകും. ഇങ്ങനെ[10] ഹാരകത്തിന്റെ ഛേദം കൊണ്ടു ഹാര്യത്തിന്റെ അംശത്തെ ഗുണിപ്പൂ. അത് അംശമായിട്ടിരിക്കും. പിന്നെ ഹാരകത്തിന്റെ അംശംകൊണ്ട് ഹാര്യത്തിന്റെ ഛേദത്തെ ഗുണിപ്പൂ. അത് ഛേദമായിട്ടിരിക്കും. അപ്പോൾ ഹരിച്ചൂതായിട്ടിരിക്കും. പൂർണ്ണരൂപങ്ങളായിട്ടു ഫലങ്ങൾ എത്ര ഉള്ളവ എന്ന് അറിയവേണ്ടുകിൽ ഛേദത്തെക്കൊണ്ടു ഹരിക്കേണം എന്നേ ഉള്ളൂ. ഇങ്ങനെ നാലൊന്നും അഞ്ചൊന്നും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ച് ഇരുപതാലൊന്നായിട്ടിരിക്കുന്നതിനെ ഹാര്യം എന്നു കല്പിച്ച് ഇതിനെ അഞ്ചൊന്നിനെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ഇരുപതിലിറങ്ങിയ അഞ്ച്. പിന്നെ ഈ ഛേദാംശങ്ങൾ രണ്ടിനേയും അഞ്ചിൽ ഹരിച്ചാൽ നാലിലിറങ്ങിയ ഒന്നു ഫലം വരും. പിന്നെ ഈ ഹാര്യത്തെത്തന്നെ നാലൊന്നിനെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ അഞ്ചിലിറങ്ങിയ ഒന്നായിട്ടിരിക്കും[11].

ഇങ്ങനെ ഗുണനവും ഹരണവും ഒരു പ്രകാരം തന്നെ മിക്കവാറും.

---

4. 5. D. ഫലങ്ങളായിട്ടുവരും
6. B. adds ഈ
7. F. തികയും
8. B. om. എന്നു വന്നു
9. B. reads 10/4 നെ 1/4 കൊണ്ട് ഹരിക്കുമ്പോൾ ഹാരകമാകുന്ന 1/4 ന് ഹാരകം4. ആ നാലിനെക്കൊണ്ടു 10/4 നെ ഗുണിപ്പൂ.
10. B. F. reads ഇങ്ങനെ ഇരിക്കുന്ന പത്തിനെ ഗുണിപ്പൂ. പിന്നെ ഒന്നിനെക്കൊണ്ടു തന്നെ ഹരിക്ക വേണ്ടൂ. ആ ഹാര്യത്തിനു നടേ ഉള്ള ഛേദം കൊണ്ടും പിന്നെ ഹാര്യത്തിന്റെ
11. B. F. reads അഞ്ചിലൊന്നായിട്ടിരിക്കും

ഗുണഗുണ്യങ്ങളുടെ ഛേദങ്ങൾ തങ്ങളിലും[12] അംശങ്ങൾ തങ്ങളിലും[13] ഗുണിപ്പൂ. ഇതു ഗുണനം[14]. പിന്നെ ഹാരകത്തിന്റെ ഛേദത്തെ അംശമെന്നും അംശത്തെ ഛേദമെന്നും കല്പിച്ചിട്ടുതന്നെ[15] ഗുണനക്രിയ ചെയ്യുമ്പോൾ[16] ഹരിച്ചതായിട്ടു വരും. ഇത്രേ വിശേഷമുള്ളൂ. ഇങ്ങനെ ഗുണനഹരണങ്ങൾ.

5. ഭിന്നവർഗ്ഗവും മൂലവും

പിന്നെ സച്ഛേദമായിട്ടിരിക്കുന്ന രാശിയെ വർഗ്ഗിക്കേണ്ടുമ്പോൾ ഛേദത്തേയും അംശത്തേയും വർഗ്ഗിക്കണം. അവ വർഗ്ഗിച്ച രാശിയുടെ ഛേദാംശങ്ങളാകുന്നവ. പിന്നെ ഛേദം കൂടി ഇരിക്കുന്ന രാശിയെ മൂലിക്കേണ്ടുമ്പോൾ[1] ഛേദത്തേയും അംശത്തേയും മൂലിക്കേണം. അവ പിന്നെ മൂലിച്ച രാശിക്കു ഛേദാംശങ്ങളാകുന്നവ. ഇങ്ങനെ സമച്ഛേദത്തിന്റെ മൂലീകരണങ്ങൾ[2].

[ഗണിതയുക്തിഭാഷയിൽ
ഭിന്നഗണിതമെന്ന
മൂന്നാമദ്ധ്യായം സമാപ്തം]

---

4. 12. B. തമ്മിലും
13. B. തമ്മിലും
14. B. പിന്നെ ഛേദാംശങ്ങളെ തിരിച്ച് മറിച്ച് ഗുണനക്രിയ തന്നെ ചെയ്താൽ ഹാരകമായി
15. C. D. om. തന്നെ
16. B. om. ഇത്രേ (......to......) ഹരണങ്ങൾ; D.adds തന്നെ

5. 1. B. മൂലിക്കുമ്പോഴും ഇങ്ങനെ തന്നെ
2. D. വർഗ്ഗമൂലീകരണങ്ങൾ; F വർഗ്ഗമൂലകരണം

1. 1. B. അഥ

അദ്ധ്യായം നാല്

ത്രൈരാശികം

1. ത്രൈരാശികസ്വരൂപം

അനന്തരം[1] ത്രൈരാശികം. അവിടെ ഒരു[2] അവയവിക്കു രണ്ടു അവയവം ഉണ്ടായിട്ടിരിപ്പൂ. അതിൽ[3] ഒരു[4] അവയവം, ഇത്ര പരിമാണത്തോടു കൂടിയിരുന്നൊന്ന് നിയതമായിട്ടിരിപ്പൂ, ഇന്നിയമത്തെ അറിഞ്ഞിട്ടും ഇരിപ്പൂ. അപ്പോൾ മറ്റൊരിടത്ത് ഇങ്ങനത്തെ ഒരു അവയവിയിങ്കലെ ഏകദേശത്തിന്റെ[6] പരിമാണത്തെ അനുമാനിക്കാം. ഇത് 'ത്രൈരാശിക'മാകുന്നത്. ഇതിനുദാഹരണം. അഞ്ഞാഴി നെല്ലിന്ന് ഇരുനാഴി അരി എന്നിങ്ങനെ അറിഞ്ഞിട്ടിരിക്കുമ്പോൾ ഇതിന്റെ ശേഷം നെല്ലിന്നൊക്കയ്ക്കും[7] ഇങ്ങനെത്തൊരു[8] അരിയോടുള്ള മാനസംബന്ധനിയമമുണ്ട് എന്നിരിക്കേണം. ആകയാൽ പന്തിരുനാഴിനെല്ലിന്ന് എത്ര അരിയുണ്ടെന്ന് അറിയേണ്ടുമ്പോൾ ഇത്രൈരാശികമാകുന്ന ക്രിയ ഉപയോഗിക്കുന്നു. ഇവിടെ[9] പന്തിരുനാഴി നെല്ലിന്റെ അരി അറിയേണ്ടുന്നേടത്തയ്ക്ക് അറിഞ്ഞ നെല്ല് അഞ്ചിനു 'പ്രമാണം' എന്നു പേര്. അരി രണ്ടിന്നു 'പ്രമാണഫല'മെന്നും, പന്ത്രണ്ടു നെല്ലിന്ന് 'ഇച്ഛ'യെന്നും, പന്ത്രണ്ടിന്റെ അരി അറിവാനിരിക്കുന്നതിന്ന് 'ഇച്ഛാഫല'മെന്നും പേര്.

അവിടെ അഞ്ചിന്ന് ഇത്ര എന്നു അറിഞ്ഞതിനെക്കൊണ്ടു തന്നെ ഒന്നിന് ഇത്ര[10] എന്നു നടേ അറിഞ്ഞുകൊണ്ടാൽ ഇച്ഛാവ്യക്തികൾ ഓരോന്നിന്

---

1. 1. B. അഥ
2.F. ഒരു അവയവമെങ്കിൽ രണ്ടവയവിക്കു രണ്ടു അവയവമുണ്ടായിരിപ്പൂ
3.F. അപ്പോൾ അവയവാന്തരം ഇത്ര പരിമാണ
4.D. അതിൽ (......to......) നിയതമായിട്ടിരിപ്പൂ
5.F. അറിഞ്ഞും
6.B. C. D. F. പരിമാണമറിവൂ. എന്നാൽ ഏകദേശന്താരത്തിന്റെ പരിമാണത്തെ
7.F. നെല്ലുകൾക്കും
8.F. അങ്ങനെത്തൊന്ന്
9.F. അവിടെ
10.F. എത്ര

അത്രയത്ര[11] ഉണ്ടാകും ഫലം എന്നറിവാനെളുപ്പമുണ്ട്. ഇതിന്റെ പ്രകാരം[12]. അവിടെ പ്രമാണവ്യക്തികൾ അഞ്ചിന്നു ഫലവ്യക്തികൾ രണ്ട്, എന്നേടത്ത് ആ രണ്ടിനെ അഞ്ചേടത്തു പകുത്താൽ ഒരു കൂറു പ്രമാണവ്യക്തി ഒന്നിന്റെ ഫലമായിട്ടിരിക്കുമത്[13]. ഇതിനെ ഇച്ഛാരാശിയെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ ഇച്ഛാവ്യക്തികൾ എല്ലാറ്റിന്റേയും ഫലയോഗമുണ്ടാകും. അവിടെ രണ്ടിനെ അഞ്ചേടത്തു പകുക്കുകയാകുന്നത് അഞ്ചിൽ ഹരിക്ക; അഞ്ചിൽ ഒരു കൂറ് ഹരിച്ച ഫലമാകുന്നത്. അവിടെ ഹരിച്ചാൽ മുടിയായുമ്പോൾ രണ്ടിന്ന് അഞ്ചു ഛേദമായിട്ടിരിക്കും. ആകയാൽ ഒന്നിന് അഞ്ചിൽ ഇറങ്ങിയ രണ്ടും ഫലമാകുന്നത് എന്നും വരും. ഇവ്വണ്ണമാകുമ്പോൾ പ്രമാണം പ്രമാണഫലത്തിനു ഛേദമായിട്ടിരിക്കും. ഇതു ഗുണ്യമാകുന്നത്. ഇച്ഛാരാശി ഗുണകാരമാകുന്നത്. ഇവ്വണ്ണമാകുമ്പോൾ പ്രമാണഫലത്തെ ഇച്ഛയെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ചു അപ്ഫലത്തിനു ഛേദമായിട്ടിരിക്കുന്ന[14] പ്രമാണരാശിയെക്കൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ. ഫലമിച്ഛാഫലമായിട്ടു വരും. ഇവിടെ[15] അഞ്ചേടത്തു പകുത്തിട്ട് ഒരു കൂറ് എന്നും അഞ്ചിൽ ഹരിച്ച ഫലമെന്നും ഒന്നുതന്നെ. യാതൊരു പ്രകാരം ഘാതക്ഷേത്രത്തെ ഒരു വക വരിയിലെ ഖണ്ഡസംഖ്യയെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ മറ്റെ പരിഷയിലെ ഒരു വരിയിലെ ഖണ്ഡസംഖ്യയുണ്ടാകും ഫലമായിട്ട്, അത്രേടത്തു പകുത്താലും ഒരു വരി ഒരു കൂറായിട്ടിരിക്കും എന്നവണ്ണം. ഇങ്ങനത്തൊന്നു ത്രൈരാശികമാകുന്ന[16] ഗണിതം.

ഇവിടെ നെല്ല് 'അവയവി' ആകുന്നത്. ഉമിയും അരിയും തവിടും അവയവങ്ങളാകുന്നത്. അവിടെ മൂന്ന് ഉമിക്കു രണ്ടു അരി എന്നാകിലുമാം വ്യാപ്തിഗ്രഹണം. അഞ്ചു നെല്ലിന്നു മൂന്ന് ഉമി എന്നാകിലുമാം. ഇങ്ങനെ ഉപാധിവശാൽ പ്രമാണഫലങ്ങൾ അതതായിട്ടു കല്പിക്കാം. ഒരിടത്തു ജിജ്ഞാസാവശാൽ രണ്ടു അരിക്ക് അഞ്ചു നെല്ല്, ഇത്ര അരിക്കു എത്ര നെല്ല് എന്നും വരും പ്രമാണേച്ഛാഫലഭേദങ്ങൾ. ഇങ്ങനെ ഒരു വക ത്രൈരാശികം.

---

1. 11. F. adds സംഖ്യ
12. D. ഇതിൻ പ്രകാരം; F. ഇതിൻ പ്രകാരം ചൊല്ലാം
13. F. om. അത്
14. D. F. ഛേദമായിരിക്കുന്ന
15. F. അവിടെ
16. B. ത്രൈരാശികമാകുന്നത്

2. വ്യസ്തത്രൈരാശികം

പിന്നെ വ്യസ്തത്രൈരാശികവിഷയം. അവിടെ എട്ടു മാറ്റില്‍ ഈ വിലയ്ക്ക് ഇത്ര പണത്തൂക്കം പൊന്നു വേണം, അപ്പോള്‍ പത്തു മാറ്റില്‍ എത്ര പണത്തൂക്കം എന്ന ത്രൈരാശികത്തിങ്കല്‍ പ്രമാണത്തേക്കാള്‍ എത്രയേറും ഇച്ഛാരാശി പ്രമാണഫലത്തേക്കാള്‍ അത്രയേറും ഇച്ഛാഫലം എന്നല്ലോ ഇരിപ്പൂ, അത്ര കുറയുമെന്ന്. ഇങ്ങനെ ഇരിക്കുന്നേടത്തു വ്യസ്തത്രൈരാശികം വേണ്ടുവത്. അതാകുന്നത് പ്രമാണവും പ്രമാണഫലവും തങ്ങളില്‍[1] ഘാതത്തിങ്കന്ന് ഇച്ഛാരാശിയെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ചത് ഇവിടെ[2] ഇച്ഛാഫലമാകുന്നത് എന്നു വിശേഷം. "വ്യസ്തത്രൈരാശികഫലമിച്ഛാഭക്തഃ പ്രമാണഫലഘാതഃ" എന്നുണ്ട്. ഇങ്ങനെ ത്രൈരാശികത്തിന്റെ ദിങ്മാത്രം.

പിന്നെ[3] ഇത്ത്രൈരാശികന്യായവും ഭുജാകോടികര്‍ണ്ണന്യായവും[4] ഇവ രണ്ടിനെക്കൊണ്ടും വ്യാപ്തം ഗണിതക്രിയ മിക്കതും. ഇവറ്റിന്ന് അംഗമായിട്ടു സംകലിതാദി പരികര്‍മ്മങ്ങള്‍ ഇരിപ്പൂ. ഇങ്ങനെ ഗണിതന്യായങ്ങള്‍ മിക്കതും ചൊല്ലീതായി.

**[ഗണിതയുക്തിഭാഷയില്‍
ത്രൈരാശികമെന്ന
നാലാമദ്ധ്യായം സമാപ്തം]**

---

2. 1. F. തങ്ങളിലെ
2. F. അവിടേയ്ക്ക്
3. B. om. പിന്നെ (.......to.....) ചൊല്ലീതായി
4. F. om. ഭുജാകോടികര്‍ണ്ണന്യായവും

അദ്ധ്യായം അഞ്ച്

കുട്ടാകാരം

1. അഹർഗ്ഗണാനയനം

അനന്തരം അഹർഗ്ഗണം വരുത്തുക തുടങ്ങിയുള്ള ഗണിതത്തെ ഈ ന്യായാതിദേശപ്രകാരത്തെക്കൊണ്ടു ചൊല്ലുന്നൂ. അവിടെ[1] കല്യാദ്യഹർഗ്ഗണത്തെ രണ്ടു ത്രൈരാശികം കൊണ്ടറിയുന്നൂ. ഇതിങ്കൽ കല്യാദ്യതീതസംവത്സരത്തെ 'സൌരം' കൊണ്ട് അറിയുന്നൂ, സംവത്സരത്തിങ്കൽ സൌരം പ്രസിദ്ധമാകുന്നത്, എന്നിട്ട്. പിന്നെ വർത്തമാനസംവത്സരത്തിങ്കൽ കഴിഞ്ഞ മാസങ്ങളെ 'ചാന്ദ്രം' കൊണ്ട് അറിയും. പിന്നെ വർത്തമാനമാസത്തിൽ കഴിഞ്ഞ ദിവസങ്ങളെ 'സാവനം' കൊണ്ടു അറിഞ്ഞിരിക്കുന്നൂ, പ്രസിദ്ധിവശാൽ. പിന്നെ[2] ഇവറ്റെക്കൊണ്ടു കല്യാദ്യതീതസാവനദിവസങ്ങളെ[3] അറിയേണ്ടുന്നൂ. ഇവിടെ[4] പിന്നെ ചതുർയ്യുഗത്തിങ്കലെ ഭഗണഭൂദിനങ്ങളല്ലോ പഠിച്ചത്[5]. അവറ്റെക്കൊണ്ടു കല്യാദിയിങ്കന്നു തുടങ്ങി കഴിഞ്ഞതിനെ വരുത്തുന്നൂ. അവിടെ യുഗത്തിങ്കൽ 'സൌരചാന്ദ്രഭഗണാന്തരം' 'ചാന്ദ്രമാസ'മാകുന്നത്.

അതിങ്കന്നു യുഗസൌരഭഗണത്തെ പന്ത്രണ്ടിൽ ഗുണിച്ചുണ്ടായ 'യുഗസൌരമാസ'ത്തെ കളഞ്ഞ ശേഷം 'യുഗാധിമാസം'. പിന്നെ യുഗസൌരമാസത്തിന്ന് ഇത്ര 'അധിമാസം', കല്യാദ്യതീതസൌരമാസത്തിന്ന് എത്ര അധിമാസം എന്ന ത്രൈരാശികത്തെക്കൊണ്ട് അതീതാധിമാസത്തെ ഉണ്ടാക്കി അതീതസൌരമാസത്തിൽ കൂട്ടിയത് അതീതചാന്ദ്രമാസമായിട്ടിരിക്കും. ഇതിൽ പിന്നെ വർത്തമാനവർഷത്തിലെ ചൈത്രാദികളെ കൂട്ടി മുപ്പതിൽ ഗുണിച്ച് വർത്തമാനമാസത്തിലെ അതീതദിവസത്തേയും

---

1. 1. B. om. അവിടെ; C. adds അവിടെ നടേ
2. B. om. പ്രസിദ്ധിവശാൽ പിന്നെ
3. C. ദിനങ്ങളെ; F. സാവനങ്ങളെ
4. B. om. ഇവിടെ പിന്നെ
5. F. ഹരിച്ചത്

കൂട്ടിയത് 'കല്യാദ്യതീതതിഥികൾ'. പിന്നെ യുഗതിഥിയും യുഗസാവനവും[6] തങ്ങളിലുള്ള അന്തരം 'യുഗാവമം'. പിന്നെ യുഗതിഥിക്ക് ഇത്ര അവമം, അതീതതിഥിക്ക് എത്ര അവമം എന്ന ത്രൈരാശികത്തെക്കൊണ്ട് ഉണ്ടായ അവമത്തെ അതീതതിഥിയിങ്കന്നു കളഞ്ഞത് 'കല്യാദ്യതീതസാവന'ദിവസം.

2. ഗ്രഹമദ്ധ്യമാനയനം

അനന്തരം[1] കല്യാദ്യതീതമദ്ധ്യമാനയനം. അവിടെ യുഗസാവനത്തിന് ഇത്ര ഭഗണം, അതീതസാവനത്തിന് എത്ര ഭഗണം എന്നു തികഞ്ഞ ഭഗണങ്ങൾ ഉളവാകും. പിന്നെ ശേഷത്തിങ്കന്ന് ഭഗണാവയവമായിരിക്കുന്ന രാശ്യംശലിപ്താദിയെ[2] പന്ത്രണ്ട്, മുപ്പത്, അറുപത് എന്നവറ്റെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ചുണ്ടാക്കൂ. അവ മദ്ധ്യമങ്ങളാകുന്നവ. ഇങ്ങനെ ഒരു പ്രകാരം. പിന്നെ മാസാധിമാസാവമഭഗണങ്ങളിൽവച്ച് കല്യാദ്യതീതങ്ങളിൽ യാതൊന്നിനെ ഇച്ഛാരാശിയായിട്ടു കല്പിക്കുന്നൂ, യുഗസംബന്ധികളായിരിക്കുന്ന തജ്ജാതീയത്തെ പ്രമാണമാക്കി[3] പിന്നെ യുഗസംബന്ധികളിലിഷ്ടത്തെ പ്രമാണഫലമാക്കൂ. പിന്നെ ത്രൈരാശികം കൊണ്ടുണ്ടായ ഇച്ഛാഫലം പ്രമാണഫലത്തോടു സമാനജാതീയമായിട്ടിരിക്കും. ഇങ്ങനെ ഗ്രഹമദ്ധ്യമാനയനം.

3. ഗ്രഹാനയനത്തിൽ കുട്ടാകാരം

അനന്തരം ഇച്ചൊല്ലിയവ യുഗസംബന്ധികൾ ഗുണഹാരങ്ങൾ എന്നിരിക്കുമ്പോൾ ക്രിയ പെരുത് എന്നിട്ട്. ക്രിയയുടെ ചുരുക്കത്തിന്നായിക്കൊണ്ട് ഗുണഹാരങ്ങളെ ചുരുക്കുവാനായിക്കൊണ്ട് അപവർത്തനക്രിയയേയും, പ്രസംഗാൽ കുട്ടാകാരത്തേയും ചൊല്ലുന്നൂ.

3.i. ഭഗണശേഷാദിശേഷങ്ങൾ

അവിടെ ഇച്ഛാഫലത്തെ പ്രമാണംകൊണ്ട് ഗുണിച്ചതും പ്രമാണഫലത്തെ ഇച്ഛകൊണ്ടു ഗുണിച്ചതും തുല്യസംഖ്യമായിട്ടിരിക്കും. ആകയാൽ ഈ

---

1. 6. F. യുഗസംവത്സരം
2. 1. B. അഥ
   2. C. D. F. ലിപ്തകാദിയെ
   3. D. പ്രമാണഫലവും ആക്കുക

ഘാതത്തിങ്കന്ന് ഇച്ഛകൊണ്ടു ഹരിച്ചതു പ്രമാണഫലമായിട്ടുവരും. പ്രമാണത്തെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ചത് ഇച്ഛാഫലമായിട്ടുവരും. പ്രമാണഫലത്തെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ചത് ഇച്ഛാ. ഇച്ഛാഫലത്തെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ചതു പ്രമാണം. ഈവണ്ണമാകുമ്പോൾ ഇച്ഛാഫലത്തെ നടേ അറിഞ്ഞിരിക്കുമ്പോൾ അതിനെ പ്രമാണത്തെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ച് പ്രമാണഫലത്തെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ചത്[1] ഇച്ഛാരാശിയായിട്ടു വരും, ഹരിച്ചാൽ ശേഷം മുടിയുന്നേടത്ത് മുടിയാത്തേടത്തു പോരാത്ത സംഖ്യേ കൂട്ടീട്ട്, ഏറുകിൽ കളഞ്ഞിട്ടു ഹരിച്ചാൽ ഇച്ഛാരാശിയായിട്ടു വരും. ഇച്ഛാഫലം പൂർണ്ണരൂപമായിരിക്കുന്നതിനെക്കൊണ്ടു[2] പ്രമാണരാശിയെ ഗുണിച്ചൂ എങ്കിൽ ശേഷത്തെ കൂട്ടുകതാൻ കളകതാൻ വേണ്ടിയിരിക്കും. പ്രമാണഫലത്തെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ചിട്ട് ഇച്ഛേ വരുത്തുന്നേടത്തേയ്ക്ക് ഇച്ഛാഫലാവയവത്തെക്കൊണ്ടുകൂടി ഗുണിക്കിൽ[3] ശേഷമുണ്ടായിരിക്കയില്ല[4]. അവിടെ ഇഷ്ടാഹർഗ്ഗണത്തിങ്കന്ന് ഇച്ഛാഫലമായിട്ട്[5] അതീതഭഗണങ്ങൾ ഉണ്ടായാൽ ഹരിച്ചശേഷത്തിങ്കന്നു ഭഗണാവയവമായിട്ട് അതീതരാശ്യാദികൾ ഉണ്ടാകുന്നു. ഭഗണം പൂർണ്ണരൂപമുണ്ടായാറെ യാതൊന്നു ഹരിപ്പാൻ പോരാതെ ഹാര്യത്തിങ്കൽ ശേഷിച്ചത് അതിനെ "ഭഗണശേഷ"മെന്നു ചൊല്ലുന്നൂ. അവിടെ ഭഗണത്തിന്നു നടേത്തെ അവയവമാകുന്നതു രാശി. അതു പന്ത്രണ്ടുകൂടിയത് ഒരു 'ഭഗണം'. ആകയാൽ രാശിക്കു ഛേദമാകുന്നത് പന്ത്രണ്ട് ആകയാൽ ഭഗണത്തെ പന്ത്രണ്ടിൽ ഗുണിച്ച് മുമ്പിലെ പ്രമാണം തന്നെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ അതീതഭഗണാവയവമായിട്ടു രാശിയുണ്ടാം. അവിടേയും[6] ശേഷമുണ്ട് ഹാര്യത്തിങ്കൽ എങ്കിൽ അതിന്നു 'രാശിശേഷ'മെന്നു പേർ. അതിങ്കന്നു രാശ്യവയവം ഭാഗം; മുപ്പതുകൊണ്ടു ഗുണിച്ച് പ്രമാണം കൊണ്ടു ഹരിച്ചതു ഭാഗം. ശേഷം 'ഭാഗശേഷം'. അതിങ്കന്ന് അറുപതിൽ ഗുണിച്ച് മുമ്പിലെ ഹാരകം തന്നെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ചതു 'കല'. അവിടെ ശേഷിച്ചതു 'കലാശേഷം'.

ഈവണ്ണമാകുമ്പോൾ കലാശേഷത്തിങ്കന്നു വിപരീതക്രിയകൊണ്ട് ഇഷ്ടാഹർഗ്ഗണം വരും. അത് എവണ്ണമെന്ന്. അവിടെ ഹാരകത്തെക്കൊണ്ട്

---

3. 1. F. ഹരിച്ച ഫലം
2. F. രൂപങ്ങളായിട്ടിരിക്കുന്നതിനെ
3. F. കൂട്ടി ഗുണിച്ചതി
4. B. ശേഷമുണ്ടായിട്ട്
5. F. ഫലരൂപം പൂർണ്ണമായിട്ട്
6. F. ഉണ്ടാകും. ഇവിടേയും

ഈ കലേ ഗുണിച്ച് കലാശേഷത്തെ കൂട്ടി അറുപതിൽ ഹരിച്ച ഫലം ഭാഗശേഷമായിട്ടു വരും. പിന്നെ ഹാരകത്തെക്കൊണ്ടുതന്നെ[7] ഗുണിച്ചിരിക്കുന്ന ഭാഗത്തിൽ ഭാഗശേഷത്തെ കൂട്ടി മുപ്പതിൽ ഹരിച്ച ഫലം രാശിശേഷം. അതിനെ രാശിയെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ചിരിക്കുന്ന ഹാരകത്തിൽ കൂട്ടി പന്ത്രണ്ടിൽ ഹരിച്ചതു ഭഗണശേഷം. അതിനെ അതീതഭഗണം കൊണ്ടു ഗുണിച്ചിരിക്കുന്ന ഹാരകത്തിങ്കൽ[8] കൂട്ടി യുഗഭഗണത്തെക്കൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ. ഫലം 'അതീതാഹർഗ്ഗണം'.

3.ii. കുട്ടാകാരം

ഇവിടെ ഗുണഗുണ്യഘാതമായിട്ടിരിക്കുന്ന ഹാർയ്യത്തെ ഭാജ്യമെന്നു ചൊല്ലുവാൻ യോഗ്യമായിട്ടിരിക്കുന്നേടത്ത് കുട്ടാകാരത്തിങ്കൽ പ്രമാണഫലങ്ങൾക്കു 'ഭാജ്യ'മെന്നു പേർ ചൊല്ലുന്നൂ. അവിടെ ഭഗണാദി ശേഷത്തിൽ രാശ്യാഭിഛേദങ്ങൾ പന്ത്രണ്ടും, മുപ്പതും, അറുപതും ക്രമേണ ഭാജ്യങ്ങളാകുന്നത്[9].

പ്രമാണമൊന്നുതന്നെ എല്ലാടവും ഭാജകമാകുന്നത്. മുമ്പിലെ മുമ്പിലെ ശേഷം ഇച്ഛാരാശിയായിരിക്കുന്നത്[10] അവിടെ അവിടെയ്ക്ക് സാദ്ധ്യമാകുന്നത്. അസ്സാദ്ധ്യത്തിന്നു 'ഗുണകാര'മെന്നു കുട്ടാകാരത്തിങ്കൽ പേർ. പ്രമാണഫലത്തെക്കൊണ്ട് ഇച്ഛാരാശിയെ ഗുണിച്ച് പ്രമാണം കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ഹാര്യത്തിങ്കൽ ശേഷിച്ചത് എത്ര സംഖ്യ അതിനെ അറിയൂ[11], ഒന്നു തികയാൻ പോരാത്തത് ഇത്ര സംഖ്യയെന്നു താൻ. ഇത് ഒരു രാശിയാകുന്നത്. പിന്നെ പ്രമാണവും പ്രമാണഫലവും ഇവ മൂന്നിനെ അറിഞ്ഞിരിക്കും വിഷയത്തിങ്കൽ[12] ഇച്ഛാരാശിയെ അറിവാനായിക്കൊണ്ടുള്ള ഗണിതത്തിന് 'കുട്ടാകാര'മെന്ന് പേർ ആകുന്നു.

3.iii. ആദിത്യഭഗണശേഷം

അവിടെ ആദിത്യന്റെ[13] അപവർത്തിതഭഗണം 'തത്സമൻ'(576) എന്ന്. അതിന്റെ ദ്യുഗണം ധീജഗന്നൂപുരം (2103897). ഇതു പ്രമാണം. തത്സമൻ പ്രമാണഫലം. 'അവാന്തരയുഗം', 'യുഗഭഗണ'മെന്നുമുണ്ട് ഇവറ്റിന്നു പേർ.

---

3. 7. C. D. F. om. തന്നെ
8. D. F. ഹാരകത്തിൽ
9. B. കുന്നു
10. C. ആയിട്ടിരിക്കുന്നത്
11. C. അറിയുന്നത്
12. C. D. അറിഞ്ഞിരിക്കുമ്പോൾ
13. B. സൂര്യന്റെ

'ദൃഢഭാജ്യ ഭാജകങ്ങൾ' എന്നുമുണ്ട് പേർ. ഇവറ്റെക്കൊണ്ടുള്ള ഭഗണശേഷത്തിങ്കലെ കുട്ടാകാരത്തെ ഇവിടെ നടേ കാട്ടുന്നൂ.

അവിടെ അവാന്തരയുഗം മുടിയുന്ന ദിവസം ഉദയത്തിന്ന് മീനാന്ത്യത്തിങ്കൽ അകപ്പെട്ടിരിക്കും ആദിത്യമദ്ധ്യമം. ആകയാലന്ന് ഭഗണശേഷമില്ല. പിന്നെ[14] അതിങ്കൽ നിന്നു ചെന്ന ദിവസത്തെ തൽസമനെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ച് ധീജഗന്നൂപുരത്തെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ച് മദ്ധ്യമം വരുത്തുന്നു. ആകയാൽ അവാന്തരയുഗാദിയിങ്കന്ന് ഒരു ദിവസം ചെല്ലുമ്പോൾ 'തത്സമ'തുല്യം ഭഗണശേഷം. രണ്ടു ദിവസം ചെല്ലുമ്പോൾ അതിലിരട്ടി. ഇങ്ങനെ ദിവസംപ്രതി ഓരോ ഓരോ 'തത്സമൻ' ഏറി ഏറി ഇരിക്കും ഭഗണശേഷത്തിങ്കൽ. ഭഗണത്തിങ്കൽ ഇത് അധികശേഷമായിട്ടിരുന്നൊന്ന്. പിന്നെ 'മാതുല'(365)നോളം ദിവസം ചെല്ലുമ്പോൾ മാതുലനും തത്സമനും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതിങ്കന്നു 'ധീജഗന്നൂപുര'ത്തിന്ന് പോരാത്തതു 'ധീവന്ദ്യഃ', (149) എന്നാകയാൽ അന്ന് ഊനശേഷമാകുന്നത് അത്. ആകയാൽ[15] അടുത്തു പിറ്റേ ദിവസം ഈ ഘാതത്തിൽ ഒരു തത്സമൻ കൂട്ടേണ്ടുകയാൽ[16] അതിൽ 'ധീവന്ദ്യ'നെക്കൊണ്ടു ഭഗണം തികഞ്ഞ്, ധീവന്ദ്യൻ പോയ തത്സമശേഷം ദ്വിതീയസംവത്സരാദ്യദിവസത്തിങ്കലെ അധികശേഷം 'സുരഭി' (427) എന്ന്. പിന്നെ ഇതിൽ ഓരോ തത്സമൻ കൂട്ടി കൂട്ടി ഇരിക്കുന്നത് ദ്വിതീയസംവത്സരത്തിൽ ദിവസംപ്രതിയുള്ള ഭഗണശേഷം. പിന്നെ മൂന്നാം സംവത്സരാദിയിങ്കലെ ദിവസത്തിൽ ധീവന്ദ്യനെ രണ്ടിൽ ഗുണിച്ചത് തത്സമനിൽ നിന്നു കളഞ്ഞശേഷം ഭഗണമാകുന്നത് 'ദാസീ സ്ത്രീ'(278) എന്ന്. പിന്നെ അത് ആദിയായി ദിവസംപ്രതി തത്സമൻ ഏറി ഇരിക്കുന്നത് മൂന്നാം സംവത്സരത്തിൽ ഭഗണശേഷം. ഇങ്ങനെ സംവത്സരാദ്യദിവസത്തിലെ ഭഗണശേഷത്തിന്നു പ്രതിസംവത്സരം ഭേദമുണ്ട്. പിന്നെ ദിവസംപ്രതിയുള്ള വൃദ്ധിക്കു സാമ്യമുണ്ട്. ആകയാൽ ഒരു ദിവസത്തെ ശേഷത്തോടു തുല്യമായിട്ട് മറ്റൊരു ദിവസം ആ യുഗത്തിൽ ഉണ്ടാകയില്ല. ആകയാൽ ധീജഗന്നൂപുരത്തിൽ കുറഞ്ഞതിൽ യാതൊരു സംഖ്യേക്കൊണ്ടു തത്സമനെ ഗുണിച്ചാൽ ധീജഗന്നൂപുരം കൊണ്ടു ഹരിക്കുമ്പോൾ ഇത്ര പോരാതെയിരിക്കും ഇത്ര അധികമായിട്ടിരിക്കും എന്നു

3. 14. D. അതുപിന്നെ
15 C. അത് ഊനമാകയാൽ
16. B. കൂട്ടേണ്ടൂ ആകയാൽ

താൻ അഗ്ഗുണകാരസംഖ്യ എന്ന ചോദ്യം ഉപപന്നമത്രെ. ഇങ്ങനെ ഇരിക്കുന്നേടത്ത് ഗുണകാരസംഖ്യയെ അറിവാനായിക്കൊണ്ടുള്ള ഗണിതത്തിനു 'കുട്ടാകാര'മെന്നു പേരാകുന്നു.

3.iv. ഉദ്ദേശ്യകം

അവിടെ ഏതാനുമൊരു സംഖ്യാവിശേഷത്തെ ഉദ്ദേശിച്ച് ഓർക്കുമ്പോൾ എളുപ്പമുള്ളു. എന്നിട്ട് ഈവണ്ണം നിരൂപിപ്പൂ. അവിടെ തത്സമൻ ഭാജ്യം, ധീജഗന്നൂപുരം ഭാജകം, ഊനാംശമായിരിക്കുന്ന ഭഗണശേഷം നൂറ്, ഇങ്ങനെ ഇരിക്കുന്നേടത്ത് യാതൊരു ദിവസംകൊണ്ട് തൽസമനെ ഗുണിച്ചാൽ ഋണക്ഷേപമായിരിക്കുന്ന ഈ ഭഗണശേഷം വരൂ എന്ന് ഊഹിക്കേ വേണ്ടൂ[17] എന്നുവച്ചാൽ 'മുനിഗാഥ' (7305) എന്നതിനെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ വരും എന്ന് അറിഞ്ഞുകൊള്ളാം എങ്കിൽ അവ്വണ്ണം കല്പിക്കേ വേണ്ടൂ. ഫലം പിന്നെ ത്രൈരാശികം കൊണ്ടും അറിയാം. അവിടെ തത്സമനും യാതൊരു സംഖ്യയും തങ്ങളിലുള്ള ഘാതത്തേക്കാൾ ധീജഗന്നൂപുരവും യാതൊരു സംഖ്യയും തങ്ങളിലുള്ള ഘാതം നൂറു സംഖ്യകൊണ്ടു അധികമായിട്ടിരിക്കും, ഇങ്ങനെ ഇരിക്കുന്ന ഗുണകാരസംഖ്യകൾ രണ്ടും, മുനിഗാഥ, 20[18] എന്നതിവിടെ വസ്തുവാകുന്നത്. അവിടെ തൽസമനെ മുനിഗാഥ എന്നതിനെക്കൊണ്ടു[19] ഗുണിച്ചതിനേക്കാൾ ധീജഗന്നൂപുരത്തെ ഇരുപതിൽ ഗുണിച്ചതു നൂറുസംഖ്യ[20] കൊണ്ടു അധികം, എന്നീ ഗുണകാരങ്ങളെ ഭാജ്യഭാജകങ്ങൾ ഇത്ര വലുതായിട്ടിരിക്കുമ്പോൾ ഊഹിച്ച് അറിഞ്ഞുകൂടാ. എന്നാൽ ഭാജ്യഭാജകങ്ങളെ ചെറുതാക്കിക്കൊണ്ടിട്ടു ഊഹിച്ചുകൊള്ളൂ. എന്നാലെളുപ്പമുണ്ട്.

ചെറുതാക്കുംപ്രകാരം പിന്നെ. അവിടെ ദിവസംപ്രതി തത്സമസംഖ്യ ഭഗണത്തിന്നു[21] വൃദ്ധിയാകുന്നു. ആകയാൽ തത്സമനെ ധീജഗന്നൂപുരത്തിങ്കൽ[22] വാങ്ങി വാങ്ങി ഇരിപ്പൂ. അവിടെ മാതുലസംഖ്യയോളമാവൃത്തി വാങ്ങിയാൽ പിന്നെ ധീവന്ദ്യ എന്നു ശേഷിക്കും. എന്നിട്ടു മാതുലദിവസത്തിന്ന് തത്സമനേക്കാൾ കുറയും ശേഷം. അതു ഋണക്ഷേപം താനും. പിന്നെ ധീവന്ദ്യനേക്കാളും ശേഷം കുറയൂ[23]

3. 17. D. F. ഊഹിപ്പാൻ and om. എന്നു വച്ചാൽ
18. B. C. D. F. മുനിഗാഥ 20
19. C. F. മുനിഗാഥയെക്കൊണ്ടു
20. B. om. സംഖ്യ
21. F. ഭഗണത്തിനുശേഷത്തിനു
22. F. ന്നൂപുരത്തിങ്കന്ന്
23. C. കുറയുമെന്ന്

എന്നു നിരൂപിക്കുന്നത്. പിന്നെ മാതുലന്റെ പിറ്റെ ദിവസം ധീവന്ദ്യൻ പോയ തത്സമൻ ഭഗണശേഷമാകുന്നത്. അതു ധീവന്ദ്യനേക്കാളേറും. പിന്നെ ദിവസംപ്രതി ഏറുമത്രെ. പിന്നെ 'നാഗസ്ഥാന' (730) മെന്ന ദിവസത്തിന്നു ധീവന്ദ്യനിലിരട്ടി പോരാതെയിരിക്കും. പിന്നെ 'കാലസ്ഥാന'മെന്ന (731) ദിവസം ധീവന്ദ്യനെ രണ്ടാവൃത്തി തൽസമങ്കൽ നിന്നു വാങ്ങിയ ശേഷം അധികശേഷമായിട്ടിരിക്കും. പിന്നെ 'ശുദ്ധനയഃ' (1095) എന്ന ദിവസം ധീവന്ദ്യൻ മുമ്മടങ്ങു ഊനശേഷം. പിന്നെ 'സ്തബ്ധനയ'(1096) എന്ന ദിവസം ത്രിഗുണധീവന്ദ്യനെ തത്സമങ്കന്നു കളഞ്ഞ ശേഷം 'ധീപ്രിയ' (129) എന്ന അധികശേഷമായിട്ടിരിക്കും[24]. പിന്നെ ധീപ്രിയ എന്നതിങ്കേന്നു കുറയൂ എന്ന്. സ്തബ്ധനയ എന്നതിന്നു ധീപ്രിയ അധികശേഷം, മാതുലന്നു ധീവന്ദ്യനെന്ന ഊനശേഷം, ആകയാലിവറ്റിന്റെ യോഗം 'കാർത്തവീര്യ' (1461) എന്ന ദിവസം 'ധീപ്രിയ' (129) എന്നും, ധീവന്ദ്യ എന്നും, ഇവ രണ്ടിന്റേയുമന്തരം ഇരുപത് ഊനശേഷമായിട്ടിരിക്കും. പിന്നെ[25] ഭഗണശേഷം ഇരുപതിൽ കുറയൂ എന്ന്. പിന്നെ കാർത്തവീര്യനെ ആറിൽ ഗുണിച്ച ദിവസം ഇരുപതിനെ ആറിൽ ഗുണിച്ചത് ഊനശേഷമായിട്ടിരിക്കും. സ്തബ്ധനയഃ എന്ന ദിവസം ധീപ്രിയ എന്ന് അധികശേഷം. ഇദ്ദിവസങ്ങളുടെ യോഗം 'പ്രീതിദുഗ്ദ്ധേ' (9862) എന്നദിവസം. ആറിൽ ഗുണിച്ചിരിക്കുന്ന ഇരുപതും 'ധീപ്രിയ' (129) എന്നുമുള്ള അന്തരം ഒമ്പത് അധികശേഷമായിട്ടിരിക്കും. ഇങ്ങനെ അധികശേഷദിനവും ഊനശേഷദിനവും തങ്ങളിലെ യോഗത്തിന്ന് ശേഷാന്തരം ശേഷമായിട്ടിരിക്കും. പിന്നെ ദിവസങ്ങൾ രണ്ടിനേയും ഗുണിച്ചു കൂട്ടൂ. ശേഷങ്ങൾ രണ്ടിനേയും അതതു ദിവസഗുണകാരംകൊണ്ടു ഗുണിച്ച് അന്തരിപ്പൂതും ചെയ്യൂ. എന്നാലായന്തരം യോഗദിവസത്തിന്നു ശേഷമായിട്ടിരിക്കും. അവിടെ[26] ഭാജകത്തിൽ ശേഷിക്കിൽ ഊനശേഷം, ഭാജ്യത്തിൽ ശേഷിക്കിൽ അധികശേഷം എന്നു നിയതം.

ആകയാൽ ധീവന്ദ്യനേയും ധീപ്രിയനേയും അയ്യഞ്ചിൽ ഗുണിച്ച് അന്തരിച്ചാൽ ധീവന്ദ്യങ്കൽ നൂറു ഏറിയിരിക്കും. പിന്നെ മാതുലനേയും സ്തബ്ധനയനേയും അയ്യഞ്ചിൽ ഗുണിച്ചുകൂട്ടിയ 'മുനിഗാഥ' എന്ന ദിവസത്തിന്നു നൂറു ഊനശേഷമായിട്ടിരിക്കും. പിന്നെ ഇരുപതിനെ പതിനാലിലും ഒമ്പതിനെ ഇരുപതിലും ഗുണിപ്പൂ. തങ്ങളിലന്തരം നൂറ്. പിന്നെ

3. 24. C. മായിരിക്കും
25. B. F. om. പിന്നെ; C. D. അനന്തരം
26. F. adds ആ

പ്രീതിദുഗ്ദ്ധ എന്നതിനെ ഇരുപതിലും കാർത്തവീര്യനെ പതിന്നാലിലും ഗുണിച്ച് തങ്ങളിൽ കൂട്ടൂ. പിന്നെ അതിങ്കന്നു ധീജഗന്നൂപുരം പോയശേഷം മുനിഗാഥ എന്നതിന്ന് ഊനശേഷം നൂറ് എന്നു ചൊല്ലിയെല്ലോ. ആകയാൽ ശേഷമെത്ര ചെറുതായാൽ ഗുണകാരത്തെ ഊഹിക്കാവൂ അത്ര ചെറുതായിട്ട് ഊഹിച്ചുകൊള്ളൂ ഗുണകാരങ്ങളെ. എന്നാൽ എല്ലാടവും ഫലസാമ്യമുണ്ട്. എന്നിട്ടു ഗുണകാരമെളുതായിട്ടു വരും പ്രകാരമുണ്ടു ലീലാവതിയിങ്കൽ ചൊല്ലീട്ട്:

4. കുട്ടാകാരപ്രക്രിയ

'ഭാജ്യോ ഹാരഃ ക്ഷേപകശ്ചാപവർത്ത്യഃ
കേനാപ്യാദൌ സംഭവേ കുട്ടകാർത്ഥം ।
യേന ഛിന്നൌ ഭാജ്യഹാരൌ ന തേന
ക്ഷേപശ്ചൈതദ് ദുഷ്ടമുദ്ദിഷ്ടമേവ ॥
പരസ്പരം ഭാജിതയോര്യയോര്യ-
ച്ഛേഷംതയോസ്സ്യാദ[1]പവർത്തനം തത്[2] ।
സ്വേനാപവർത്തേന[3] വിഭാജിതൌ യൌ
തൌ ഭാജ്യഹാരൌ ദൃഢസംജ്ഞിതൌ സ്തഃ[4] ॥
മിഥോ ഭജേത്തൌ ദൃഢഭാജ്യഹാരൌ
യാവദ്വിഭക്തേ ഭവതീഹ രൂപം ।
ഫലാന്യധോഽധസ്തദധോ നിവേശ്യഃ
ക്ഷേപസ്തഥാന്തേ ഖമുപാന്തിമേന[5] ॥
സ്വോർദ്ധ്വേ ഹതേഽന്ത്യേന യുതേ തദന്ത്യം
ത്യജേന്മുഹുഃ സ്യാദിതി രാശിയുഗ്മം ।
ഊർദ്ധ്വോ വിഭാജ്യേന ദൃഢേന തഷ്ടഃ
ഫലം ഗുണഃ സ്യാദപരോ ഹരേണ ॥

4\. 1. F. സ്തയോ; സ്യാദ്
2. F. സഃ
3. F. തേനാ
4. F. സംജ്ഞകൌ സ്തഃ
5. B. om. this verse

ഏവം തദൈവാത്ര യദാ സമാസ്താ-

സ്സ്യുർല്ലബ്ധയശ്ചേദ്വിഷമാസ്തദാനീം ।

യഥാഗതൌ ലബ്ധിഗുണൌ വിശോദ്ധ്യൌ

സ്വതക്ഷണാച്ഛേഷമിതൌ തു തൌ സ്തഃ ॥

ഇതി. (ലീലാവതീ, 242-46)

ഇവിടെ[6] ചെറിയ രണ്ടു ഭാജ്യഭാജകങ്ങളെ ഉദ്ദേശിക്കുന്നൂ. നടേ അതിങ്കൽ ക്രിയ യോജിച്ചാൽ വേണ്ടുന്നേടത്ത് അതിദേശിച്ചു കൊള്ളാം പിന്നെ. എന്നിട്ട്

[7]ഉദാഹരണം-

ഏകവിംശതിയുതം ശതദ്വയം

യദ്ഗുണം ഗണക പഞ്ചഷഷ്ടിയുക് ।

പഞ്ചവർജ്ജിതശതദ്വയോദ്ധൃതം

ശുദ്ധിമേതി ഗുണകം വദാശു മേ ॥

(ലീലാവതീ, 247)

ഇതിൻ പൊരുൾ: ഇരുന്നൂറ്റിഇരുപത്തൊന്നിനെ യാതൊന്നു കൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ അറുപത്തഞ്ചു കൂട്ടി നൂറ്റിതൊണ്ണൂറ്റഞ്ചുകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ശേഷിയാതെ ഇരിപ്പൂ ആ ഗുണകാരമെത്ര എന്നു[8] ചോദ്യം. ഇത്[9] കുട്ടാകാരത്തിന്നു വിഷയമാകുന്നത്.

4.i. അപവർത്തനപ്രകാരം

അനന്തരം അപവർത്തനപ്രകാരം[10]. ഭാജ്യമാകുന്ന ഇരുനൂറ്റി ഇരുപത്തൊന്നിനെ ഭാജകമാകുന്ന നൂറ്റിതൊണ്ണൂറ്റഞ്ചുകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ

4. 6. B. om. (ഇവിടെ...............ഉദാഹരണം)
7. B. om. the verses
8. B. F. എത്ര സംഖ്യ എന്ന
9. B. om. (ഇതു...........അനന്തരം)
10. F. ആ പ്രകാരം

ശേഷം ഇരുപത്തിയാറ്. പിന്നെ[11] അതിനെക്കൊണ്ട്[12] നൂറ്റിതൊണ്ണൂറ്റഞ്ചിനെ[13] ഹരിച്ചാൽ ശേഷം പതിമൂന്ന്. അതിനെക്കൊണ്ട് ഇരുപത്താറിനെ ഹരിച്ചാൽ ശേഷമൊട്ടുമില്ലായ്കയാൽ പതിമൂന്നിന്റെ ആവൃത്തി ഇരുപത്താറ്. അതു ഹേതുവായിട്ടുതന്നെ ഇരുപത്താറിനെക്കൊണ്ട് ഹരിച്ചുപോയ ഭാഗവും പതിമൂന്നിന്റെ ആവൃത്തി തന്നെയാകയാൽ ഈ ഭാഗവും പതിമൂന്നും കൂടിയതിനെക്കൊണ്ട് നടേ ഭാജ്യത്തിങ്കന്നു കളഞ്ഞതും പതിമൂന്നിന്റെ ആവൃത്തിതന്നെ. ഈ ന്യായംകൊണ്ടു തന്നെ ഇതിങ്കന്നു മുമ്പിലും അന്യോന്യം ഹരിച്ചതാകിൽ[14] ഒടുക്കത്തെ ശേഷിച്ചതിന്റെ ആവൃത്തി തന്നെയായിട്ടിരിക്കും[15] പോയ ഭാഗങ്ങളൊക്ക. എന്നാൽ പരസ്പരം ഹരിച്ചു ശേഷിച്ചതിനെക്കൊണ്ട് നടേത്തെ ഭാജ്യഭാജകങ്ങളെ ഹരിച്ചാൽ ശേഷിയാതെ മുടിയും. അങ്ങനെ ഹരിച്ചിരിക്കുന്ന ഫലങ്ങൾക്കു 'ദൃഢഭാജ്യഭാജകങ്ങൾ' എന്നു പേർ. എന്നാലിവിടെ ദൃഢഭാജ്യം പതിനേഴ്, ദൃഢഭാജകം പതിനഞ്ച്. പിന്നെ ക്ഷേപം അറുപത്തിഅഞ്ചിനെ പതിമൂന്നിൽ ഹരിച്ചാൽ ഫലം അഞ്ച് ഇവിടയ്ക്കു ക്ഷേപമാകുന്നു[16]. ഇവിടെ ക്ഷേപത്തെ പതിമൂന്നിൽ ഹരിച്ചാൽ മുടിയാതെ ഇരിക്കയില്ല. അതിന്നു ഹേതു, ഭാജകത്തിങ്കന്ന17 അധികമാകുന്ന ഭാഗം ഭാജ്യത്തിങ്കൽ ഇരുപത്താറ് ഉള്ളൂ. അതിനെ ഗുണിച്ചതു ശേഷത്തിങ്കലെ വൃദ്ധിയാകുന്നത്. ആകയാലെ പതിമൂന്നിൽ ഹരിച്ചാൽ മുടിഞ്ഞിരിക്കുമത്രെ. അല്ലായ്കിൽ ഈ ഭാജ്യഭാജകങ്ങളിൽ സംഭവിക്കുന്ന ക്ഷേപമല്ല ഉദ്ദേശിച്ചത് എന്ന് അറിയേണം. ആകയാലെ ഉദ്ദേശമനുപപന്നം ഈവണ്ണമിരിക്കുന്നത് എന്നു കല്പിക്കേണം[18].

4.ii. വല്ലീ

അനന്തരമിവ്വണ്ണമപവർത്തിച്ച ദൃഢങ്ങളായിരിക്കുന്ന ഭാജ്യഭാജക ക്ഷേപങ്ങൾ പതിനേഴും പതിനഞ്ചും, അഞ്ചും,[19] ഇവറ്റെക്കൊണ്ടു ഭാജ്യത്തിന്റെ ഗുണകാരത്തെ ഉണ്ടാക്കുംപ്രകാരം. അവിടെ ഭാജ്യം പതിനേഴിനെ ഭാജകമായിരിക്കുന്ന പതിനഞ്ചുകൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലം ഒന്ന്,

4. 11. B. om. പിന്നെ
12. B. ഇതുകൊണ്ട്
13. B. കൊണ്ട് ഹരിച്ചുപോയഭാഗവും പതിമൂന്നിന്റെ ആവൃത്തിതന്നെ. ആകയാൽ
14. F. ഹരിപ്പൂതാകിൽ
15. F. ആയിട്ടുതന്നെയിരിക്കും
16. F. ആകുന്നത്
17. F. ഭാജ്യത്തിങ്കന്ന്
18. B. C. D. F. om. എന്നു കല്പിക്കേണം
19. B. ദൃഢഭാജ്യം, പതിനേഴ്, ദൃഢഭാജകം, പതിനഞ്ച്, ദൃഢക്ഷേപം അഞ്ച്. ഇവറ്റെക്കൊണ്ടു

ശേഷം രണ്ട്. പിന്നെ[20] ആ രണ്ടിനെക്കൊണ്ടു പതിനഞ്ചിനെ ഹരിപ്പൂ. ഫലം ഏഴ്, നടേത്തെ ഫലത്തിന്നു കീഴെ വെപ്പൂ; ശേഷം ഒന്ന്. ഭാജ്യഭാജകങ്ങളിൽ ഒരിടത്തു ശേഷമൊന്നാവോളം അന്യോന്യം ഹരിപ്പൂ. ഫലങ്ങളെ ക്രമേണ കീഴെ കീഴെ വെപ്പൂ. അപ്ഫലപരമ്പരയ്ക്കു 'വല്ലീ' എന്നു പേർ. അനന്തരം[21] ഈ വല്ലീഫലങ്ങൾ ഒന്നും, ഏഴും, ശേഷങ്ങൾ രണ്ടും ഒന്നും ഇവറ്റെ ക്രമേണ കീഴെ കീഴെ വെച്ചു വല്യാനയനന്യായവിപരീതക്രിയയെക്കൊണ്ട് ഭാജ്യഭാജകങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കും പ്രകാരത്തെ[22] കാട്ടുന്നു.

4.iii. വല്ല്യുപസംഹാരം

അവിടെ ഒടുക്കത്തെ ക്രിയ നടേ വേണ്ടുവത്. അതാകുന്നത് ഭാജ്യത്തിങ്കലെ ശേഷം രണ്ട്. അതുകൊണ്ടു[23] ഭാജകം പതിനഞ്ചിനെ ഹരിച്ചുണ്ടായ ഫലം ഏഴ്. എന്നിട്ട് അവിടുത്തെ ഹാരകമാകുന്ന രണ്ടിനെക്കൊണ്ടു തന്റെ ഫലമാകുന്ന ഏഴിനെ ഗുണിപ്പൂ. എന്നാൽ തന്റെ ഹാര്യ്യമുണ്ടായിവരും, ഹൃതശേഷമില്ലാത്തേടത്ത്. ഉള്ളേടത്തു പിന്നെ ശേഷത്തെ ഈ ഘാതത്തിൽ കൂട്ടിയാൽ ഹാര്യ്യമായിട്ടു വരും. ഇവിടെ രണ്ടും ഏഴും തങ്ങളിലുള്ള ഘാതം പതിനാലിൽ ശേഷിച്ച ഒന്നിനെ കൂട്ടിയാൽ രണ്ടിന്റെ ഹാര്യ്യമായിട്ടിരുന്ന പതിനഞ്ചു വരും. പിന്നെ ആ പതിനഞ്ചിന്റെ ഹാര്യ്യത്തെ വരുത്തുംപ്രകാരം. പതിനഞ്ചിനെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ചുണ്ടായ ഫലം ഒന്ന്. അതിനെ പതിനഞ്ചുകൊണ്ടു ഗുണിപ്പൂ. എന്നാൽ പതിനഞ്ചു തന്നെ. അതിൽ പിന്നെ അവിടെ ശേഷിച്ച ശേഷം രണ്ടിനേയും കൂട്ടിയുള്ള പതിനേഴ് ആ പതിനഞ്ചിന്റെ ഹാര്യ്യമാകുന്നത്. പിന്നെ മുമ്പിലും വല്ലീഫലങ്ങൾ ഉണ്ടായിട്ടിരിക്കുന്നതാകിൽ ഇപ്പതിനേഴിനെക്കൊണ്ട് തനിക്കടുത്ത മുമ്പിലെ ഫലത്തെ ഗുണിച്ചതിൽ പതിനഞ്ചിനെ കൂട്ടൂ. എന്നാൽ പതിനേഴിന്റെ ഹാര്യ്യം വരും. ഇപ്രകാരം എല്ലാടവും ഉപാന്ത്യത്തെക്കൊണ്ടു തനിക്കടുത്ത മുമ്പിലെ ഫലത്തെ ഗുണിപ്പൂ. അന്ത്യത്തെ കൂട്ടൂ.

പിന്നെ ആ അന്ത്യത്തെ കളഞ്ഞ് പിന്നെ ഉള്ളതിൽവച്ച് ഉപാന്ത്യത്തെക്കൊണ്ട് അതിന്നടുത്ത മുമ്പിലേതിനെ[24] ഗുണിച്ചതിൽ അന്ത്യത്തെ കളഞ്ഞ് കൂട്ടി ആയന്ത്യമായിട്ടുവെച്ചിരിക്കുന്നതിനെ കളവൂ. ഇങ്ങനെയാകുമ്പോൾ യാതൊരിക്കൽ രണ്ടു പംക്തിയെ[25] ഉള്ളൂ എന്നു

4. 20. B. adds അശ്ശേഷം
21. B. om. അനന്തരം
22. B. reads പ്രകാരം
23. C. അതിനെക്കൊണ്ടു
24 F. മുൻപിലത്തേതിനെ
25. F. പത്തിയെ

വരുന്നൂ, അപ്പോൾ ഉപാന്ത്യമില്ലായ്കയാൽ ക്രിയ ഒടുങ്ങി. പിന്നെ ആ രണ്ടു രാശികളിൽവെച്ചു മേലേതു ഭാജ്യമായിട്ടിരിക്കും, കീഴേതു ഭാജകവും. ഇങ്ങനെ ഭാജകത്തേക്കാൾ ഭാജ്യം വലുതായിട്ടിരിക്കുന്നേടത്ത്. ചെറുതായിട്ടിരിക്കുന്നേടത്തു പിന്നെ ഭാജ്യം കീഴേത്, ഭാജകം മേലേത് ആയിട്ടിരിക്കും. ഭാജ്യത്തിങ്കന്നുണ്ടായ ഫലത്തിന്റെ സ്ഥാനത്തു ഭാജ്യം വരും; ഭാജകത്തിങ്കന്നുണ്ടായ ഫലത്തിന്റെ സ്ഥാനത്തു ഭാജകവും എന്നു നിയമമാകുന്നത്[26]. ഈ ക്രിയയ്ക്കു 'വല്ല്യുപസംഹാര'മെന്ന് പേർ.

ഇതിന്നു വിപരീതക്രിയയിങ്കന്നു കുറഞ്ഞൊരു വിശേഷമുണ്ട് എന്നു തോന്നും. വല്ലീഫലങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കുന്നേടത്ത് ഹരണംതന്നേ ഉള്ളൂ. അതിന്റെ ഉപസംഹാരത്തിങ്കൽ ഗുണനം തന്നെ അല്ലാ ഉള്ളൂ; ഗുണിച്ചതിൽ[27] അവിടവിടുത്തെ[28] ഹൃതശേഷത്തെ കൂട്ടുക എന്നൊരു ക്രിയ കൂടെ ഉണ്ട്. എന്നിട്ടു കേവലം വിപരീതക്രിയയിങ്കന്നു കുറഞ്ഞൊരു വിശേഷമുണ്ടെന്നു തോന്നും. ഉപപത്തിയെ നിരുപിക്കുമ്പോൾ വിപരീതക്രിയ തന്നെ. നടേയും ശേഷത്തെ കളഞ്ഞിട്ട് അത്രെ ഇരിക്കുന്ന ഫലം കൊണ്ട് എന്നിട്ട്.

4.iv. ഗുണലബ്ധ്യാനയനം

അനന്തരം ഭാജ്യഭാജകങ്ങളെന്നു വേർപെട്ടിരിക്കുന്ന പ്രമാണഫലത്തേയും പ്രമാണത്തേയും വരുത്തിയ വല്ല്യുപസംഹാരന്യായം കൊണ്ടുതന്നെ ഇച്ഛാഫലത്തേയും ഇച്ഛയേയും വരുത്തും പ്രകാരത്തെ കാട്ടുന്നൂ. അവിടെ ദൃഢഭാജ്യഭാജകങ്ങളെ അന്യോന്യം ഹരിച്ച ഫലങ്ങളെ കീഴെ കീഴെ വെപ്പൂ. ഇങ്ങനെ ഭാജ്യഭാജകങ്ങളിൽ ഒരിടത്തു രൂപം മാത്രം ശേഷിപ്പോളം. പിന്നെ വല്ലീഫലങ്ങളുടെ കീഴെ അപവർത്തിതക്ഷേപത്തേയും വെപ്പൂ. അതിന്റെ കീഴെ ശൂന്യത്തേയും വെപ്പൂ. അവ്വണ്ണമാകുമ്പോൾ ഇവിടയ്ക്ക് ഒന്നും, ഏഴും, അഞ്ചും, ശൂന്യവും ഇങ്ങനെ ഇരിപ്പൂ വല്ലീ. പിന്നെ ഇതിനെക്കൊണ്ടും മുമ്പിലെപ്പോലെ ഉപസംഹാരം ചെവൂ. അവിടെ കളയുന്ന അന്ത്യത്തെ വേറെ ഒരിടത്തു ക്രമേണ വെച്ചിരിക്കിലുമാം. അപ്പോളവ കീഴന്നു തുടങ്ങീട്ടു ശൂന്യം, അഞ്ച്, മുപ്പത്തഞ്ച്, നാല്പത് എന്നിങ്ങനെ ഇരിക്കും. ഇവറ്റിൽവെച്ചു ശൂന്യവും മുപ്പത്തഞ്ചും ഗുണകാരം; അഞ്ചും നാല്പതും ഫലം. ഇവറ്റിന്നു ഹാരഭാജ്യങ്ങളാകുന്നവ ഒന്നും രണ്ടും പതിനഞ്ചും പതിനേഴും. അവിടെ ഒന്നും പതിനഞ്ചും ഹാരം, രണ്ടും പതിനേഴും ഭാജ്യം.

4. 26. B. വരും for നിയമമാകുന്നത്
27. C. D. അവിടെ അടുത്ത
28. F. adds നടേ

അവിടെ നടേ[29] ഭാജ്യശേഷം രണ്ടിനെ ശൂന്യത്തെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ചതു ശൂന്യം. അതിൽ ക്ഷേപം അഞ്ചു കൂട്ടി ഹാരശേഷം ഒന്നിനെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലം അഞ്ച്. പിന്നെ രണ്ടാമതു ഭാജ്യശേഷം രണ്ടിനെത്തന്നെ മുപ്പത്തഞ്ചിൽ ഗുണിച്ച് അഞ്ചുകൂട്ടി പതിനഞ്ചിൽ ഹരിപ്പൂ. ഫലം അഞ്ച്[30]. പിന്നെ മൂന്നാമത് പതിനേഴിനെ മുപ്പത്തിഅഞ്ചിൽ ഗുണിച്ച്[31] അഞ്ചുകൂട്ടി പതിനഞ്ചിൽ[32] ഹരിപ്പൂ. ഫലം നാല്പത്. ഇങ്ങനെ ഇരുപുറത്തെ ഗുണകാരങ്ങളെക്കുറിച്ചു നടുവിലേതു ഫലമാം. ഈവണ്ണമേ തന്റെ കീഴും മേലുമുള്ള ഫലങ്ങളെക്കുറിച്ചു നടുവിലിരിക്കുന്നതു താൻ ഗുണകരമാം. ഈവണ്ണം ഭാജ്യഹാരങ്ങളും തന്റെ തന്റെ ഇരുപുറത്തേതിനെക്കുറിച്ചും ഭാജ്യഹാരങ്ങളാം. പിന്നെ മുപ്പത്തഞ്ചിനെ പതിനഞ്ചിൽ ഹരിച്ച ശേഷം അഞ്ചു ഗുണകാര മാകിലുമാം[33]. നാല്പതിനെ പതിനേഴിൽ ഹരിച്ച ശേഷം ആറു ഫലമാകിലുമാം[34]. ഇതിന്നു 'തക്ഷണ'മെന്നു പേർ. ഇങ്ങനെ ഇഷ്ടക്ഷേപത്തിങ്കലെ ഗുണലബ്ധികൾ ഉണ്ടാക്കുംപ്രകാരം.

4.v. ആദ്യിമദ്ധ്യമത്തിന്റെ കുട്ടാകാരം

അനന്തരം വല്യുപസംഹാരന്യായത്തെ തത്സമനും ധീജഗന്നൂപുരവും ഭാജ്യഭാജകങ്ങളാകുമ്പോഴെയ്ക്കു കാട്ടുന്നൂ. അവിടെ അന്യോന്യഹരണശേഷങ്ങൾ ക്രമത്താലെ 'ധീവന്ദ്യഃ', 'ധീപ്രിയഃ', 'നാരീ'(20) 'ധിക്' (9) 'ശ്രീഃ' (2), 'കിം' (1) എന്നിവ. വല്ലീഫലങ്ങൾ പിന്നെ 'മാർത്താണ്ഡഃ'(365) 'ഗൌഃ' (3) 'കിം' (1), 'തൽ' (6), 'ശ്രീഃ' (2), 'വിൽ'(4) എന്നിവ. ഇവിടെ ഭാജ്യത്തിങ്കൽ രൂപം ശേഷിക്കയാൽ ക്ഷേപത്തെ ധനമായിട്ടു ഉദ്ദേശിച്ചൂതാകിലും ഋണമെന്നു കല്പിക്കുന്നൂ. എന്നിട്ടിവിടെ രൂപം ഋണക്ഷേപമെന്നു കല്പിച്ച് വല്ലീഫലങ്ങളുടെ കീഴെ ഒന്നിനെ വയ്പ്പൂ. അതിന്നു കീഴെ ശൂന്യത്തേയും. പിന്നെ വല്യുപസംഹാരഞ്ചൈത് ഉപസംഹൃതവല്ലീഫലങ്ങളെ ക്രമേണ കീഴേന്നു മേപ്പട്ടു വെപ്പൂ. അവറ്റിന്റെ സംഖ്യ –'നു'(0), 'കിം'(1), 'വിൽ'(4), 'ധീഃ'(9), 'ഹോമഃ'(58), 'സൂത'(67), 'ധീശത്രുഃ'(259), 'ഖ ഈഷവേധഃ' (94602) എന്നിങ്ങനെ.

---

4. 29. D. F. om. നടേ
30. D. F. അഞ്ചുതന്നെ
31. D. F. മുപ്പത്തിയഞ്ചുകൊണ്ടു തന്നെ പതിനേഴിനെ ഗുണിച്ച്
32. C. adds തന്നെ ഹരിപ്പൂ
33. B. F. അഞ്ചു ഗുണകാരകം
34. D. F. എന്നാകിലുമാം

അനന്തരം ധീവന്ദ്യനാദികളിൽ ഒടുക്കത്തെ ഭാജ്യശേഷം ഒന്ന്. അതിനെ ഋണക്ഷേപം ഒന്നിനെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ഋണക്ഷേപം കളഞ്ഞാൽ ശൂന്യമാകയാൽ ഫലം ശൂന്യം. ഇവ്വണ്ണമാകയാൽ ത്രൈരാശികത്തിങ്കൽ രണ്ടു ഹാരം, ഒന്നു ഭാജ്യം, ഒന്നു ഗുണകാരം, ഒന്നു ശൂന്യം ഫലം. രണ്ടാം ത്രൈരാശികത്തിങ്കൽ ഹാരം 'ശ്രീഃ' (2) എന്നു തന്നെ, ഭാജ്യം ഇതിന്റെ മേലെ 'ധീഃ'(9) എന്ന്. ഗുണം നടേത്തെ 'കിം' (1) എന്നു തന്നെ, ഫലം ഇതിന്റെ മേലെ 'വിൽ'(4) എന്ന് മൂന്നാമതിങ്കൽ മേലെ 'നരഃ' (20) എന്നു ഹാരം, ഭാജ്യം നടേത്തെ 'ധീഃ' (9) എന്നു തന്നെ ഗുണം മറ്റേതിന്റെ മേലെ 'ധീഃ' (9), ഫലം മുമ്പിലെ കീഴെ 'വിൽ' (4) തന്നെ. നാലാമതിങ്കൽ പിന്നെ ഹാരഭാജ്യഗുണലബ്ധികളാകുന്നവ ക്രമത്താലെ[35] 'നരഃ'(20), 'ധീപ്രിയഃ'(129), 'ധീഃ'(9), 'ഹോമഃ'(58) എന്നിവ. അഞ്ചാമതിങ്കൽ 'ധീവന്ദ്യഃ'(149), 'ധീപ്രിയഃ'(129), 'സതീ',(67) 'ഹോമഃ'(58). ആറാമതിങ്കൽ 'ധീവന്ദ്യഃ',(149) 'തത്സമഃ',(576) 'സതീ',(67) 'ധീശത്രുഃ',(259). ഏഴാമതിങ്കൽ 'ധീജഗന്നൂപുരം'(210389) ഹാരം, 'തൽസമൻ'(576) ഭാജ്യം, 'രത്നസ്തംഭാർദ്ധം'(94602) ഗുണം, 'ധർമ്മരാൾ'(259) ഫലം ഇങ്ങനെ ഈ ഭാജ്യഭാജകങ്ങൾക്കു രൂപം ഋണക്ഷേപമാകുമ്പോളെ ഗുണലബ്ധികളാകുന്നത്.

പിന്നെ ഈ ന്യായംകൊണ്ടു തന്നെ രൂപം ധനക്ഷേപമാകുമ്പോളെ ഗുണലബ്ധികളാകുന്നത്. ഋണക്ഷേപത്തിന്റെ ഗുണലബ്ധികളെ ഹാരഭാജ്യങ്ങളിൽ നിന്നു കളഞ്ഞ ശേഷങ്ങൾ 'സൂദോസൌ മായയാ' (115,787), 'സകുലഃ'(317) എന്നിവ. ഇങ്ങനെ ക്ഷേപത്തിന്റെ ധനർണ്ണത പകരുമ്പോളെ ഗുണകാരലബ്ധികൾ[36] വരും പ്രകാരം. പിന്നെ ഈ രൂപക്ഷേപത്തിന്റെ ഗുണലബ്ധികളെ ഇഷ്ടക്ഷേപം കൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ ഇഷ്ടക്ഷേപത്തിന്റെ ഗുണലബ്ധികളുളവാകും. ഇങ്ങനെ ചൊല്ലിയതായി കുട്ടാകാരം സംക്ഷേപിച്ചിട്ട്[37].

[ഗണിതയുക്തിഭാഷയിൽ കുട്ടാകാരമെന്ന അഞ്ചാമദ്ധ്യായം സമാപ്തം]

4.35. F. ക്രമേണ
36. D. ഗുണലബ്ധികൾ
37. B. ഇതി കുട്ടാകാരം

അദ്ധ്യായം ആറ്

പരിധിയും വ്യാസവും

1. ഭുജാകോടിവർഗ്ഗയോഗം: കർണ്ണവർഗ്ഗയോഗന്യായം

അനന്തരം ഒരു സമചതുരശ്രക്ഷേത്രത്തെ കോൽ, വിരൽ എന്നു തുടങ്ങി നീളത്തെ അളക്കുന്ന മാനങ്ങളാൽ ഒന്നു കൊണ്ടു എത്ര എന്നു കല്പിച്ച്[1] അതിന്റെ ഒരു ബാഹു വ്യാസമാകുമ്പോൾ വൃത്തമെത്ര മാനമെന്നറിയും പ്രകാരത്തെ ചൊല്ലുന്നൂ.

അവിടെ[2] ഭുജാവർഗ്ഗവും കോടിവർഗ്ഗവും കൂടിയാൽ കർണ്ണവർഗ്ഗമാകും എന്നതിനെ ചൊല്ലുന്നൂ. ഇവിടെ യാതൊന്നിന്റെ[3] വർഗ്ഗമാകുന്നൂ, അതു ബാഹുവാകുന്ന ഒരു സമചതുരശ്രക്ഷേത്രഫലം വർഗ്ഗമാകുന്നത്. പിന്നെ സമചതുരശ്രക്ഷേത്രത്തിങ്കൽ താൻ ദീർഘചതുരശ്രക്ഷേത്രത്തിങ്കൽ താൻ ഒരു കോണിങ്കന്നു[4] ക്ഷേത്രത്തിന്റെ നടുവേ[5] മറ്റെ കോണിങ്കൽ ചെല്ലുന്ന സൂത്രം 'കർണ്ണ'മാകുന്നത്. ഇവിടെ ഒരു ചതുരശ്രത്തിന്നു[6] രണ്ടു പാർശ്വവും കോടിതുല്യമായി നീണ്ടിട്ടിരിപ്പൂ[7], രണ്ടുതലയും ഭുജാതുല്യമായി ഇടം കുറഞ്ഞിരിപ്പൂ[8]. ഇങ്ങനെ ഇവിടെ കല്പിക്കൂന്നൂ. ഈ ക്ഷേത്രത്തിന്റെ[9] കർണ്ണമെത്ര എന്ന് അറിയുന്നത്.

ഇവിടെ കോടിതുല്യമായിട്ട് ഒരു സമചതുരശ്രമുണ്ടാക്കൂ, ഭുജാതുല്യമായിട്ടും. ഇങ്ങനെ രണ്ടു സമചതുരശ്രക്ഷേത്രങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കൂ.

---

1. 1. F. കല്പിച്ചാൽ
   2. B. C. D. F adds നടേ
   3. F. om. യാതൊന്നിന്റെ to വർഗ്ഗമാകുന്നത്
   4. C. D. F കോണിങ്കന്നു തുടങ്ങി
   5. B. om. നടുവേ
   6. F. adds സമ
   7. D. F. നീണ്ടിരിപ്പൂ
   8. C. F. ഇത്
   9. F. അക്ഷേത്രത്തിന്റെ

പിന്നെ ഭുജാചതുരശ്രം വടക്കേപുറത്ത്, കോടിചതുരശ്രം തെക്കേപുറത്ത്, രണ്ടിന്റേയും കിഴക്കെ പാർശ്വം ഒരു സൂത്രത്തിങ്കൽ വരുമാറു തങ്ങളിൽ ചേർപ്പൂ, ഭുജേടെ തെക്കെ പാർശ്വം കോടീടെ വടക്കെ പാർശ്വത്തോടു ചേരുമാറ്. ഈ പാർശ്വം ഭുജാപാർശ്വം കഴിഞ്ഞിട്ടും പടിഞ്ഞാറോട്ടു ഒട്ടു ശേഷിക്കും. ഭുജേടെ വടക്കു കിഴക്കെ കോണിങ്കന്നു തെക്കോട്ടു കോടിയോളം അളപ്പൂ. അവിടെ ഒരു ബിന്ദുവിടൂ. ഇവിടന്നു തെക്കേടം നീളം ഭുജയോളമുണ്ടായിരിക്കും. പിന്നെ[10] ബിന്ദുവിങ്കന്നു കോടീടെ തെക്കുപടിഞ്ഞാറെ കോണോളവും ഭുജേടെ വടക്കുപടിഞ്ഞാറെ കോണോളവുമുള്ള രേഖാമാർഗ്ഗേണ പെളിപ്പൂ. കോണിങ്കൽ രണ്ടിങ്കലും കുറഞ്ഞൊന്നു വേർവിടാതെ ഇരിപ്പൂ. പിന്നെ ബിന്ദുവിങ്കന്നു ചെറിയ രണ്ടു പെളിയും വേർപെടുത്തി ബിന്ദുവിങ്കൽ കൂടിയിരുന്ന രേഖാഗ്രങ്ങൾ രണ്ടും തങ്ങളിൽ കോടീടെ വടക്കുപടിഞ്ഞാറു സന്ധിക്കുമ്മാറു കണ്ട് വലിയ ചതുരശ്രത്തിന്റെ ഇരുപുറവും തിരിച്ചു[11]കൊണ്ടുപോയി ചേർപ്പൂ. എന്നാൽ മുറിവാ പുറവായിൽ വരുമാറുകണ്ടു യോജിക്കേണ്ടതും. എന്നാലത് ഒരു സമചതുരശ്രക്ഷേത്രമായിട്ടിരിക്കും. ഇതിന്റെ ബാഹുക്കൾ ഈ ഭുജാകോടികളുടെ കർണ്ണത്തോട് ഒക്കും താനും. എന്നാൽ ഈ[12] ഭുജാകോടികളുടെ വർഗ്ഗയോഗം കർണ്ണവർഗ്ഗം, കർണ്ണവർഗ്ഗത്തിൽ ഒന്നിന്റെ വർഗ്ഗം കളഞ്ഞാൽ ഭുജാകോടികളിൽ മറ്റേതിന്റെ വർഗ്ഗം എന്നു സ്ഥിതമായി ഇപ്പോൾ. ഇത് എല്ലാടവും അറിയേണ്ടുവൊന്ന്.

2. ചതുരശ്രത്തിൽ നിന്ന് അഷ്ടാശ്ര-ഷോഡശാശ്രാദിപരിധികൾ

അനന്തരം [1]ചതുരശ്രത്തെക്കൊണ്ട വൃത്തത്തെ ഉണ്ടാക്കും പ്രകാരം. ഇഷ്ടമാനമായിട്ട് ഒരു ചതുരശ്രത്തെ കല്പിപ്പൂ. ഇതിന്റെ ബാഹു വ്യാസമായിട്ടിരിപ്പോരു വൃത്തത്തിന്ന് എത്ര മാനമെന്ന് അറിയുന്നത്. ഈ കല്പിച്ച ചതുരശ്രത്തിന്ന് നടുവേ പൂർവ്വാപരരേഖയും ദക്ഷിണോത്തരരേഖയും ഉണ്ടാക്കൂ. എന്നാൽ[2] നാലു ചതുരശ്രമായിട്ടിരിക്കും.

---

2. 10. F. adds ആ
11. C. D. F ഇരു പുറമേയും തിരിച്ചു
12. C. F. ഈ
2. 1. B. C. F. add സമ
2. D. എന്നിവ

പിന്നെ വലിയ ചതുരശ്രത്തിന്റെ മദ്ധ്യത്തിങ്കന്നു കോണോളം ഒരു രേഖ ഉണ്ടാക്കൂ. അതു കർണ്ണമാകുന്നത്. ഈ കർണ്ണത്തെ അഗ്നികോണിൽ കല്പിച്ചിട്ടു[3] ചൊല്ലുന്നൂ. പിന്നെ ദക്ഷിണസൂത്രാഗ്രത്തിങ്കന്ന് പൂർവ്വസൂത്രാഗ്രത്തോട് ഒരു കർണ്ണം കല്പിപ്പൂ. ഇവിടെ ചതുരശ്രമദ്ധ്യം കേന്ദ്രമായിട്ട് ഇനി ഉണ്ടാകുന്ന[4] വൃത്തം ഉള്ളൂ. ഇവിടെ യാതൊരു ത്ര്യശ്രത്തിങ്കലും മൂന്നു ഭുജകളിലും വെച്ച് വലിയ ഭുജേടെ ഒരു പാർശ്വം മുഴുവൻ നിലത്തു തട്ടുമാറു കല്പിച്ച് അതിന്റെ ഇരുതലയ്ക്കന്നുമുള്ള ഭുജകളുടെ യോഗം നേരെ മേലാമ്മാറു കല്പിപ്പൂ. പിന്നെ ഈ[5] യോഗത്തിങ്കന്നു കനത്തൊരു വസ്തു കെട്ടിയ[6] സൂത്രം തൂക്കൂ[7]. ആ[8] സൂത്രത്തിന്നു 'ലംബ'മെന്നു പേർ. മേല്പോട്ടുള്ള ഭുജകൾക്ക് 'ഭുജകൾ' എന്നു പേർ. ഭൂമിസ്പൃഷ്ടമായിരിക്കുന്ന[9] ഭുജക്ക് 'ഭൂമി' എന്നു പേർ. ഭൂമിയിങ്കൽ യാതൊരിടത്തു ലംബം സ്പർശിക്കുന്നൂ അവിടന്ന് ഇരുപുറവുമുള്ള ഭൂഖണ്ഡത്തിന്ന് 'ആബാധകൾ' എന്നു പേർ.

ഇവിടെ പിന്നെ കേന്ദ്രത്തിങ്കന്നു കോണോളമുള്ള കർണ്ണം ഭൂമി എന്നു കല്പിക്കുന്നൂ. പൂർവ്വസൂത്രവും പൂർവ്വഭുജേടെ തെക്കേപ്പാതിയും ഭുജകളാകുന്നത്. പൂർവ്വസൂത്രാഗ്രത്തിങ്കന്നുള്ള കർണ്ണത്തിന്റെ അർദ്ധം ലംബമാകുന്നത്. ഇവ്വണ്ണം ദക്ഷിണസൂത്രവും തെക്കേ ഭുജേടെ കിഴക്കെപ്പാതിയും ഭുജകളായിട്ട് ഒരു ത്ര്യശ്രം. ഭൂമിയാകുന്നതു നടേത്തെ ഭൂമി തന്നെ[10]. ഇങ്ങനെ ഒരു ചതുരശ്രം കൊണ്ടു രണ്ടു ത്ര്യശ്രം.

ഇവിടെ കോണിങ്കൽ സ്പർശിക്കുന്ന ആബാധ യാതൊന്ന്[11] അതു പ്രമാണമാകുന്നത്. കോണിങ്കന്നു[12] ദിക്സൂത്രാഗ്രമുള്ള ഭുജാ പ്രമാണഫലമാകുന്നത്. ഭൂമിയിങ്കന്നു വ്യാസാർദ്ധം പോയ ശേഷം കോണിങ്കൽ ശേഷിച്ചത് ഇച്ഛാരാശിയാകുന്നത്. ഇവിടുന്ന് ഉണ്ടായ[13]

2. 3. B. കല്പിച്ചു; F. വെച്ചിട്ട്
4. F. om. ഇനി ഉണ്ടാകുന്ന
5. F. om. ഈ
6. F. കെട്ടിയൊരു
7. F. തൂക്കുന്നു
8. F. om. ആ
9. B. സ്പൃഷ്ടമായ
10. B. C. D. F om. ഭൂമിയാകുന്നതു നടേത്തെ
11. D. F. om. യാതൊന്ന്
12. F. om. കോണിങ്കന്നു to ഫലമാകുന്നത്
13. C. D. ഉണ്ടാകുന്ന; F. ഉണ്ടാക്കുന്നു

ഇച്ഛാഫലത്തെ കോണിങ്കന്ന് ഇരുപുറവും ഭുജയിങ്കന്ന് അളന്നു നീക്കി ബിന്ദുക്കൾ ഉണ്ടാക്കി അതിനു നേരെ കോൺ മുറിച്ചു കളയൂ[14]. എന്നാൽ അഷ്ടാശ്രമാകും. ഈ ഉണ്ടായ ഇച്ഛാഫലത്തെ ഇരട്ടിച്ച് ചതുരശ്രബാഹുവിങ്കന്നു കളയൂ. ശേഷം അഷ്ടാശ്രഭുജേടെ നീളം.

പിന്നെ കേന്ദ്രത്തിങ്കന്ന് അഷ്ടാശ്രഭുജാമദ്ധ്യത്തോളമുള്ള വ്യാസാർദ്ധത്തിന്റേയും അഷ്ടാശ്രഭുജാർദ്ധത്തിന്റേയും വർഗ്ഗയോഗമൂലം കേന്ദ്രത്തിങ്കന്നു തുടങ്ങി അഷ്ടാശ്രകോണോളമുള്ള കർണ്ണമായിട്ടുണ്ടാകും[15]. ഇതു ഭൂമിയായിട്ട് ആ ത്ര്യശ്രകോണിങ്കന്ന്[16] ഒരു ലംബം കല്പിപ്പൂ. അത്[17] അഷ്ടാശ്രഭുജാമദ്ധ്യത്തിങ്കന്നു കർണ്ണത്തിങ്കൽ പതിക്കുമാറ് ഇരിക്കും. ഈ ലംബം സ്പർശിക്കുന്നേടത്തുന്ന് ഇരുപുറവുമുള്ള കർണ്ണത്തിന്റെ ഖണ്ഡങ്ങൾ ആബാധകളാകുന്നത്. വ്യാസാർദ്ധവും അഷ്ടാശ്രഭുജാർദ്ധവും ഭുജകളാകുന്നത്. ഭുജകൾ തങ്ങളിലെ[18] വർഗ്ഗാന്തരവും ആബാധകളുടെ വർഗ്ഗാന്തരവും ഒന്നേ[19]. ലംബാബാധകളുടെ കർണ്ണം ഭുജകൾ, എന്നിട്ടു ലംബവർഗ്ഗം രണ്ടിങ്കലും തുല്യം. ആബാധകളുടെ വർഗ്ഗഭേദമത്രെ പിന്നെ ഭുജകളുടെ വർഗ്ഗാന്തരമാകുന്നത്[20]. എന്നാൽ ഭുജാവർഗ്ഗാന്തരത്തെ കർണ്ണം കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ആബാധാന്തരമുണ്ടാകും, കർണ്ണമാകുന്നത്[21] ആ ബാധായോഗം എന്നിട്ട്[22]. വർഗ്ഗാന്തരത്തെ യോഗം കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ അന്തരമുണ്ടാകും എന്നിട്ട്. പിന്നെ ആബാധാന്തരത്തെ കർണ്ണത്തിങ്കന്ന് കളഞ്ഞ്[23] അർദ്ധിച്ചാൽ ചെറിയ ആബാധ ഉണ്ടാകും . പിന്നെ ഈ ആബാധ പ്രമാണമാകുന്നത്. അഷ്ടാശ്രഭുജാർദ്ധം പ്രമാണഫലം, വ്യാസാർദ്ധത്തെ കർണ്ണത്തിങ്കന്നു[24] കളഞ്ഞശേഷം കർണ്ണാഗ്രം ഇച്ഛാരാശിയാകുന്നത്[25]. ഇതു ചെറിയ ആബാധൈകദേശം ആയിട്ടുണ്ടാകും[26]. ആ ആബാധയ്ക്കു

---

2. 14. F. കളവൂ
15. D. കർണ്ണമായിട്ടായിരിക്കും ഭുജാകർണ്ണം
16. F. അഷ്ടാശ്ര കോണിങ്കന്ന്
17. F. om. അത്
18. F. തങ്ങളുടെ
19. B. തുല്യം
20. C. ഭുജാവർഗ്ഗങ്ങളിലെ അന്തരമാകുന്നത്
21. B. കർണ്ണം; D. om. കർണ്ണമാകുന്നത്
22. B. C. om. എന്നിട്ട്
23. F. കളഞ്ഞശേഷം വർദ്ധിച്ചാൽ
24. F. കർണ്ണത്തിൽ
25. B. C. D. F. ഇച്ഛാരാശി
26. B. C. D. F om. ആയിട്ടുണ്ടാകും

കർണ്ണമാകുന്നത് അഷ്ടാശ്രഭുജാർദ്ധം, ഈ ഇച്ഛാഭാഗത്തിന്നു കർണ്ണമാകുന്നത് എന്ത് എന്ന ത്രൈരാശികം കൊണ്ട്[27] കോണിങ്കന്ന് അഷ്ടാശ്രഭുജേടെ ഏകദേശം ഉണ്ടാകും. ഇവിടെ ബിന്ദുക്കളുണ്ടാക്കി അഷ്ടാശ്രത്തിന്റെ കോൺ മുറിച്ചു കളവൂ[28]. എന്നാൽ ഷോഡശാശ്രമാകും. ഈ ഇച്ഛാഫലത്തെ ഇരട്ടിച്ച് അഷ്ടാശ്രബാഹുവിങ്കന്നു കളഞ്ഞ ശേഷം ഷോഡശാശ്രബാഹുവിന്റെ നീളം ആയിട്ടുവരും[29].

പിന്നെ ഈ ഷോഡശാശ്രബാഹു ഉണ്ടാക്കിയ ന്യായം കൊണ്ട് ദ്വാത്രിംശദശ്രബാഹു തുടങ്ങി ഇരട്ടിച്ച് ഇരട്ടിച്ച അശ്രങ്ങളുടെ ബാഹുമാനത്തെ ഉണ്ടാക്കിയാൽ കോണസംഖ്യയാവോളമേറിയാൽ വൃത്തപ്രായം. ഇതിനെ വൃത്തമെന്നു കല്പിപ്പൂ. ഈ വൃത്തത്തിന്നു മുമ്പിലെ ചതുരശ്രബാഹു വ്യാസമാകുന്നത്. പിന്നെ ഈ വൃത്തവ്യാസങ്ങളെക്കൊണ്ട് ഇഷ്ടത്തിങ്കൽ ത്രൈരാശികം ചെയ്തുണ്ടാക്കൂ[30] വ്യാസത്തെതാൻ വൃത്തത്തെതാൻ.

3. വർഗ്ഗമൂലക്രിയകൾ കൂടാതെ പരിധ്യാനയനം

3.i. പരിധിവിഭാഗം

അനന്തരം ഇഷ്ടമായിട്ട്[1] ഒരു വ്യാസത്തെ കല്പിച്ച്[2] അതിങ്കന്നു വർഗ്ഗമൂലക്രിയകൾ കൂടാതെ പരിധിയെ വരുത്തും പ്രകാരത്തെ ചൊല്ലുന്നൂ[3]. അവിടെ നടേ[4] നാലു ബാഹുക്കളേയും[5] ഇഷ്ടവ്യാസതുല്യമായിട്ടു കല്പിച്ച് ഇരിപ്പോരു സമചതുരശ്രക്ഷേത്രത്തെ കല്പിപ്പൂ[6]. അതിന്റെ അകത്ത് ഒരു വൃത്തത്തേയും കല്പിപ്പൂ[7]. വൃത്തനേമി നാലു ഭുജാമദ്ധ്യത്തിങ്കലും സ്പർശിക്കുമാറ് ഇരിക്കേണം. പിന്നെ വൃത്തമദ്ധ്യത്തൂടെ

2. 27. C. F. om. ത്രൈരാശികം കൊണ്ട്
28. D. കളയൂ
29. C. om. ആയിട്ടുവരും
30. D. adds വൃത്തത്തെ

3. 1. F. ഇഷ്ടമായി
2. F. കല്പിപ്പു
3. B. വരുത്തും പ്രകാരം
4. B. F. om. അവിടെ നടേ
5. B. ബാഹുക്കളുടെ; F. ഭുജകളേയും
6. F. കല്പിച്ചു
7. F. om. കല്പിപ്പു
8. B. പൂർവ്വാപരരേഖയും ദക്ഷിണോത്തരരേഖയും

പൂർവ്വാപരസൂത്രത്തേയും ദക്ഷിണോത്തരസൂത്രത്തേയും[8] വൃത്തനേമിയും ഭുജാമദ്ധ്യവും തങ്ങളിലുള്ള സംപാതത്തിങ്കൽ അഗ്രമാകുമാറു[9] കല്പിപ്പൂ. പിന്നെ പൂർവ്വസൂത്രാഗ്രത്തിങ്കന്നു ചതുരശ്രത്തിന്റെ അഗ്നികോണോടിട വ്യാസാർദ്ധതുല്യമായിട്ടിരിക്കും[10]. ഇവിടെ പെരികെ അടുക്കെ ഇടകൾ എല്ലാമൊക്കുമാറുകണ്ട്[11] ചില വിഭാഗത്തെ കല്പിച്ച് ചില ബിന്ദുക്കളെ ഉണ്ടാക്കൂ. എത്ര ഏറ സംഖ്യ[12] ഉണ്ടായി അത്ര സൂക്ഷ്മമാകും പരിധി.

പിന്നെ വൃത്തകേന്ദ്രത്തിങ്കന്നു തുടങ്ങി ആ ബിന്ദുക്കളിലഗ്രമാകുമാറ് അത്ര കർണ്ണരേഖകളേയും കല്പിപ്പൂ. അവിടെ പൂർവ്വസൂത്രം കോടിയാകുന്നത്. പൂർവ്വസൂത്രത്തോടു കർണ്ണാഗ്രത്തോടിടയിലേടം പൂർവ്വഭുജാഭാഗം ഭുജ ആകുന്നത്. അവിടെ പൂർവ്വസൂത്രത്തിന്നടുത്തു തെക്കെ കർണ്ണത്തിന്ന് ഒരു ഖണ്ഡം ഭുജയാകുന്നത്. രണ്ടാം കർണ്ണത്തിന്ന് രണ്ടു ഖണ്ഡം കൂടിയതു ഭുജയാകുന്നത്. ഇങ്ങനെ പിന്നെ പിന്നെ കർണ്ണത്തിന്ന് ഓരോരോ ഭുജാഖണ്ഡങ്ങളേറിയതു[13] ഭുജകളായിട്ടിരിക്കും. ഇങ്ങനെ ചതുരശ്രകോണിലെ കർണ്ണത്തിന്ന് എല്ലായിലും വലിയ ഭുജാ. പിന്നെ കോടി എല്ലാ കർണ്ണത്തിന്നും വ്യാസാർദ്ധമാകുന്ന പൂർവ്വസൂത്രം തന്നെ. ആകയാൽ വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗവും അതതു ഭുജാവർഗ്ഗവും കൂട്ടി മൂലിച്ചത് അതതു കർണ്ണമായിട്ടിരിക്കും.

അനന്തരം ദിക്സൂത്രാഗ്രത്തോട് അതിനടുത്തുള്ള ആദ്യകർണ്ണാഗ്രത്തോട് ഉള്ള ഇട ചതുരശ്രബാഹുവിങ്കലെ ഒരു ഖണ്ഡം യാതൊന്ന് അതിനെ ദിക്സൂത്രാഗ്രമാകുന്ന വ്യാസാർദ്ധംകൊണ്ടു ഗുണിച്ച് ആദ്യകർണ്ണം കൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലം[14] ദിക്സൂത്രാഗ്രത്തിങ്കന്ന് ആദ്യകർണ്ണത്തോടിട ആദ്യകർണ്ണവിപരീതമായിട്ടുണ്ടാകും[15]. ഈ രേഖ ഒരു കോടിയായിട്ടിരിക്കും. ഇക്കോടിയും ആദ്യകർണ്ണവുമുള്ള സംപാതത്തിങ്കന്ന് ആ കർണ്ണത്തിന്റെ അഗ്രം ഭുജയാകുന്നത്. ആദ്യകർണ്ണവും[16] ദിക്സുത്രാഗ്രവുമുള്ള ഇട ചതുരശ്രബാഹുവിങ്കലെ ഖണ്ഡം കർണ്ണമാകുന്നത്. ഇത് ഒരു ഇച്ഛാക്ഷേത്രം.

3. 9. F. അഗ്രമാക്കുമാറു
10. B. തുല്യമായിരിക്കും
11. F. സുമാറുകണ്ടു
12. B. ഈ സംഖ്യ
13. F. കൂടിയത്
14. F. ഹരിച്ചത്
15. F. ദിക്കായിട്ടുണ്ടാകും
16. F. ആദികർണ്ണാഗ്രവും
17. F. ആയിട്ടിരിക്കുന്ന

ഇതിന്നു തുല്യാകാരമായിരിക്കുന്ന[17] പ്രമാണക്ഷേത്രമാകുന്നതു പിന്നെ. വൃത്തകേന്ദ്രത്തിങ്കന്നു പൂർവ്വഭുജാമദ്ധ്യത്തോളമുള്ള ദിക്സൂത്രം കോടി. ആദ്യകർണ്ണരേഖ കർണ്ണം. കർണ്ണകോടികളുടെ അഗ്രാന്തരം ഭുജ. ഈ പ്രമാണക്ഷേത്രത്തോടു തുല്യാകാരമായിട്ടിരുന്നോര് ഇച്ഛാക്ഷേത്രം. ഇതിന്നു ഹേതു. പ്രമാണക്ഷേത്രഭുജയോടു തുല്യദിക് ഇച്ഛാക്ഷേത്രകർണ്ണം, ഇച്ഛാ ക്ഷേത്രഭുജയോടു തുല്യദിക്[18] പ്രമാണകർണ്ണം എന്ന് ആകിലുമാം. പിന്നെ പ്രമാണക്ഷേത്രകോടിയാകുന്ന ദിക്സൂത്രത്തിങ്കന്നു വിപരീതമായിട്ടി രുന്നൊന്ന് ഇച്ഛാക്ഷേത്രകർണ്ണമായിട്ടിരിക്കുന്ന ചതുരശ്രഭുജാഖണ്ഡം. ഇവിടെ ഇച്ഛാഫലമായിട്ടു വരുത്തിയ ഇച്ഛാകോടി പ്രമാണക്ഷേത്ര കർണ്ണത്തിന്നു വിപരീതദിക്കായിട്ടിരുന്നൊന്ന് എന്നാകിലുമാം[19]. രണ്ടു ക്ഷേത്രങ്ങളും തുല്യാകാരങ്ങൾ എന്മാൻ ഹേതുവാകുന്നത്[20]. ഇങ്ങനെ ഇവിടെ രണ്ടു ക്ഷേത്രങ്ങളിലും അന്യോന്യം ഭുജാകർണ്ണങ്ങൾക്കു ദിക്സാമ്യം, കോടികർണ്ണങ്ങൾക്കു ദിഗ്വൈപരീത്യം, എന്നിട്ട് ആകാരസാമ്യം ഉണ്ടാകുന്നൂ. അവിടെ മൂന്നിനും കൂടി ദിഗ്വൈപരീത്യം താൻ ദിക്സാമ്യം താൻ ഉണ്ട് എങ്കിലും[21] തുല്യാകാരങ്ങളായിട്ടിരിക്കും.

യാതൊരു പ്രകാരം സമചതുരശ്രമായിട്ടിരിക്കുന്ന മണ്ഡപത്തിന്റെ ചെരിഞ്ഞിരിക്കുന്ന കഴുക്കോൽ പ്രമാണക്ഷേത്രകർണ്ണമായിട്ടിരിക്കുന്നതിന്ന് വാമട[22] ഭുജയായിട്ടിരിക്കുന്നൂ, ഇതിന്നു തുല്യദിക്കായിട്ടിരിക്കും ഇച്ഛാക്ഷേത്രകർണ്ണമായിട്ടിരിക്കുന്ന വളത്തുള. ഇക്കർണ്ണത്തിന്റെ ഭുജയാകുന്നതു കഴുക്കോലൂടെ പാർശ്വത്തിങ്കലെ വളത്തുളേടെ ചെരിവ്, ഭുജാകർണ്ണങ്ങൾ ഇതരേതരതുല്യദിക്കുകളാകയാൽ കഴുക്കോൽ ചെരിവുകൊണ്ടു വളത്തുളേടെ ചരിവുണ്ടാകുന്നൂ. എന്നിങ്ങനെ എല്ലാം നിരൂപിക്കേണ്ടൂ. ആകയാൽ ത്രൈരാശികം കൊണ്ടു വരുത്താം ഇച്ചൊല്ലിയ ഇച്ഛാക്ഷേത്രത്തിങ്കലെ കോടിയെ.

അനന്തരം മൂന്നാമതുമുണ്ട് ഇവിടെ ഒരു ത്ര്യശ്രം. അതിന്നു ദിക്സൂത്രം കർണ്ണമാകുന്നത്. ദിക്സൂത്രത്തിങ്കന്ന് ആദ്യകർണ്ണത്തോടുള്ള അന്തരാളം

3. 18. B. C. F. വിപരീതദിക്കായിട്ടിരുന്നെന്ന്
19. F. എന്നിതുമാകിലുമാം
20. D. ഹേതു
21. B. ഉണ്ടാകിലും
22. F. om. വാമട to വളത്തള
23. C. D. E om. ഈ

ഇച്ചൊല്ലിയ ഇച്ഛാക്ഷേത്രകോടി ഇവിടക്കു ഭുജയാകുന്നത്. ഈ[23] ഭുജയും ആദ്യകർണ്ണവുമുള്ള യോഗത്തിങ്കന്ന് ആദ്യകർണ്ണത്തിന്റെ ഖണ്ഡം വൃത്തകേന്ദ്രത്തോളമുള്ളതു കോടി ആകുന്നത്. ഇങ്ങനെ ഇത്.

അനന്തരം രണ്ടാമതുമുണ്ട് ഒരു പ്രമാണക്ഷേത്രം. അതിന്നു ദിക്സൂത്രംതന്നെ കോടിയാകുന്നത്. കോട്യഗ്രത്തിങ്കന്നു ചതുരശ്ര ബാഹുവിങ്കലെ രണ്ടു ഖണ്ഡം കൂടിയതു ഭുജയാകുന്നത്. വൃത്തകേന്ദ്ര ത്തിങ്കന്നു തുടങ്ങിയുള്ള കർണ്ണത്തിൽ രണ്ടാമതു കർണ്ണമാകുന്നത്. ഇങ്ങനെത്തൊന്നു ദ്വിതീയപ്രമാണക്ഷേത്രമാകുന്നത്. പിന്നെ ഇതിന്റെ ഇച്ഛാക്ഷേത്രം. പ്രഥമകർണ്ണാഗ്രത്തിങ്കന്നു തുടങ്ങി ദ്വിതീയകർണ്ണത്തിന്ന് വിപ രീതമായി ദ്വിതീയകർണ്ണത്തെ സ്പർശിക്കുമാറുള്ള രേഖ കോടിയാകുന്നത്. ഈ കോടിസംപാതത്തിങ്കന്നു ദ്വിതീയകർണ്ണത്തിന്റെ അഗ്രം ഭുജാ. ചതുരശ്രബാഹുവിങ്കലെ രണ്ടാം ഖണ്ഡം കർണ്ണമാകുന്നത്. ഇങ്ങനെ രണ്ടാമിച്ഛാക്ഷേത്രം. യാതൊരുപ്രകാരം നടുവിങ്കന്നു രണ്ടാം കഴുക്കോൽ പ്രമാണക്ഷേത്രകർണ്ണമാകുമ്പോൾ കഴുക്കോൽപംക്തി രണ്ടു കൂടിയത് പ്രമാണഭുജയാകുന്നത്. ആകയാൽ നടേത്തെ കഴുക്കോലേക്കാൾ നീളമേറും രണ്ടാം കഴുക്കോൽ. അതിനു തക്കവണ്ണം അതിന്മേലെ[24] വളത്തുളയും നീളമേറും, അത് ഇവിടക്ക് ഇച്ഛാക്ഷേത്രകർണ്ണമായി പ്രമാണക്ഷേത്ര ഭുജയാകുന്ന വാമടയോടു തുല്യദിക്കായി ഇരുന്നൊന്ന്[24a] ഇങ്ങനെ കഴുക്കോൽചെരിവും അതാതുങ്കലെ വളത്തുളയുടെ ചെരിവും ഒരു പ്രകാരമെന്നതു യാതൊന്ന് അവ്വണ്ണമിരിപ്പൊന്ന് ഇവിടുത്തെ പ്രമാണേച്ഛാ ക്ഷേത്രങ്ങൾ. ഇവിടെ ദിക്സൂത്രാഗ്രത്തിങ്കൽ ചതുരശ്രബാഹുവിങ്കലെ രണ്ടാംഖണ്ഡത്തെ പ്രമാണക്ഷേത്രകോടിയായിരിക്കുന്ന[24b] വ്യാസാർദ്ധ ത്തെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ച് പ്രമാണമാകുന്ന ദ്വിതീയകർണ്ണത്തെക്കൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ. ഫലം ദ്വിതീയേച്ഛാക്ഷേത്രത്തിങ്കലെ കോടി. പിന്നെ ഈ കോടിയെ ഭുജയെന്നു കല്പിച്ച് ഇതിന്റെ സംപാതത്തിങ്കന്നു വൃത്തകേന്ദ്രത്തോളമുള്ള ദ്വിതീയകർണ്ണഖണ്ഡം കോടി, ആദ്യകർണ്ണമാകുന്നതു കർണ്ണമാകുന്നത്[25] എന്നും കല്പിപ്പൂ. ഇങ്ങനെ മൂന്നാമത് ഒരു ത്ര്യശ്രമുണ്ട് ഇവിടേയും.

ഇങ്ങനെ ദിക്സൂത്രാഗ്രത്തിങ്കന്നു തുടങ്ങി ചതുരശ്രബാഹുവിങ്കലെ

---

3. 24a. F. add ആയിട്ടിരിക്കും
24b. B. കോടിയായി നിൽക്കുന്ന
25. B. C. D. F ആദ്യകർണ്ണം കർണ്ണമാകുന്നത്

കോണോളമുള്ള ചതുരശ്രബാഹുഖണ്ഡങ്ങൾ ഓരോന്നിങ്കലെ മുമ്മൂന്നു ത്ര്യശ്രക്ഷേത്രങ്ങളുള്ളൂ. അവിടെ ദിക്സൂത്രാഗ്രത്തിങ്കന്നു തുടങ്ങി ചതുരശ്ര കോണോളമുള്ള ഭുജാഖണ്ഡങ്ങളെ ഓരോന്നിനെ ദിക്സൂത്രത്തെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ച് അതതുഖണ്ഡങ്ങളുടെ അഗ്രങ്ങളെ സ്പർശിക്കുന്നതിൽ വലിയ കർണ്ണങ്ങളെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ചുണ്ടാകുന്ന ഫലം ഇതിനടുത്തു മുമ്പിലെ കർണ്ണത്തിന്റെ അഗ്രത്തിങ്കന്നു തുടങ്ങി അതിനടുത്ത വലിയ കർണ്ണത്തിന്നു വിപരീതമായിട്ടിരിക്കുന്ന അന്തരാളങ്ങളായിട്ടിരിക്കും. ഇവ ഇച്ഛാക്ഷേത്ര കോടികൾ. ഇവ തന്നെ പിന്നെയ്ക്കു ഭുജകളായിട്ടിരിക്കും. ഈ ഭുജാസംപാതത്തിങ്കന്നു തുടങ്ങി വലിയ കർണ്ണത്തിന്റെ ഖണ്ഡം വൃത്തകേന്ദ്രത്തോളമുള്ളതു കോടി. പിന്നെ ഈ വൃത്തകേന്ദ്രത്തിങ്കന്നു തുടങ്ങി അതതു ഭുജാഖണ്ഡങ്ങളെ സ്പർശിക്കുന്ന കർണ്ണങ്ങൾ രണ്ടിൽ വെച്ചു ചെറിയത് ഇവിടക്കു കർണ്ണമാകുന്നത്. ഇങ്ങനെ ഇരിപ്പോ ചിലവ ത്ര്യശ്രങ്ങൾ. ഇവ പിന്നക്കു പ്രമാണക്ഷേത്രങ്ങളായിരിപ്പോ ചിലവ. ഇവിടയ്ക്ക് ഇച്ഛാക്ഷേത്രങ്ങളാകുന്നവ ഈ[26] പ്രമാണക്ഷേത്രങ്ങളെ തന്നെ, വൃത്തത്തിന്റെ അന്തർഭാഗത്തിങ്കൽ കല്പിക്കപ്പെട്ടിരിക്കുന്നവ. ഇവിടെ[27] ഈ പ്രമാണകർണ്ണത്തിന്റെ ഏകദേശമായിട്ടിരിക്കുന്ന വൃത്തവ്യാസാർദ്ധം ഇച്ഛയാകുന്നത്. ഈ വ്യാസാർദ്ധാഗ്രത്തിങ്കന്നു വലിയ കർണ്ണത്തിന്നു വിപരീതമായിട്ടുള്ള[28] അന്തരാളമിച്ഛാഫലം.

ഇങ്ങനെ അതതു[29] കർണ്ണാന്തരങ്ങളിലെ പരിധിഭാഗത്തിങ്കലെ അർദ്ധജ്യാക്കളായിട്ട് ഉളവാകും ഇച്ചൊല്ലിയ ഇച്ഛാഫലങ്ങൾ. എന്നാൽ ദിക്സൂത്രാഗ്രത്തിങ്കന്നു തുടങ്ങിയുള്ള ചതുരശ്രബാഹുഖണ്ഡങ്ങളതതിനെ വ്യാസാർദ്ധം കൊണ്ടു രണ്ടു വട്ടം ഗുണിച്ച് അതതു ഖണ്ഡത്തെ സംബന്ധിച്ചുള്ള കർണ്ണങ്ങൾ രണ്ടിന്റേയും ഘാതം കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ഫലം അതതു കർണ്ണാന്തരാളത്തിങ്കലെ പരിധ്യംശത്തിങ്കലെ അർദ്ധജ്യാവായിട്ടു വരും. ഇവിടെ ചതുരശ്രദോഃഖണ്ഡങ്ങൾ പെരികെ ചെറുത് എങ്കിൽ ഈ അർദ്ധജ്യാക്കൾ തന്നെ ചാപഖണ്ഡങ്ങളായിട്ടിരിക്കും പ്രായേണ.

3.ii. കർണ്ണങ്ങളും പരിധിയും

അവിടെ ചതുരശ്രഭുജയെ തുല്യമായിട്ടു ഖണ്ഡിക്കയാൽ ഗുണ്യങ്ങൾ

3. 26. B. om. ഈ; F. ഇവ
27. B. C. F അവിടെ
28. F. വിപരീതദിക്കായിട്ടുള്ള
29. F. ഇത്

തുല്യങ്ങൾ, വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗം ഒന്നുതന്നെ ഗുണകാരമാകുന്നതും. അതതു ഖണ്ഡത്തിന്ന് അടുത്തു[30] കീഴേയും മീതേയുമുള്ള കർണ്ണങ്ങളുടെ ഘാതം ഹാരകമാകയാൽ ഹാരകം നാനാരൂപം. ഇങ്ങനെ ഇരിക്കുന്നേടത്ത് ഈ കർണ്ണഘാതത്തെ രണ്ടു കർണ്ണങ്ങളുടേയും വർഗ്ഗയോഗാർദ്ധമെന്ന് കല്പിക്കണം, മിക്കവാറും തങ്ങളിൽ[31] സംഖ്യാസാമ്യമുണ്ട്, എന്നിട്ട്. ഈവണ്ണമാകുമ്പോളതതു ഹാര്യത്തെ രണ്ടു കർണ്ണവർഗ്ഗങ്ങളെക്കൊണ്ടും വെവ്വേറെ ഹരിച്ചുണ്ടായ ഫലങ്ങളെ[32] രണ്ടിനേയും കൂട്ടി അർദ്ധിച്ചുകൊള്ളൂ. ഇതിനോടു തുല്യമായിട്ടിരിക്കും വർഗ്ഗയോഗാർദ്ധം കൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലം.

അവിടെ പൂർവ്വസൂത്രാഗ്രത്തിങ്കന്നു തുടങ്ങി ദോഃഖണ്ഡങ്ങളുടെ വടക്കെ അഗ്രത്തെ സ്പർശിക്കുന്ന കർണ്ണങ്ങളുടെ വർഗ്ഗങ്ങളെക്കൊണ്ടു നടേ[33] ഹരിക്കുമാറു നിരൂപിപ്പൂ. അവിടെ നടേത്തേതാകുന്നത് 'ദിക്സൂത്രം', ഇതിന്റെ വർഗ്ഗംകൊണ്ടു ഹരിക്കുമ്പോൾ ഗുണകാരവും ഇതുതന്നെ ആകയാൽ ദോഃഖണ്ഡം തന്നെ ഫലമാകുന്നത്. പിന്നെ ഒടുക്കത്തെ കർണ്ണം 'കോണസൂത്രം'. ഇതിന്റെ വർഗ്ഗം കൊണ്ടു ഹരിക്കുമ്പോൾ ദോഃഖണ്ഡാർദ്ധമായിരിക്കും ഫലം. വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗത്തെ ഇരട്ടിച്ചതെല്ലൊ ആന്ത്യകർണ്ണവർഗ്ഗമാകുന്നത്, എന്നിട്ട്. ഗുണകാരത്തിലിരട്ടി ഹാരകമാകുന്നേടത്തു ഗുണ്യത്തിലർദ്ധം ഫലം. ഇവിടെ എല്ലാ[34] ദോഃഖണ്ഡങ്ങളുടേയും ആദ്യദ്വിതീയാഗ്രങ്ങളെ സ്പർശിച്ചിട്ട് ഈ രണ്ടു കർണ്ണങ്ങളുള്ളൂ[35]. ഇവറ്റിന്റെ[36] ആദ്യകർണ്ണവർഗ്ഗങ്ങളെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ചുള്ള ഫലങ്ങളുടെ യോഗം യാതൊന്ന്, യാതൊന്ന് പിന്നെ ദ്വിതീയകർണ്ണവർഗ്ഗങ്ങളെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലങ്ങളുടെ യോഗം[37], ഇവ തങ്ങളുടെ[38] അന്തരമാകുന്നതു നടേത്തെ പരിഷയിലെ ആദ്യഫലവും രണ്ടാം പരിഷയിലെ ഒടുക്കത്തെ ഫലവും തങ്ങളിലെ അന്തരം. അവ[39] പിന്നെ

---

3. 30. F. അതാതു
31. B. തമ്മിൽ
32. F. ഫലങ്ങൾ
33. F. om. നടേ
34. F. എപ്പോൾ
35. C. കർണ്ണങ്ങളുളവാം
36. A. ഇവറ്റിൽ
37. B. യോഗവും
38. B. C. D. തങ്ങളിലെ
39. B. D. F. om. അവ (......to.......) അർദ്ധമായിട്ടിരിക്കും

ദോഃഖണ്ഡത്തിന്റെ അർദ്ധമായിട്ടിരിക്കും. ഇടയിലെ ഫലങ്ങൾ രണ്ടു വകയിലും ഹാരകങ്ങൾ[40] ഒന്നേ ആകയാൽ ഫലങ്ങളും ഒന്നേ ആയിട്ടിരിക്കും[41]. രണ്ടാമതു തുടങ്ങി ഉപാന്ത്യം ഒടുക്കമായിട്ടുള്ള ഫലങ്ങൾക്കു ഭേദമില്ല. അതു പിന്നെ ദോഃഖണ്ഡത്തിന്റെ അർദ്ധമായിട്ടിരിക്കും. അവിടെ ആദ്യഹാരകം[42] കൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലം[43] ദോഃഖണ്ഡം തന്നെ, അന്ത്യഹാരം കൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലം ദോഃഖണ്ഡാർദ്ധം. കർണ്ണവർഗ്ഗയോഗാർദ്ധംകൊണ്ടു ഹരിക്കുന്ന പക്ഷത്തിങ്കൽ അന്തരം ദോഃഖണ്ഡത്തിന്റെ നാലൊന്ന്. ദോഃഖണ്ഡം ചെറുതാകുമ്പോൾ ഈ ചതുരംശത്തെ ഉപേക്ഷിക്കാം. ആകയാൽ ഒരു കർണ്ണവർഗ്ഗത്തെ ഹാരകമായിട്ടു കൊള്ളണമെന്നേ ഉള്ളൂ.

3.iii. ശോദ്ധ്യഫലങ്ങൾ

അവിടെ[44] ദോഃഖണ്ഡത്തെ സംബന്ധിച്ചുള്ളതിൽ വലിയ കർണ്ണവർഗ്ഗത്തെ ഹാരകമായിട്ടു ഇവിടെ നിരൂപിക്കുന്നു. എന്നിട്ടു വ്യാസാർദ്ധ വർഗ്ഗത്തെക്കൊണ്ട് അതതു ദോഃഖണ്ഡത്തെ[45] ഗുണിച്ച് അതാതിന്റെ[46] വലിയ കർണ്ണത്തിന്റെ വർഗ്ഗം കൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ. ഫലങ്ങൾ അതതു കർണ്ണാന്തരാളത്തിങ്കലെ പരിധ്യംശത്തിങ്കലെ[47] അർദ്ധജ്യാക്കൾ. ഇവിടെ[48] ഗുണഹാരാന്തരംകൊണ്ട് അതതു ദോഃഖണ്ഡത്തെ ഗുണിച്ച് അതതു കർണ്ണവർഗ്ഗത്തെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലത്തെ അതതു ദോഃഖണ്ഡത്തിങ്കന്നു കളഞ്ഞശേഷം അതതു കർണ്ണാന്തരാളപരിധ്യംശജ്യാവായിട്ടുതന്നെ[49] ഇരിക്കും. അവിടെ ദിക്സൂത്രാഗ്രത്തിങ്കന്ന് അതത് ഇഷ്ടകർണ്ണാഗ്രത്തോടുള്ള അന്തരാളത്തിങ്കലെ ദോഃഖണ്ഡയോഗത്തിന്റെ വർഗ്ഗം ഗുണഹാരാന്തരമാകുന്നത്. വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗം ഗുണകാരമാകുന്നത്. അവിടെ ഗുണഹാരാന്തരംകൊണ്ടു ഗുണിച്ച് ഗുണകാരം കൊണ്ടു തന്നെ ഹരിക്കുന്നൂ എങ്കിൽ ഗുണകാരം ഹാരകത്തേക്കാൾ ചെറുതാകയാൽ ഫലം ഏറെയുണ്ടാകും. അവിടെ ഫലത്തെ രണ്ടേടത്തുവച്ച് ഒന്നിനെ

---

3. 40. C. D. ഹാരങ്ങൾ
41. C. D. F. om. ആയിട്ടിരിക്കും
42. B. C. D ആദ്യഹാരം
43. C. F. read ഫലം ആകയാൽ ഫലയോഗങ്ങളുടെ അന്തരം ദോഃഖണ്ഡാർദ്ധം കർണ്ണാ
44. F. ഇവിടെ
45. F. om. അതത് ദോഃഖണ്ഡത്തെ
46. A. F. അതിന്റെ
47. F. അംശത്തിന്റെ
48. F. അവിടെ
49. F. കർണ്ണാന്തരാളത്തിങ്കലെ പരിധ്യംശത്തിന്റെ അർദ്ധജ്യാക്കൾ

ഗുണഹാരാന്തരംകൊണ്ടു ഗുണിച്ച് ഹാരകം കൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലത്തെ മറ്റേതിങ്കന്നു[50] കളയേണം. അതു വാസ്തവമായിരിക്കുന്ന ഫലമാകുന്നത്. അവിടെ[51] ശോദ്ധ്യഫലമുണ്ടാക്കുന്നേടത്തും പിന്നെ ഗുണഹാരാന്തരം കൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ഗുണകാരം കൊണ്ടു തന്നെ ഹരിക്കുന്നൂ എങ്കിൽ[52] അപ്ഫലത്തിങ്കന്നും ഒട്ടുകളയേണം മുമ്പിലെപ്പോലെ ഉണ്ടാക്കീട്ട്, എന്നു വരും[53]. അവിടെ ആ രണ്ടാമതു ശോദ്ധ്യഫലമുണ്ടാക്കിയതിനേയും ഗുണഹാരാന്തരംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ഹാരകംകൊണ്ടു ഹരിച്ചഫലം ശോദ്ധ്യഫലത്തിങ്കന്നു ശോദ്ധ്യമായി മൂന്നാമത് ഒരു ഫലമുണ്ടാകും. ഇവിടേയും ഗുണകാരം കൊണ്ടു ഹരിക്കിൽ അതിന്നു നാലാമത് ഒരു ശോദ്ധ്യഫലമുണ്ടാക്കേണം[54]. ഇങ്ങനെ[55] ഗുണകാരംകൊണ്ടു എല്ലാറ്റേയും ഹരിക്കിൽ ശോദ്ധ്യപരമ്പര[56] ഒടുങ്ങുകയില്ല, ഒടുക്കത്തെ ഹാരകംകൊണ്ടു ഹരിപ്പോളവും. ഹാരകംകൊണ്ടു ഹരിക്കായ്കിൽ ഫലപരമ്പര ഒടുങ്ങുകയില്ല. പെരികെ ചെറുതായാൽ ഉപേക്ഷിക്കാമെന്നേ ഉള്ളൂ.

3.iv. ഫലയോഗങ്ങളും ഫലപരമ്പരയും

ഇങ്ങനെ ഉണ്ടാക്കിയാൽ നടേത്തേതു ഗുണ്യയോഗം. അതു ചതുരശ്രബാഹുഖണ്ഡങ്ങളുടെ യോഗമാകുന്ന വ്യാസാർദ്ധം. പിന്നെ രണ്ടാമത് ഇതിങ്കന്നും കളയേണ്ടും ഫലം. രണ്ടാമതിങ്കന്നു കളയേണ്ടുവതു മൂന്നാമത്. ഇങ്ങനെ ആകുമ്പോൾ ഓജങ്ങൾ ഒക്കത്തങ്ങളിൽ കൂട്ടൂ, യുഗ്മങ്ങൾ തങ്ങളിലും കൂട്ടൂ. പിന്നെ ഓജയോഗത്തിങ്കന്നു യുഗ്മയോഗം കളയൂ. ശേഷം പരിദ്ധ്യഷ്ടാംശം. ഇങ്ങനെ ഗുണകാരം ചെറുതാകയാൽ. ഇവിടെ യാതൊരിടത്തു പിന്നെ ഗുണകാരം വലിയത് അവിടെ ഗുണ്യത്തിൽ കൂട്ടുകേവേണ്ടൂ ഫലങ്ങൾ എല്ലാം.

ഇവിടെ പിന്നെ കോടികർണ്ണവർഗ്ഗങ്ങൾ ഗുണഹാരങ്ങളാകയാൽ ഭുജാവർഗ്ഗങ്ങൾ ഗുണഹാരാന്തരങ്ങളാകുന്നവ. അവിടെ പിന്നെ[57] സമമായി പകുത്തിരിക്കുന്ന ചതുരശ്രബാഹുഖണ്ഡങ്ങളിൽ ഒന്നു നടേത്തെ ഭുജയാകുന്നത്. രണ്ടു ഖണ്ഡം കൂടിയതു രണ്ടാം ഭുജ. മൂന്നു ഖണ്ഡം

3. 50. F. വേറെ വെച്ചതിങ്കന്നു കളയണം
51. B. C. F. ഇവിടെ
52. B. C. D. ന്നു താകിൽ
53. B. C. om എന്നുവരും
54. F. ഫലമുണ്ടാക്കേണ്ടു
55. F. എന്നിങ്ങനെ
56. B. F. ശോദ്ധ്യഫലപരമ്പര
57. C. D. F. അവ പിന്നെ

കൂടിയതു മൂന്നാംഭുജ. ഇങ്ങനെ ക്രമേണ ഏകാദ്യേകോത്തര ഖണ്ഡരൂപങ്ങളായിട്ട് ഇരിക്കും ആ ഭുജകൾ. അവറ്റെ പിന്നെ അണുപരിമാണമായിട്ടു കല്പിക്കേണ്ടൂ, ഫലത്തിന്റെ സൂക്ഷ്മതക്കായിക്കൊണ്ട്. പിന്നെ ഇവറ്റെ രൂപങ്ങളെന്നും കല്പിച്ച് ഒന്നു തുടങ്ങി ഓരോന്നേറിയ സംഖ്യകളുടെ വർഗ്ഗയോഗത്തെക്കൊണ്ടു ഗുണ്യമാകുന്ന ബാഹുഖണ്ഡം അണുപരിമിതമായി രൂപമായി കല്പിച്ചിരിക്കുന്നതിനെ ഗുണിച്ച് വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗം കൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ. ഫലം ആദ്യഫലയോഗം.

പിന്നെ ദ്വിതീയഫലയോഗത്തിന്നു പ്രഥമഫലം ഗുണ്യമാകയാൽ ഗുണ്യങ്ങൾ നാനാഭൂതങ്ങൾ, ഗുണഹാരാന്തരം ഇഷ്ടമാകുന്ന[58] ഭുജാവർഗ്ഗവും നാനാരൂപങ്ങൾ, ആകയാൽ ഗുണഹാരാന്തരയോഗം കൊണ്ടു ഗുണിപ്പാൻ ഉപായമില്ല. എന്നിട്ടു[59] ഗുണഹാരാന്തരയോഗമായിരിക്കുന്ന ഭുജാവർഗ്ഗ സംകലിതത്തെക്കൊണ്ടു രൂപമാകുന്ന നടേത്തെ ഗുണ്യത്തെ രണ്ടുവട്ടം ഗുണിച്ച് വ്യാസാർദ്ധം കൊണ്ടു രണ്ടു വട്ടം ഹരിപ്പൂ. ഫലം ദ്വിതീയഫലയോഗം. ഇവിടെ[60] ഏകാദ്യേകോത്തരങ്ങളുടെ വർഗ്ഗവർഗ്ഗങ്ങളുടെ സംകലിതം ഗുണകാരം, വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗവർഗ്ഗം ഹാരകം എന്നിരിക്കും. സംകലിതത്തിന്നു വ്യാസാർദ്ധം പദമാകുന്നത് ഇവിടെ. പിന്നെ മൂന്നാംഫലയോഗവും ഇവ്വണ്ണം തന്നെ ആദ്യഗുണ്യത്തിങ്കന്നു തന്നെ ഉണ്ടാക്കൂ. അവിടെ[61] ഏകാദ്യേകോത്തരങ്ങളുടെ സമഷൾഘാതസംകലിതം ഗുണകാരം, വ്യാസാർദ്ധസമഷൾഘാതം ഹാരകം. ഇങ്ങനെ മീത്തെ മീത്തെ സമയുഗ്ഘാതം ഹാരകം, അതിന്റെ സംകലിതം ഗുണകാരമായിട്ടുമിരിക്കും. അവിടെ സമത്രിഘാതത്തിങ്കന്നു വർഗ്ഗസംകലിതം, സമപഞ്ചഘാതത്തിങ്കന്നു വർഗ്ഗവർഗ്ഗസംകലിതം, സമസപ്തഘാതത്തിങ്കന്നു സമഷൾഘാത സംകലിതം ഉണ്ടാകുന്നൂ. അവിടെ ഗുണകാരമാകുന്ന സമത്രിഘാതത്തെ ഹാരകമാകുന്ന സമദ്വിഘാതത്തെക്കൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ. ഫലം വ്യാസാർദ്ധം തന്നെ. ഈവണ്ണം തന്നെ എല്ലാടവും അതതു ഹാരകത്തെക്കൊണ്ട് അതതു ഗുണകാരത്തെ ഹരിച്ചാൽ ഫലം വ്യാസാർദ്ധം തന്നെ ആയിട്ടിരിക്കും[62]. പിന്നെ സമത്രിഘാതത്തെ മൂന്നിൽ ഹരിക്കേണ്ടുകയാൽ മൂന്നിൽ ഹരിച്ചു

3\. 58. B. C. D. om. ഇഷ്ടമാകുന്ന
59\. C. D. F. add പ്രഥമഫലത്തിന്റെ ഗുണ്യത്തെത്തന്നെ
60\. B.C. D. F. om. ഇവിടെ
61\. C. D add വ്യാസാർദ്ധത്തിന്റെ
62\. B. om. ആയിട്ടിരിക്കും; F. ആയിട്ടിരിക്കുന്നു

കൊള്ളൂ വ്യാസാർദ്ധത്തെ. എന്നാൽ വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗസംകലിതത്തെ വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗം കൊണ്ടു ഹരിച്ചൂതായിട്ടിരിക്കും[63]. ഇങ്ങനെ വ്യാസാർദ്ധത്തെ അഞ്ചിൽ ഹരിച്ചതു സമചതുർഘാതസംകലിതത്തെ സമചതുർഘാതം കൊണ്ടു ഹരിച്ചതായിട്ടിരിക്കും. ഇങ്ങനെ വ്യാസാർദ്ധത്തിങ്കന്നു ത്രിശരാദിവിഷമസംഖ്യകളെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ചഫലം ഇച്ചൊല്ലിയ ഫലപരമ്പരയിൽ[64] മേലേതു മേലേതായിട്ടിരിക്കും. എന്നിട്ടു ചൊല്ലീ -

ത്രിശരാദിവിഷമസംഖ്യാഭക്തമൃണം സ്വം പൃഥക് ക്രമാൽ കുർയ്യാൽ

എന്ന്. അവിടെ ഫലപരമ്പരയിൽ കീഴേതിങ്കന്നു കീഴേതിങ്കന്നു കളയേണ്ടുന്നേടത്ത് ഓജകളുടെ യോഗത്തെ ഗുണ്യയോഗത്തിങ്കന്നു കളയൂ, യുഗ്മയോഗത്തെ കൂട്ടൂ, എന്നാകിലുമാം. എന്നിട്ടു 'ഋണം സ്വം പൃഥക്ക്രമാൽ കുർയ്യാൽ' എന്നു ചൊല്ലീ.

അനന്തരം സമഘാതസംകലിതാനയനോപായത്തെ ഇവിടേക്ക് ഉപകാരിയായിട്ടു കാട്ടേണ്ടുകയാൽ മൂലവർഗ്ഗാദ്യശേഷസംകലിതത്തേയും കാട്ടുന്നൂ. പ്രസംഗാൽ ഉത്തരോത്തരസംകലിതൈക്യാനയനോപായത്തേയും ക്രമേണ കാട്ടുന്നൂ[65].

3.v. ശോദ്ധ്യഫലവും ഫലയോഗവും

ഇവിടെ ദിഗ്രേഖാവർഗ്ഗം ഗുണകാരം, അതതു കർണ്ണരേഖാവർഗ്ഗം ഹാരകം. ആകയാൽ അതതു കർണ്ണാഗ്രത്തോടു ദിഗ്രേഘാഗ്രത്തോടുള്ള അന്തരാളത്തിങ്കലെ[66] ചതുരശ്രബാഹുഭാഗത്തിന്റെ വർഗ്ഗം ഗുണഹാരാന്തരം. പിന്നെ ഇഷ്ടകർണ്ണാഗ്രത്തിങ്കന്ന് അതിനടുത്ത ചെറിയ കർണ്ണാഗ്രത്തോടുള്ള അന്തരാളത്തിങ്കലെ ചതുരശ്രബാഹുഖണ്ഡം ഗുണ്യമാകുന്നത്. ഈ രണ്ടു കർണ്ണാന്തരാളത്തിലെ പരിധ്യംശത്തിങ്കലെ[67] അർദ്ധജ്യാവ് ഇച്ഛാഫലം. ഇങ്ങനെ എല്ലാ ഫലവും വരുന്നൂ. അവിടെ ഗുണ്യങ്ങളെല്ലാം തുല്യം,

3. 63. F. ട്ടു വരും
64. D. F. ഫലയോഗ പരമ്പരയിൽ
65. C. D. add അതിൻ പ്രകാരം
66. C. അന്തരാളത്തിലെ
67. F. അംശത്തിന്റെ

കർണ്ണരേഖാഗ്രാന്തരം തുല്യമാകയാൽ. ഇങ്ങനെ ഫലങ്ങളുണ്ടാക്കി ഫലയോഗം ചെയ്താൽ ദിക്സൂത്രത്തോടു ചതുരശ്രകോണിങ്കലെ കർണ്ണരേഖയോടുള്ള അന്തരാളത്തിങ്കലെ പരിധിഭാഗം വരും.

ഇവിടെ ദിക്സൂത്രാഗ്രത്തിന്നടുത്തുള്ള കർണ്ണത്തിന്നു ചതുരശ്രബാഹുഖണ്ഡങ്ങളിലൊന്നു ഭുജയാകുന്നത്. രണ്ടാം കർണ്ണത്തിന്നു ഭുജാഖണ്ഡങ്ങളാൽ രണ്ടു കൂടിയതു ഭുജയാകുന്നത്[68]. ഇങ്ങനെ ഓരോരോ ഭുജാഖണ്ഡം ഏറിയതു പിന്നെ പിന്നത്തെ കർണ്ണത്തിന്റെ ഭുജയാകുന്നത്. എന്നാലൊന്നു തുടങ്ങി ഓരോന്നേറി ഇരിക്കുന്ന ഭുജാഖണ്ഡങ്ങളുടെ യോഗങ്ങൾ ഭുജകളാകുന്നത്[69]. എന്നാലിവറ്റിന്റെ വർഗ്ഗയോഗങ്ങൾ ഗുണഹാരാന്തരങ്ങളുടെ യോഗമാകുന്നത്. ഗുണ്യമെല്ലാമൊന്നാകയാൽ അതിനെക്കൊണ്ടു[70] ഗുണഹാരാന്തരയോഗത്തെ ഗുണിച്ച് ഹാരകമൊന്നെങ്കിൽ[71] അതിനെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ഫലയോഗം വരും. ഇവിടെ ഹാരകമൊന്നേ എന്നു കല്പിപ്പൂ. അതു വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗംതന്നെ താനും എന്നു കല്പിച്ചിട്ടു ക്രിയ ചെയ്യുന്നു. ഇവിടെ ഇങ്ങനെ ഉണ്ടാക്കിയ ഫലവും ഗുണാഹാരാന്തരവും തങ്ങളിലുള്ള[72] ഘാതം ഹാര്യത്തിങ്കൽ ശേഷിച്ചിരിക്കുമ്പോൾ[73] ഹാരകം കൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലത്തോടൊക്കും ഗുണകാരം കൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലം. ഇത് ശേഷിയാതെ[74] കൂട്ടിപ്പോയി എങ്കിൽ ആ[75] ഫലവും ഗുണഹാരാന്തരവും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചു ഹാരകം കൊണ്ടു ഹരിച്ചുണ്ടായ ഫലത്തെ ഗുണകാരം കൊണ്ടു ഹരിച്ചുണ്ടായ ഫലത്തിങ്കന്നു കളയേണം. എന്നാലും ഫലമൊക്കും. ഇക്കളയേണ്ടുംഫലം ഉണ്ടാക്കുമ്പോഴും ഗുണഹാരം കൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ എങ്കിൽ[76] ഒട്ടേറീട്ടിരിക്കും. എന്നാലതിങ്കന്നുമുണ്ടാക്കേണമൊരു ശോദ്ധ്യഫലം. പിന്നേയുമിവണ്ണമാകിൽ പിന്നെ പിന്നെ ഫലത്തിങ്കന്നും കുറഞ്ഞൊന്നു കുറഞ്ഞൊന്നു കളയേണ്ടിവരും. ആകയാൽ ഒടുക്കത്തീന്നു തുടങ്ങി ഇവ ഒക്ക കളഞ്ഞു

---

3. 68 C. D. ഭുജകളാകുന്നത്
69. C. D. ഭുജയാകൂന്നത്
70. B. അതുകൊണ്ട്
71. C. ഹാരമെന്നെങ്കിൽ
72. B. തമ്മിലുള്ള
73. F. ശേഷിപ്പിക്കുമ്പോൾ
74. C. D. F. കൂടിപ്പോയി ഹരിച്ച ഫലത്തിൽ
75. C. D. ആ
76. B. C. add ഫലം; D. adds ആ ഫലം; F. adds ഫലവും

കൂട്ടുമ്പോൾ ഫലമൊക്കും.

3.v(i). ശോദ്ധ്യഫലം-ഒരു ഉദാഹരണം

ഇവിടെ ഹാര്യത്തിങ്കൽ[77] സംഖ്യ നൂറ് എന്നു കല്പിപ്പൂ. ഹാരകം പത്ത്, ഗുണകാരം എട്ട്. ഇതിനെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ചിട്ട് നൂറു ഉണ്ടായി എന്നും കല്പിപ്പൂ. . ഇവിടെ ഹാരകം കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ഫലം പത്ത് ഉണ്ടാകും. ഇവിടെ പത്തു സംഖ്യയാകുന്ന[78] ഹാരകം ഹാര്യത്തിങ്കൽ നിന്ന് ഒരിക്കൽ കളയേണ്ടി ഇരിക്കുന്നേടത്ത് എട്ടു കളയുമ്പോൾ ഗുണഹാരാന്തരമാകുന്ന രണ്ടു ഹാര്യത്തിങ്കൽ ശേഷിക്കും. പിന്നേയുമെത്ര ആവൃത്തി കളഞ്ഞൂ അത്ര ഗുണഹാരാന്തരം ശേഷിക്കും ഹാര്യത്തിങ്കൽ. എന്നാൽ ഫലവും ഗുണഹാരാന്തരവുമുള്ള ഘാതത്തെ ഹാര്യത്തിങ്കൽ[79] കളഞ്ഞ് ശേഷത്തെ ഗുണകാരംകൊണ്ടു[80] ഹരിച്ചാൽ ഈ ഗുണകാരം കൊണ്ടു ഹരിച്ചഫലം ഹാരകം കൊണ്ടു ഹരിച്ചഫലത്തോടു തുല്യമായിരിക്കും. ഇവിടെ അതിനേയും കൂടെ[81] ഗുണകാരം കൊണ്ടു ഹരിക്കുമ്പോൾ ഫലം പന്ത്രണ്ടര. ഈ ഫലത്തെ ഗുണഹാരാന്തരംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ ഇരുപത്തഞ്ച്. ഇതിനെ ഹാരകമാകുന്ന പത്തുകൊണ്ട് ഹരിച്ചഫലം രണ്ടര. ഇതിനെ മുമ്പിലെ പന്ത്രണ്ടരയിൽ[82] നിന്നു കളയുമ്പോൾ ശേഷം ഫലം പത്തുതന്നെ. ഇവിടെ ഇരുപത്തിഅഞ്ചിനേയും എട്ടിൽ ഹരിക്കിൽ അഷ്ടാംശംകൂടിയ മൂന്നു ഫലം. ഇതു ശോദ്ധ്യം, വാസ്തവത്തിങ്കന്ന് ഏറും. എന്നാൽ ഈ ഫലത്തേയും ഗുണഹാരാന്തരം കൊണ്ടു ഗുണിച്ച് ഹാരകം കൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലം അഷ്ടാംശത്തോടുകൂടിയ അര. ഇതിനെ രണ്ടാം ഫലത്തിങ്കന്നു കളഞ്ഞാൽ രണ്ടര. അപ്പോൾ അതു നടേത്തെ ഫലത്തിങ്കന്നു കളവാൻ മതി. ഇങ്ങനെ അതതു ഫലത്തെ ഗുണഹാരാന്തരം കൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ഹാരകം കൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലം അതിനടുത്തു മുമ്പിലെ ഫലത്തിങ്കന്നു കളഞ്ഞാൽ അപ്ഫലം[83] സൂക്ഷ്മമാകും. എന്നാൽ അത് അതിന്നു കീഴെ ഫലത്തിങ്കന്നു ശോധിക്കാം, പിന്നെ അത് അതിങ്കന്നു കീഴേതിങ്കന്ന്, ഇങ്ങനെ. എന്നാൽ നടേത്തെ ഫലം വാസ്തവത്തോട് ഒക്കും.

---

3. 77. D. F. ഹാര്യത്തിന്റെ
78. B. പത്താകുന്ന
79. D. ഹാര്യത്തിങ്കേന്ന്
80. D. F. om. ഗുണകാരം കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൻ
81. F. കൂടി
82. C. D. om. ഇതിനെ മുമ്പിലെ പന്ത്രണ്ടരയിൽ നിന്നു കളയുമ്പോൾ
83. F. om. ആ

ഇവിടെ പിന്നെ അതതു ഭുജാവർഗ്ഗങ്ങൾ അതതു ഭുജാഖണ്ഡത്തിന്നു ഗുണഹാരാന്തരമാകയാൽ അതതിങ്കന്ന് ഉണ്ടായ ഫലത്തെ പിന്നേയും അതതു ഭുജാവർഗ്ഗം തന്നെക്കൊണ്ടു ഗുണിക്കേണ്ടൂ. അതിന്ന് ഫലം വേറെ ഇല്ലായ്കയാൽ നടേത്തെ ഗുണ്യമാകുന്ന ഭുജാഖണ്ഡത്തിങ്കന്നുതന്നെ ഉണ്ടാക്കൂ രണ്ടാംഫലം. അതിന്ന്, രണ്ടു ഫലത്തിന്നും ഭുജാവർഗ്ഗം ഗുണകാരമാകയാൽ, ഭുജാവർഗ്ഗം കൊണ്ടു രണ്ടു വട്ടം ഗുണിപ്പൂ ഭുജാഖണ്ഡമാകുന്ന ഗുണ്യത്തെപ്പിന്നെ. നടേത്തെ ഫലത്തിന്റെ ഹാരകം വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗം. അതിന്റേയും വർഗ്ഗം കൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ. എന്നാലുണ്ടാം രണ്ടാംഫലം. ഇവിടെ[84] ഗുണ്യങ്ങൾ തുല്യങ്ങളായാൽ ഗുണകാരയോഗത്തെ ഗുണിക്കാം. ഇവിടെ ഗുണകാരകങ്ങളാകുന്നതു പിന്നെ ഒന്നു തുടങ്ങി ഓരോന്നേറ കൂട്ടിയിരിക്കുന്ന ഭുജാഖണ്ഡങ്ങളുടെ വർഗ്ഗവർഗ്ഗങ്ങൾ. അവറ്റിൻെറ യോഗം ഗുണഹാരാന്തരയോഗമാകുന്നത്. ഈ യോഗത്തിന് 'ഏകാദ്യേകോത്തരവർഗ്ഗവർഗ്ഗസംകലിതം' എന്നു പേർ. ഇവിടെ ഹാരകമാകുന്നതു വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗം. പിന്നെ ഇവിടെ നടേത്തെ ഫലം ഉണ്ടാക്കുന്നേടത്തു തുല്യങ്ങളായിരിക്കുന്ന ഭുജാഭാഗങ്ങൾ രണ്ടു[85] തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതു ഗുണകാരം, വ്യാസാർദ്ധം രണ്ടു[86] തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതു ഹാരകം. പിന്നെ മൂന്നാം ഫലത്തിന്നു സമങ്ങളായിരിക്കുന്ന ഭുജാഭാഗങ്ങൾ നാലു തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതു ഗുണകാരം[87], വ്യാസാർദ്ധങ്ങൾ നാലു തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതു ഹാരകം. പിന്നെ മൂന്നാം ഫലത്തിന്നു[88] സമങ്ങളായിരിക്കുന്ന ആറു തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതു ഗുണകാരവും ഹാരകവും ആകുന്നത്. ഇങ്ങനെ നാലാമതിന്നു സമങ്ങൾ എട്ടു തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതു ഗുണഹാരങ്ങളാകുന്നത്[89]. ഗുണ്യമാകുന്നത് എല്ലാടവും ഭുജാഖണ്ഡം തന്നെ. ഇവിടെ എല്ലാടവും ഫലയോഗം വരുത്തുവാൻ ഗുണകാരയോഗം ഗുണകാരമാകുന്നത്. ഇവിടെ നടേത്തെ ഫലയോഗം വരുത്തുന്നേടത്തു ദിക്സൂത്രത്തിങ്കന്നു തുടങ്ങി ചതുരശ്രകോണസൂത്രത്തോളമുള്ള കർണ്ണങ്ങൾക്ക് ഭുജകളാകുന്നത് ഒരു ഭുജാഖണ്ഡം തുടങ്ങി ഓരോരോ ഖണ്ഡം ഏറക്കൂടി ഒടുക്കത്തേതു വ്യാസാർദ്ധത്തോടു തുല്യമായിരിക്കുന്ന

3\. 84. C. D. F ഇവിടേയും
85. B. C. D. F om. രണ്ടു
86. C. D. F. രണ്ടാം
87. F. ഗുണകാരമാകുന്നത്
88. F. ഫലത്തിന്റെ
89. B. F. ഗുണകാരഹാരങ്ങളാകുന്നത്

ചതുരശ്രബാഹുഭാഗം ഭുജയാകുന്നത്. ഇവറ്റിൻെറ വർഗ്ഗയോഗം ഗുണകാരയോഗമാകുന്നത്. ഇതിന്നു 'ഏകാദ്യേകോത്തരവർഗ്ഗസംകലിതം' എന്നു പേർ. ഇങ്ങനെ രണ്ടാംഫലയോഗം വരുത്തുവാൻ ഒരു ഖണ്ഡം തുടങ്ങി ഓരോന്നേറ കൂടിയിരിക്കുന്ന[90] ഭുജകൾ എല്ലായിലും വലുതു[91] വ്യാസാർദ്ധതുല്യമായിരിക്കുന്നവറ്റിൻെറ വർഗ്ഗവർഗ്ഗസംകലിതം ഗുണകാരയോഗമാകുന്നത്. ഇങ്ങനെ ആറു, എട്ടു എല്ലാം തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചവറ്റിന്റെ സംകലിതം പിന്നെ പിന്നത്തെ ഗുണകാരയോഗമാകുന്നത്.

4. സംകലിതങ്ങൾ

ഇവിടെ ഈ സംകലിതങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കുംപ്രകാരത്തെ[1] ഇനി ചൊല്ലുന്നത് അവിടെ നടേ[2] കേവലസംകലിതത്തെ ചൊല്ലുന്നൂ[3] പിന്നെ സമങ്ങൾ രണ്ടും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതിന്റെ സംകലിതം. പിന്നെ ഇവിടെ ഉപയോഗമില്ലായ്കിലും സമങ്ങൾ മൂന്ന്, അഞ്ച് എന്നിവ തങ്ങളിൽ[4] ഗുണിച്ചവറ്റിൻെറ സംകലിതവും കൂടി ചൊല്ലുന്നുണ്ട്, ഉപയോഗമുള്ള വറ്റിൻെറ നടുവേ ഉണ്ടായിരിക്കയാൽ.

4.i. മൂലസംകലിതം

ഇവിടെ മൂലസംകലിതത്തിങ്കൽ ഒടുക്കത്തെ ഭുജാവ്യാസാർദ്ധത്തോട് ഒക്കും, അതിന്നു കീഴെ ഒരു ഖണ്ഡം കുറയും, അതിന്നു കീഴെ രണ്ടു ഖണ്ഡം കുറയും എന്നിരിക്കുന്നേടത്ത് എല്ലാ ഭുജകളും വ്യാസാർദ്ധത്തോട് തുല്യങ്ങൾ എന്നിരിക്കുന്നൂതാകിൽ ഭുജാസംഖ്യ കൊണ്ടു തന്നെ വ്യാസാർദ്ധത്തെ ഗുണിച്ചാൽ അതതു സംകലിതഫലമാകുന്നത്. ഇവിടെ ഒരു ഭുജ എല്ലൊ വ്യാസാർദ്ധതുല്യമായിട്ടുള്ളൂ. അതിങ്കന്നു ക്രമേണ ചെറിയ ചെറിയ കർണ്ണങ്ങളുടെ ഭുജകൾ ഓരോരോ സംഖ്യ കുറഞ്ഞിരിക്കുന്നൂ എല്ലൊ. ഇവിടെ വ്യാസാർദ്ധം എത്ര സംഖ്യ ആയി കല്പിക്കുന്നൂ, ഭുജേടെ ഖണ്ഡസംഖ്യയും അത്രയായി കല്പിപ്പൂ. എന്നാൽ എളുപ്പമുണ്ട് ഓർപ്പാൻ.

3. 90. F. കൂട്ടി നിക്കുന്ന
   91. F. വലിയതു
4. 1. D. പ്രകാരം
   2. D. നടേത്തേ
   3. D. F ചൊല്ലുന്നുണ്ട്
   4. B. തമ്മിൽ

എന്നാലിവിടെ ഉപാന്ത്യഭുജയിങ്കൽ സംഖ്യ ഒന്നു കുറയും, അതിൽ ചെറിയതിങ്കൽ വ്യാസാർദ്ധസംഖ്യയിങ്കന്ന് രണ്ടു കുറയും. ഇക്കുറയുന്ന അംശം ഒന്നു തുടങ്ങി ക്രമേണ ഓരോന്നേറി ഏറി ഇരിക്കും, ഒടുക്കത്തെ ഊനാംശം പോരായിന്നതു വ്യാസാർദ്ധത്തോടു മിക്കതും ഒക്കും, ഒരു സംഖ്യ കുറയുമെത്രെ. എന്നാൽ കുറയുന്ന അംശം ഒക്ക കൂട്ടിയാലും ഒന്നു തുടങ്ങി ഓരോന്നേറി വ്യാസാർദ്ധമൊടുക്കമായിരിക്കുന്ന സംകലിതത്തോടു സംഖ്യ പ്രായേണ ഒക്കും, ഒരു വ്യാസാർദ്ധമേ കുറയൂ. എന്നാൽ ഭുജാസംഖ്യയിൽ ഒന്നു കൂടിയതിനെക്കൊണ്ടു വ്യാസാർദ്ധസംഖ്യേ ഗുണിച്ച് അതിൻെറ അർദ്ധം ഭുജാസംകലിതമായിട്ടിരിക്കും. 'ഭുജാസംകലിതം' എന്ന് എല്ലാ കർണ്ണത്തിന്റേയും ഭുജകളൊക്ക കൂടിയത്.

പിന്നെ[5] ഖണ്ഡം ചെറുതായോളം ഫലം സൂക്ഷ്മമാകും. എന്നിട്ടു ഭുജാസംഖ്യ ഓരോന്നിനെ അണുവായി നുറുക്കുമാറു കല്പിച്ചതിനെക്കൊണ്ടും സംകലിതം ചെയ്വൂ. ഇവിടെ പരാർദ്ധംകൊണ്ട് അംശിക്കുന്നൂതാകിൽ പരാർദ്ധസംഖ്യകൊണ്ടു ഗുണിച്ച ഭുജയിൽ പരാർദ്ധാംശത്താലൊന്നു കൂട്ടി വ്യാസാർദ്ധംകൊണ്ടു ഗുണിച്ച് അർദ്ധിപ്പൂ. പിന്നെ പരാർദ്ധംകൊണ്ടു ഹരിപ്പൂതും ചെയ്വു. അതു മിക്കവാറും വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗാർദ്ധമെത്രെ. മുഴുവൻ സംഖ്യയാവാൻ പിന്നെ[6] പരാർദ്ധംകൊണ്ടു[7] ഹരിക്കുന്നൂ. ഇങ്ങനെ ഖണ്ഡം ചെറുതായോളം ഭുജയിൽ കുറഞ്ഞോര് അംശമേ കൂട്ടേണ്ടൂ സംകലിതം വരുത്തുവാൻ. എന്നാൽ ഭുജയിൽ[8] ഒന്നും കൂട്ടാതെ വ്യാസാർദ്ധം കൊണ്ടു ഗുണിച്ച് അർദ്ധിച്ചതു് അത്യന്തം സൂക്ഷ്മമായി ഖണ്ഡിച്ചിരിക്കുന്ന ഭുജേടെ സംകലിതമെന്നു വന്നിരിക്കും[9]. ഇങ്ങനെ വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗാർദ്ധം സൂക്ഷ്മമായിരിക്കുന്ന ഭുജാഖണ്ഡസംകലിതമാകുന്നത്.

4.ii. വർഗ്ഗസംകലിതം

പിന്നെ വർഗ്ഗസംകലിതത്തെ ചൊല്ലുന്നുണ്ട്[10]. ഇവിടെ[11] ഇസ്സംകലിതം

---

4. 5. C. D. F. om. പിന്നെ
6. D. om. പിന്നെ
7. C. D. F. add പിന്നെ
8. C. D. F adds കുറഞ്ഞൊന്നും
9. C. മെന്നിരിക്കും; D. വന്നിരിക്കുന്നു
10. F. ചൊല്ലുന്നു
11. C. D. F. അവിടെ

ചെയ്ത ഭുജകളിൽ ഓരോന്നേ തന്നെത്തന്നെ കൊണ്ടുതന്നെ ഗുണിച്ചതെല്ലോ ഭുജാവർഗ്ഗങ്ങളാകുന്നതു്. ഇവിടെ ഗുണകാരങ്ങളാകുന്ന ഭുജകളെല്ലാം വ്യാസാർദ്ധത്തോടു് ഒക്കും എന്നിരിക്കുന്നൂതാകിൽ വ്യാസാർദ്ധം കൊണ്ടു ഗുണിച്ച സംകലിതം 'വർഗ്ഗസംകലിത'മായിട്ടിരിക്കും[12] ഇവിടെ പിന്നെ ഒരു ഗുണകാരമേ വ്യാസാർദ്ധത്തോടു തുല്യമായിട്ടുള്ളൂ. അതു് ഒടുക്കത്തേതു്. അതിന്നു നടേത്തേതിന്നു വ്യാസാർദ്ധത്തിൽ ഒന്നു കുറയും ഗുണകാരഭുജാസംഖ്യ. അതിനേയും വ്യാസാർദ്ധം കൊണ്ടു ഗുണിക്കിൽ ഒന്നു കൊണ്ടു ഗുണിച്ച ഉപാന്ത്യഭുജാ ഏറും വർഗ്ഗസംകലിതത്തിങ്കന്ന്. പിന്നെ അതിന്നു കിഴേതു് ഒടുക്കത്തേതിന്നു മുന്നാമത്. അത് വ്യാസാർദ്ധത്തിങ്കന്നു രണ്ടു ഖണ്ഡം കുറയും. എന്നാൽ ഭുജയെ രണ്ടിൽ ഗുണിച്ചതു ഏറും. ഇങ്ങനെ ക്രമേണ ചെറിയ ചെറിയ ഭുജകളെ ക്രമേണ ഏറിയ സംഖ്യകൊണ്ടു ഗുണിച്ചതു വ്യാസാർദ്ധം കൊണ്ടു ഗുണിച്ച സംകലിതത്തിൽ വർഗ്ഗസംകലിതത്തിങ്കന്ന് ഏറിപ്പോയ ഭാഗമാകുന്നത്. അതുകളഞ്ഞാൽ വർഗ്ഗസംകലിതമായിട്ടു വരും വ്യാസാർദ്ധഗുണിതമായിട്ടിരിക്കുന്ന സംകലിതം.

ഇവിടെ ദിക്സൂത്രാഗ്രത്തിങ്കന്ന് അടുത്ത ഭുജയിൽ കുറഞ്ഞത് ഒന്നു കുറഞ്ഞ വ്യാസാർദ്ധമാകയാൽ, ഇവിടെ ഏറിപ്പോകുന്ന[13] അംശം ഒക്ക കൂട്ടിയാൽ മൂലത്തിൻെറ സംകലിതസംകലിതമായിട്ടു വരും[14]. എങ്കിലൊ[15] സംകലിതങ്ങളുടെ യോഗമല്ലോ[16] സംകലിതസംകലിതമാകുന്നത്. അവിടെ ഒടുക്കത്തെ സംകലിതം എല്ലാ ഭുജകളും കൂടിയത്. അന്ത്യത്തിനടുത്തു കീഴെസംകലിതം പിന്നെ. ഒടുക്കത്തെ ഭുജ ഒന്നു കൂടാതെ മറ്റെ ഭുജകളെല്ലാം കൂടിയതു ഒടുക്കത്തേതിങ്കന്നു കീഴ്. മൂന്നാം സംകലിതത്തിങ്കൽ[17] ഭുജകൾ രണ്ടു കൂടാതെ മറ്റുള്ള ഭുജകളുടെ യോഗം അതിൻെറ കീഴെ സംകലിതമാകുന്നത്. അതു ഒടുക്കമായിരിക്കുന്ന ഭുജകളെല്ലാറ്റിന്റേയും യോഗം, ഇവ്വണ്ണം കീഴ്പോട്ടുള്ളതൊക്കെ ഒരോരോ ഭുജ കുറഞ്ഞിരിക്കും

4. 12. F. ആയിരിക്കും
13. D. C. ഏറിപ്പോയ ഭാഗമാകുന്ന
14. C. D. F. മായിട്ടിരിക്കും
15 C. D. F. om. എങ്കിലൊ
16. C. D. F. adds. ഈ
17. B. ത്തിങ്കൽ ഒടുക്കത്തെ ഭുജകൾ രണ്ടും കൂടാതെ

നടേത്തെ നടേത്തെ സംകലിതത്തിങ്കന്.

എന്നാൽ എല്ലാറ്റിലും വലിയ ഭുജക്ക് ഒരു സംകലിതത്തിങ്കലേ യോഗമുള്ളൂ. പിന്നെ ഒടുക്കത്തേതിന്ന് അടുത്ത കീഴെ ഭുജക്ക് ഒടുക്കത്തെ സംകലിതത്തിലും അതിന്നടുത്തു കീഴേതിലും യോഗമുണ്ട്. അവിടുന്നു കീഴെ കീഴെ ഭുജകൾക്ക് ക്രമേണ മൂന്നു, നാലു തുടങ്ങിയുള്ള സംകലിതങ്ങളിൽ യോഗമുണ്ട്. എന്നാൽ ഒടുക്കത്തെ ഭുജക്കടുത്തു കീഴെ ഭുജ തുടങ്ങിയുള്ള ചെറിയ ചെറിയ ഭുജകളെ ഒന്നു[18] തുടങ്ങിയുള്ള സംഖ്യകളെക്കൊണ്ട് ക്രമേണ ഗുണിച്ചിരിക്കുന്നതു സംകലിതകസംകലിതമെന്നു വന്നുകൂടി. ഇപ്പോളിവിടെ അതിസൂക്ഷ്മമായി ഖണ്ഡിച്ചിരിക്കുന്ന ഭുജേടെ സംകലിതമാകുന്നതു് ഒടുക്കത്തെ ഭുജേടെ വർഗ്ഗത്തിൽ പാതി എന്നോ നടേ ചൊല്ലിയൊല്ലോ. എന്നാലതതു ഭുജ ഒടുക്കമായിരിക്കുന്ന സംകലിതമുണ്ടാവാൻ അതതു ഭുജയെ വർഗ്ഗിച്ചർദ്ധിക്കേ വേണ്ടുവത് എന്നു വന്നു. എന്നാൽ എല്ലാ ഭുജകളുടേയും വർഗ്ഗയോഗത്തെ അർദ്ധിച്ചാൽ സംകലിതസംകലിതമുണ്ടാം. എന്നാൽ വർഗ്ഗസംകലിതത്തിന്റെ പാതി മൂലത്തിന്റെ[19] സംകലിതസംകലിതമാകുന്നതെന്നു വന്നു. എന്നാൽ സംകലിതത്തെ വ്യാസാർദ്ധം കൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ തന്നിൽ പാതി കൂട്ടിയിരിക്കുന്ന വർഗ്ഗസംകലിതമായിട്ടിരിക്കുമത്.[20] വർഗ്ഗാർദ്ധസംകലിതം കൂടി ഇരിക്കുന്നു എന്നും ചൊല്ലാമതിനെ. എന്നാൽ വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗത്തിന്റെ അർദ്ധത്തെ വ്യാസാർദ്ധം കൊണ്ടു ഗുണിച്ചു തന്നിലെ മൂന്നൊന്നു കളഞ്ഞാൽ ശേഷിക്കുന്നതു[21] മുഴുവനിൽ മൂന്നൊന്നായിട്ടിരിക്കും. എന്നാൽ വ്യാസാർദ്ധഘനത്തിൽ മൂന്നൊന്നു വർഗ്ഗസംകലിതമാകുന്നത് എന്നും വരും.

4.iii. ഘനസംകലിതവും വർഗ്ഗവർഗ്ഗസംകലിതവും

പിന്നെ ഘനസംകലിതത്തെ വരുത്തും പ്രകാരം[22]. ഈ വർഗ്ഗസംകലിതത്തിങ്കലെ അതതു ഭുജാവർഗ്ഗത്തെ അതതു

4. 18. B. ഒന്നു രണ്ടു
19. D.F. സംകലിതത്തിൽ
20. C. D. F add എന്നാൽ തന്നിലെ മൂന്നൊന്ന് കളഞ്ഞാൽ വർഗ്ഗസംകലിതമായിട്ടിരിക്കുമത്
21. C. ശേഷിക്കുന്നവ; Fശേഷിക്കുന്നതിൽ
22. C. D. F. സംകലിതം വരും പ്രകാരം
23. C. എല്ലാറ്റിന്റേയും
24. D. വ്യാസാർദ്ധത്തെകൊണ്ട്

ഭുജതന്നെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ചതെല്ലോ 'ഘനസംകലിത'മാകുന്നത്. ഇവിടെ എല്ലാറ്റേയും[23] വ്യാസാർദ്ധം കൊണ്ടു[24] തന്നെ ഗുണിക്കുമ്പോൾ എത്ര ഉണ്ടു ഘനസംകലിതത്തിങ്കന്ന് ഏറുവത് എന്ന് ഓർക്കുംപ്രകാരം. ഇവിടെ മുമ്പിൽ ചൊല്ലിയ ന്യായം കൊണ്ടുതന്നെ ഒടുക്കത്തേതിന്നടുത്തുകീഴെ ഭുജാവർഗ്ഗം ഒന്നിൽ ഗുണിച്ചത് ഏറും. പിന്നെ അവിടുന്നു മുമ്പിലെ ഭുജാവർഗ്ഗങ്ങളെ രണ്ട്, മൂന്ന്[25] തുടങ്ങിയുള്ള സംഖ്യകളെക്കൊണ്ടു ക്രമേണ ഗുണിച്ചത് ഏറും. അതു വർഗ്ഗസംകലിതസംകലിതമെന്നും വരും. ഘനത്ര്യംശം വർഗ്ഗസംകലിതമെന്നൊ മുമ്പിൽ ചൊല്ലിയല്ലോ. എന്നാലതതു ഭുജാഘനത്തിന്റെ ത്ര്യംശം അതതു ഭുജ ഒടുക്കമായിരിക്കുന്ന വർഗ്ഗസംകലിതമായിട്ടിരിക്കും, എന്നാൽ ഘനസംകലിതത്തിന്റെ മൂന്നൊന്നു 'വർഗ്ഗസംകലിതസംകലിത'മെന്നും വരും. എന്നാൽ വർഗ്ഗസംകലിതത്തെ വ്യാസാർദ്ധംകൊണ്ടു ഗുണിക്കുമ്പോൾ തന്നിൽ മൂന്നൊന്നു കൂടിയിരിക്കുന്ന ഘനസംകലിതമായിട്ടിരിക്കും. എന്നാൽ ഇതു തന്നിൽ നാലൊന്നു കളഞ്ഞാൽ ഘനസംകലിതം ശേഷിക്കും. എന്നാൽ വർഗ്ഗവർഗ്ഗത്തിന്റെ നാലൊന്നു ഘനസംകലിതമെന്നും വന്നൂ. പിന്നെ ഈ ഘനസംകലിതത്തെ വ്യാസാർദ്ധം കൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ 'വർഗ്ഗവർഗ്ഗസംകലിത'വും 'ഘനസംകലിതസംകലിത'വും കൂടി വരും എന്നു മുമ്പിൽ ചൊല്ലിയ ന്യായം കൊണ്ടു വന്നിരിക്കുന്നൂ. വർഗ്ഗവർഗ്ഗത്തിൽ[26] നാലൊന്നു ഘനസംകലിതം എന്നും ചൊല്ലീ. ഇതുഹേതുവായിട്ടു വർഗ്ഗവർഗ്ഗസംകലിതത്തിൽ നാലൊന്നു 'ഘനസംകലിതസംകലിതം' എന്നും വരും, ചൊല്ലിയ ന്യായംകൊണ്ട്. എന്നാൽ ചതുരംശം കൂടിയിരിക്കുന്നതിങ്കന്നു[27] പഞ്ചാംശം കളഞ്ഞാൽ വ്യാസാർദ്ധങ്ങൾ അഞ്ചു തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതിന്റെ അഞ്ചൊന്നായിട്ടിരിക്കും[28] വർഗ്ഗവർഗ്ഗസംകലിതം എന്നും വന്നൂ.

4.iv. സംകലിതാനയനസാമാന്യന്യായം

പിന്നെ വർഗ്ഗവർഗ്ഗത്തെ തന്നെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ 'സമപഞ്ചഘാതം' എന്നു പേർ. ഇങ്ങനെ സമപഞ്ചാദിഘാതസംകലിതം എന്നു മീത്തെ മീത്തെ

4. 25. F. adds എന്ന്
26. C. D. വർഗ്ഗസംകലിതത്തിൽ
27. C.F. കൂടിയതിങ്കന്ന്
28. C. അഞ്ചൊന്നായിരിക്കും
29. C. F. മുമ്പിലെ

സംകലിതങ്ങൾക്കുപേർ. അതിന്നു മുമ്പിലത്തെ[29] സംകലിതത്തെ വ്യാസാർദ്ധം കൊണ്ടു ഗുണിച്ചത് അഗ്ഗുണ്യത്തിന്റെ സംകലിതസംകലിതവും അതിന്നു മീത്തേ സമഘാതസംകലിതവും കൂടി വരും. എന്നാൽ മീത്തെ മീത്തെ സമഘാതസംകലിതമുണ്ടാക്കുവാൻ അതതു സംകലിതത്തെ വ്യാസാർദ്ധം കൊണ്ടു ഗുണിച്ചതിങ്കന്ന് ഓരോന്നേറിയ സംഖ്യകൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലത്തെ കളഞ്ഞാൽ മേലെ മേലെ സമഘാതസംകലിതമുണ്ടാകും. എന്നാൽ വ്യാസാർദ്ധങ്ങൾ രണ്ടു തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതിനെ രണ്ടിൽ ഹരിപ്പൂ. ഘനമെങ്കിൽ മൂന്നിൽ ഹരിപ്പൂ. വർഗ്ഗവർഗ്ഗമെങ്കിൽ നാലിൽ, സമപഞ്ചഘാതത്തെ[30] അഞ്ചിൽ, എന്നിങ്ങനെ ഏകൈകോത്തരസമ ഘാതത്തെ ഏകൈകോത്തര സംഖ്യകളെകൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ. ഫലങ്ങൾ ക്രമേണ ഉള്ള സമഘാതസംകലിതമായിട്ടിരിക്കും. ഇവിടെ വർഗ്ഗത്തിങ്കന്നു മൂലസംകലിതം, ഘനത്തിങ്കന്നു വർഗ്ഗസംകലിതം, വർഗ്ഗവർഗ്ഗത്തിങ്കന്നു ഘനസംകലിതം എന്നിങ്ങനെ രാശികളെ തന്നെക്കൊണ്ട് എത്ര ആവൃത്തി ഗുണിച്ചത്തിങ്കന്ന് ഏകാദിസംഖ്യകളിൽ അത്രാമതുകൊണ്ടു ഹരിച്ചഫലം യാതൊന്ന്[31] ആ രാശിയെ ഒരാവൃത്തി കുറച്ചു ഗുണിച്ചതിന്റെ[32] സംകലിതമായിട്ടിരിക്കും. ഇങ്ങനെ മൂലവർഗ്ഗാദിസംകലിതങ്ങളെ[33] വരുത്തും പ്രകാരം

4.v. ആദ്യദ്വിതീയാദിസംകലിതസംകലിതങ്ങൾ

അനന്തരം ആദ്യദ്വിതീയാദിസംകലിതത്തെ കാട്ടുന്നൂ. അവിടെ[34] ആദ്യസംകലിതമാകുന്നതു മൂലസംകലിതം തന്നെ. അതു പദവർഗ്ഗാർദ്ധമെന്നോ മുമ്പിൽ ചൊല്ലിയെല്ലോ. ദ്വിതീയം പിന്നെ മൂലസംകലിതൈക്യം. അതും[35] പിന്നെ വർഗ്ഗസംകലിതാർദ്ധത്തോടു തുല്യം എന്നു ചൊല്ലീതായി. അതാകുന്നതു പദത്തിന്റെ ഘനത്തിൽ ആറൊന്നായിരിക്കും[36].

4. 30. B. പഞ്ചഘാതമെങ്കിൽ
31. B. D. F. add അത്, C. അതീന്ന്
32. B. കുറഞ്ഞു ഗുണിച്ചതിൽ; C. കുറയ ഗുണിച്ചതിൽ
33. C. F. സംകലിതത്തെ
34. D. C. അതിൽ
35. C. അത്
36. C. ആയിട്ടിരിക്കും
37. C. D. F സംകലിതത്തെ
38. F. മുൻ

'തൃതീയസംകലിതം' പിന്നെ. ദ്വിതീയസംകലിതം[37] അന്ത്യമെന്നു കല്പിച്ചിട്ടു് പിന്നെ പദത്തിൽ ഒരു സംഖ്യ കുറച്ചിട്ടു്, മുമ്പിൽ[38] ചൊല്ലിയപോലെ ഒരു സംകലിതൈക്യത്തെ ഉണ്ടാക്കു. അതിനെ ഉപാന്ത്യമെന്നു കല്പിപ്പൂ. പിന്നെ പദത്തിങ്കന്നു രണ്ടു സംഖ്യ കുറച്ചിട്ടു് ഒരു സംകലിതൈക്യത്തെ വരുത്തൂ. അതു് ഉപാന്ത്യത്തിങ്കന്നു[39] കിഴേതായിട്ടിരിക്കും[40]. എന്നിങ്ങനെ[41] ഏകൈകോനങ്ങളുടെ സംകലിതൈക്യത്തെ ഉണ്ടാക്കുവാൻ ഏകൈകോനങ്ങളുടെ ഘനഷഷ്ഠാംശങ്ങളുടെ യോഗത്തെ ഉണ്ടാക്കേണം. അതു 'ഘനഷഷ്ഠാംശസംകലിത'മായിട്ടിരിക്കും. അത് ഘനസംകലിതത്തിന്റെ ആറൊന്നായിട്ടിരിക്കും

ഘനസംകലിതം പിന്നെ വർഗ്ഗവർഗ്ഗചതുരംശമായിട്ടിരിക്കും എന്നു മുമ്പിൽ ചൊല്ലിയതായി എല്ലോ. എന്നാൽ വർഗ്ഗവർഗ്ഗചതുരംശത്തിന്റെ ഷഷ്ഠാംശം ഘനഷഷ്ഠാംശസംകലിതമായിട്ടിരിക്കും. ആകയാൽ വർഗ്ഗവർഗ്ഗചതുർവ്വിംശാംശം ഘനഷഷ്ഠാംശസംകലിതമാകുന്നത് എന്നു വരും[42]. പിന്നെ നാലാമത് ഈ ന്യായത്തിന്നു തക്കവണ്ണം വർഗ്ഗവർഗ്ഗചതുർവ്വിംശാംശസംകലിതമായിട്ടിരിക്കും. ഇതു[43] പിന്നെ സമപഞ്ചഘാതപഞ്ചാംശത്തിന്റെ ചതുർവ്വിംശാംശം എന്നു വരും. ആകയാൽ പദത്തെ എത്ര[44] ആവൃത്തി പദത്തെ തന്നെക്കൊണ്ടു ഗുണിപ്പൂ അതിങ്കന്നു് ഏകദ്വിത്ര്യാദി[45] അത്ര സംഖ്യകൾ തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതിനെക്കൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ. ഫലം ആദ്യദ്വിതീയാദിസംകലിതത്തിൽ അത്രാമതായിട്ടിരിക്കും എന്നതു[46] തൽപ്രകാരം.

5. ഉപസംഹാരം

ഇവിടെ പിന്നെ വർഗ്ഗസംകലിതം, വർഗ്ഗവർഗ്ഗസംകലിതം, സമഷൾഘാതസംകലിതം എന്നിവറ്റെ ഉണ്ടാക്കേണ്ടൂ. എന്നിട്ടു മൂന്നു് അഞ്ചു തുടങ്ങിയുള്ള സംഖ്യകളെക്കൊണ്ടു ഹരിപ്പാൻ ചൊല്ലീ. ഇവറ്റിന്നു ഹാരകങ്ങളാകുന്നതു വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗം, പിന്നെ വർഗ്ഗവർഗ്ഗം എന്നിവ.

4. 39. C. D. F ഉപാന്ത്യത്തീന്ന്
40. B. തായിരിക്കും
41. B. C. D. F adds പത്തിൽ
42. B. om. എന്നുവരും
43. C. അത്
44 F. അത്ര
45. B. C. ഏകദ്വിത്ര്യാദികൾ
46. F. എന്ന്

എന്നാൽ വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗം കൊണ്ടു് വ്യാസാർദ്ധഘനത്തെ ഹരിച്ചാൽ ഫലം വ്യാസാർദ്ധം തന്നെ. എന്നാൽ വ്യാസാർദ്ധത്തെ മൂന്നിൽ ഹരിച്ചതു നടേത്തെ ഫലയോഗമാകുന്നതു. ഇതു പിന്നെ അതതു ഗുണ്യവും അതതു ഫലവും തങ്ങളിലെ അന്തരങ്ങളുടെ യോഗന്താൻ. എന്നാലതിനെ ഗുണ്യയോഗത്തിങ്കന്നു കളയൂ. അതാകുന്നതു ദിക്സൂത്രാഗ്രത്തിങ്കന്നു തുടങ്ങി കോണോളമുള്ളതു ചതുരശ്രബാഹുവിന്റെ പാതി. ഇവ്വണ്ണം സമപഞ്ചഘാതത്തെ വർഗ്ഗവർഗ്ഗംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാലും വ്യാസാർദ്ധം തന്നെ ഫലം. എന്നാൽ വ്യാസാർദ്ധത്തെ അഞ്ചിൽ ഹരിച്ചതു രണ്ടാം ഫലം. ഇങ്ങനെ ഏഴ്, ഒമ്പത് തുടങ്ങിയുള്ള ഒറ്റപ്പെട്ട സംഖ്യകളെക്കൊണ്ടു വ്യാസാർദ്ധത്തെ ഹരിച്ചാൽ മീത്തെ മീത്തെ ഫലം വരും. ഉണ്ടായ ഫലത്തെ ക്രമേണ വ്യാസാർദ്ധത്തിൽ കളയുകയും കൂട്ടുകയും ചെവൂ. എന്നാൽ പരിധീടെ എട്ടൊന്നുണ്ടാകും. ഇങ്ങനെ ഗുണകാരം ഹാരകത്തേക്കാൾ ചെറുതാകുന്നേടത്തു പിന്നെ പിന്നെ ഫലം കുറകകൊണ്ടു പെരികെ കുറഞ്ഞാൽ പിന്നെ ഫലങ്ങളെ ഉപേക്ഷിച്ച് ഒടുക്കാം ക്രിയ. എന്നാൽ മിക്കതും സൂക്ഷ്മമാകും. എന്നാൽ ദിക്സൂത്രാഗ്രത്തോടു കോണസൂത്രത്തോട് ഇടയിലെ വൃത്തഭാഗം വരും. ഇതിനെ എട്ടിൽ ഗുണിച്ചാൽ വൃത്തം മുഴുവനായിട്ടിരിക്കും. ഹാര്യമാകുന്ന വ്യാസാർദ്ധത്തെ എട്ടിൽ ഗുണിക്കിലുമാം നടേ. എന്നാൽ നാലിൽ ഗുണിച്ച വ്യാസമത്. അപ്പോൾ അതിങ്കൽതന്നെ ഫലം സംസ്കരിക്കേണ്ടതും. എന്നാൽ വൃത്തം വരും.

6. ചാപീകരണം

ഈ ന്യായം കൊണ്ടു തന്നെ ജ്യാവിനെ ചാപിക്കാം–

ഇഷ്ടജ്യാത്രിജ്യയോർഘാതാൽ കോട്യാപ്തം പ്രഥമം ഫലം ।
ജ്യാവർഗ്ഗം ഗുണകം കൃത്വാ കോടിവർഗ്ഗം ച ഹാരകം ॥
പ്രഥമാദിഫലേഭ്യോ/ഥ നേയാ ഫലതതിർ മുഹുഃ ।
ഏകത്ര്യാദ്യോജസംഖ്യാഭിർ ഭക്തേഷ്വേതേഷ്വനുക്രമാൽ ॥
ഓജാനാം സംയുതേസ് ത്യക്ത്വാ യുഗ്മയോഗം ധനുർ ഭവേൽ ।
ദോഃകോട്യോരല്പമേവേഷ്ടം കല്പനീയമിഹ സ്മൃതം ॥

ലബ്ധീനാമവസാനം സ്യാന്നാന്യഥാപി മുഹുഃ കൃതേ ।
വ്യാസവർഗ്ഗാദ് രവിഹതാൽ പദം സ്യാൽ പ്രഥമം ഫലം ।
തദാദിതസ് ത്രിസംഖ്യാപ്തം ഫലം സ്യാദുത്തരോത്തരം
രൂപാദ്യയുഗ്മസംഖ്യാഭിർ ഹൃതേഷ്വേഷു യഥാക്രമം ।
വിഷമാണാം യുതേസ് ത്യക്ത്വാ സമം ഹി പരിധിർ ഭവേൽ

(തന്ത്രസംഗ്രഹവ്യാഖ്യാ ॥ 206–11)

ഇവിടെ ഭുജാകോടിജ്യാക്കളിൽ കുറഞ്ഞതു യാതൊന്ന് അതിനെ ചാപിക്കുംപ്രകാരം ചൊല്ലുന്നതു്[1]. അവിടേയും ഭുജ ചെറുത് എന്നു നടേ കല്പിക്കുന്നതു്. ഈ[2] ഇഷ്ടജ്യാവിനെ വ്യാസാർദ്ധം കൊണ്ടു ഗുണിച്ച കോടിജ്യാവിനെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ചതു നടേത്തെ ഫലമാകുന്നതു്. പിന്നെ ഈ ഫലത്തെത്തന്നെ ഭുജാവർഗ്ഗംകൊണ്ടു ഗുണിച്ച് കോടിവർഗ്ഗംകൊണ്ടു ഹരിച്ചതു രണ്ടാംഫലമാകുന്നത്. പിന്നെ ഈ രണ്ടാംഫലത്തെ ഭുജാവർഗ്ഗം തന്നെകൊണ്ടു ഗുണിച്ച് കോടിവർഗ്ഗം കൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ. രണ്ടാംഫലം ഉണ്ടാക്കിയപോലെ മൂന്നാംഫലത്തേയുമുണ്ടാക്കൂ. പിന്നെ അതതിങ്കന്നു മീത്തെ മീത്തെ ഫലങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കൂ, ഇഗ്ഗുണകാരഹാരകങ്ങളെക്കൊണ്ടു തന്നെ. ഉണ്ടായ ഫലപരമ്പരേ ക്രമത്തിൽ, ഒന്നു്, മൂന്ന്, അഞ്ച്, എന്ന ഒറ്റപ്പെട്ട സംഖ്യകളെക്കൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ. ഫലങ്ങളിൽ നടേത്തേത്, മൂന്നാമത്, അഞ്ചാമതു എന്നിവ ഒക്കത്തങ്ങളിൽ[3] കൂട്ടി ഇതിങ്കന്നു രണ്ടാമത്, നാലാമത്, തുടങ്ങിയുള്ളവറ്റിന്റെ യോഗം കളയൂ, ശേഷം ചാപം. അതിനെ[4] മൂന്നു രാശിയിൽനിന്നു കളഞ്ഞതു കോടിചാപം. കോടിചാപം ചെറുതാകിൽ നടേ കോടിചാപം ഉണ്ടാക്കൂ.

ഇവിടക്കു ഉപപത്തിയാകുന്നത്. വ്യാസാർദ്ധം കൊണ്ടു വൃത്തം വരുത്തുവാൻ ചൊല്ലിയ പോലെ തന്നെ ഇവിടെ ചതുരശ്രമദ്ധ്യത്തിങ്കലെ വൃത്തത്തിങ്കൽ ദിക്സൂത്രത്തിങ്കൽ ശരവും വരുമാറു ജ്യാവു കല്പിക്കുന്നു. വൃത്തകേന്ദ്രത്തിങ്കന്നു ജ്യാവിന്റെ തലയ്ക്കൽ സ്പർശിക്കുന്ന കർണ്ണസൂത്രം വൃത്തത്തിന്റെ പുറത്തെ ചതുരശ്രത്തോളം നീളെ കല്പിപ്പൂ. ഇത് ഇവിടെക്ക്

6. 1. B. om. ചൊല്ലുന്നത്
2. F. om. ഈ
3. B. യോഗത്തെ
4. F. ഇതിനെ

എല്ലായിലും വലിയ കർണ്ണസൂത്രമാകുന്നത്. ഇക്കർണ്ണസൂത്രാഗ്രത്തോട് ദിക്സൂത്രാഗ്രത്തോടുള്ള അന്തരാളത്തിങ്കലെ ചതുരശ്രഭുജാഭാഗം ഇവിടെ നടേത്തെ ഫലമായിട്ടു വരുത്തിയത്. പിന്നെ ഇതു ഗുണ്യമായി ഇതിന്റെ വർഗ്ഗം ഗുണകാരമായി ദിക്സൂത്രവർഗ്ഗം ഹാരകമായിട്ടു മീത്തെ മീത്തെ ഫലങ്ങളെ വരുത്തുവാൻ നടേ ചൊല്ലീ. അവിടെ എല്ലാ ഫലത്തിന്നും ഭുജാഭാഗം തന്നെ ഗുണ്യമായി കല്പിക്കുമ്പോൾ, ഗുണഹാരങ്ങൾ തുല്യങ്ങളായിട്ടിരിക്കും. അതു ഹേതുവായിട്ട് ഗുണ്യംതന്നെ ഫലമായിട്ടിരിക്കും എല്ലാടവും. എന്നിട്ട് ഗുണ്യത്തെത്തന്നെ ഓജസംഖ്യകളെക്കൊണ്ടു ഹരിക്കുന്നൂ. ഇവിടെ പിന്നെ ഭുജാകോടികളാകുന്ന ഗുണഹാരങ്ങൾ തുല്യങ്ങളല്ലായ്കയാൽ ഫലങ്ങൾ പിന്നെ പിന്നെ കുറഞ്ഞിട്ടേ വരൂ. എന്നിട്ടു ഫലങ്ങളെല്ലാറ്റേയും ക്രമേണ ഉണ്ടാക്കേണം. എന്നാലൊ ചെറിയ ഗുണഹാരങ്ങളെ കൊള്ളുക എല്ലൊ എളിയത്. എന്നിട്ട് ഒടുക്കത്തെ കർണ്ണവും ദിക്സൂത്രവും ഉള്ള അന്തരാളം ചതുരശ്രഭുജാഭാഗമല്ല ഇവിടെ ഗുണകാരമായിട്ടു കൊള്ളുന്നത്, വൃത്തത്തിന്റെ അകത്തൂടെ അന്തരാളം. അതു ജ്യാവാകുന്നത്. അപ്പോൾ അതിന്റെ കോടി ഹാരകവും അതതു ഫലം ഗുണ്യവും എന്നിവിടെ വിശേഷമാകുന്നത്. ഇവിടേയും ഓജസംഖ്യകളെക്കൊണ്ടു ഹരിക്കുന്നൂ, വർഗ്ഗസംകലിതാദി വരുത്തുവാൻ, ഇങ്ങനെ[5] ചാപീകരണം.

7. പ്രകാരാന്തരേണ പരിധ്യാനയനം

അനന്തരം[1] ഈ[2] വിശേഷന്യായത്തിന്നു തക്കവണ്ണം വ്യാസം കൊണ്ടു വൃത്തം വരുത്തും[3] പ്രകാരം. ഇവിടെ[4] ഇഷ്ടവ്യാസവർഗ്ഗത്തെ പന്ത്രണ്ടിൽ ഗുണിച്ചു മൂലിച്ചതു നടേത്തെ ഫലം. ഇതിനെ മൂന്നിൽ ഹരിച്ചത്[5] രണ്ടാം ഫലം. രണ്ടാം ഫലത്തെ മൂന്നിൽ ഹരിച്ചതു് മൂന്നാമത്. പിന്നെ അതിനെ അതിനെ മൂന്നിൽ ഹരിച്ചതു മീത്തെ മീത്തെ ഫലം. പിന്നെ ഇങ്ങനെ

6. 5. B. ഇതി
7. 1. B. അഥ
2. C. om. ഈ
3. F. വരുത്തേണ്ടും
4. B. om. ഇവിടെ; C. D. F അവിടെ
5. D. C. രണ്ടാം ഫലം നടേത്തെ മുന്നിൽ
6. F. ഫലങ്ങളിൽ

ഉണ്ടാക്കിയ ഫലങ്ങളെ ക്രമേണ ഒന്ന്, മൂന്ന് എന്നു തുടങ്ങിയുള്ള ഓജസംഖ്യകളെക്കൊണ്ടും ഹരിപ്പൂ. ഫലങ്ങൾ[6] നടേത്തേതു മൂന്നാമത്തേതു തുടങ്ങിയുള്ളവറ്റെ തങ്ങളിൽ[7]കൂട്ടിയതിങ്കന്നു രണ്ടാമത്, നാലാമത് തുടങ്ങിയുള്ള[8] യോഗത്തെ കളയൂ. ശേഷം പരിധി.

ഇവിടെ വൃത്തത്തിൽ പന്ത്രണ്ടാലൊന്നു നടേ ഉണ്ടാകുന്നത്. പിന്നെ പന്ത്രണ്ടിൽ ഗുണിപ്പൂ. യാതൊരുപ്രകാരം നടേ വൃത്തത്തിൽ എട്ടൊന്നിനെ ഉണ്ടാക്കി അവ്വണ്ണമിവിടേയും. മുമ്പിൽ ചാപീകരണത്തിങ്കൽ ചൊല്ലിയപോലെ വൃത്തത്തിങ്കൽ ജ്യാവു കല്പിപ്പൂ. ദിക്സൂത്രത്തിങ്കന്നു ഇരുപുറവും വൃത്തത്തിൽ പന്ത്രണ്ടാലൊന്നു ചെന്നേടത്തു ജ്യാവിന്റെ രണ്ടഗ്രവും വൃത്തത്തെ സ്പർശിക്കുമാറു കല്പിപ്പൂ. അപ്പോൾ അതു വൃത്തത്തിന്റെ ആറൊന്നിന്റെ സമസ്തജ്യാവായിട്ടു ഇരിക്കും. ദിക്സൂത്രത്തിങ്കൽ നടുവ്, ഇതിൽ പാതി പന്ത്രണ്ടാലൊന്നിന്റെ അർദ്ധജ്യാവ്. അതു വ്യാസത്തിന്റെ നാലൊന്ന് എന്നു നിയതം, ആറൊന്നിന്റെ സമസ്തജ്യാവ് വ്യാസാർദ്ധത്തോടു തുല്യം എന്നിട്ട്. ഇങ്ങനെ വ്യാസാർദ്ധതുല്യങ്ങളായിട്ടു[9] ആറുജ്യാക്കളെക്കൊണ്ടു[10] വൃത്തം തികയും. ഇവിടെ വൃത്തകേന്ദ്രത്തിങ്കന്നു ജ്യാവിന്റെ തലക്കൽ വൃത്തത്തെ സ്പർശിക്കുന്ന കർണ്ണസൂത്രം യാതൊരിടത്തു ചതുരശ്രബാഹുവിങ്കൽ സ്പർശിക്കുന്നൂ അവിടന്നു ദിക്സൂത്രാഗ്രത്തോളമുള്ള ചതുരശ്രബാഹുഭാഗം[11] ഇവിടെ നടേത്തെ ഫലം, എന്നിട്ടു വരുത്തുന്നൂ. ഇതിനെക്കൊണ്ടു പിന്നെ ഇക്കർണ്ണസൂത്രാഗ്രത്തോടു ദിക്സൂത്രാഗ്രത്തോടുള്ള അന്തരാളത്തിങ്കലെ വൃത്തഭാഗത്തെ വരുത്തുന്നു. അതിനെ പിന്നെ പന്ത്രണ്ടിൽ പെരുക്കേണ്ടുകയാൽ നടേത്തെ ഫലത്തെ തന്നെ പന്ത്രണ്ടിൽ പെരുക്കിയതിനെ നടേ ഉണ്ടാക്കുന്നൂ. ഇവിടെ വ്യാസത്തിൽ നാലൊന്നു പരിധിദ്വാദശാംശജ്യാവ് എന്നിരിക്കയാൽ ഈ ജ്യാവർഗ്ഗം വ്യാസവർഗ്ഗത്തിൽ പതിനാറാലൊന്ന്. ഈ ജ്യാവർഗ്ഗത്തിന്റെ നാന്മടങ്ങു വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗം. വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗത്തിൽ നാലൊന്നു പോയശേഷം മുക്കൂറും കോടിവർഗ്ഗം. ഇവിടെ ഈ കോടിവർഗ്ഗം ഹാരകം, വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗം ഗുണകാരം ഈ ജ്യാവർഗ്ഗത്തിന്ന്. എന്നിട്ട്

7. 7. B. തമ്മിൽ
8. B. തുടങ്ങിയുള്ളവറ്റെ
9. D. F. ജ്യാവുകൊണ്ടു
10. B. C. D. തുല്യമായിരിക്കുന്ന; F. ആയിട്ടിരിക്കുന്ന
11. B. gap for ബാഹുഭാഗം, C. D. F ചതുരശ്രഭാഗത്തെ

അപവർത്തിച്ചാൽ നാലു ഗുണകാരം. മൂന്നു ഹാരകം എന്നു വരും. വ്യാസവർഗ്ഗത്തെ പതിനാറിൽ ഹരിച്ചിരിക്കുന്ന ജ്യാവർഗ്ഗം ഗുണ്യം, ഫലം കർണ്ണാഗ്രത്തോടു ദിക്സൂത്രാഗ്രത്തോടുള്ള അന്തരാളത്തിങ്കലെ ചതുരശ്രബാഹുഭാഗവർഗ്ഗം. അതിനെ പന്ത്രണ്ടിന്റെ വർഗ്ഗംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു മൂലിപ്പൂ. എന്നാലിവിടെ പന്ത്രണ്ടിന്റെ വർഗ്ഗവും നാലും ഗുണകാരം. തങ്ങളിൽ[12] ഗുണിച്ചാൽ ഇരുപത്തിനാലിന്റെ വർഗ്ഗം. പതിനാറും മൂന്നും ഹാരകം തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ച നാല്പത്തെട്ടുകൊണ്ടു ഇരുപത്തിനാലിന്റെ വർഗ്ഗത്തെ ഹരിച്ചാൽ ഫലം പന്ത്രണ്ട്. എന്നിട്ടു പന്ത്രണ്ടിൽ ഗുണിപ്പാൻ ചൊല്ലീ വ്യാസവർഗ്ഗത്തെ. ഇതിന്റെ മൂലം വൃത്തത്തിന്നു പുറമേ ഒരു ഷഡശ്രബാഹ്വർദ്ധം. ഇവിടെ വൃത്തത്തിന്നകത്തെ ഷഡശ്രകോണിങ്കൽ സ്പർശിക്കുന്ന കർണ്ണസൂത്രവും പുറത്തേ ഷഡശ്രകോണിങ്കലും സ്പർശിക്കും. ഇങ്ങനെ സംസ്ഥാനം.

പിന്നെ പുറത്തെ ഷഡശ്രബാഹുവിന്റെ അർദ്ധം ഗുണ്യം, ജ്യാവർഗ്ഗം ഗുണകാരം, കോടിവർഗ്ഗം ഹാരകം, ഇങ്ങനെ രണ്ടാം ഫലം വരുത്തൂ, ചാപീകരണത്തിങ്കൽ ചൊല്ലിയതുപോലെ. പിന്നെ ഈ രണ്ടാമതു തുടങ്ങിയുള്ള ഫലങ്ങളെ ഗുണ്യമാക്കി ഇഗ്ഗുണഹാരങ്ങളെക്കൊണ്ടുതന്നെ മീത്തെ മീത്തെ ഫലങ്ങളേയും ഉണ്ടാക്കൂ. ഇവിടെ പിന്നെ ഗുണഹാരങ്ങളെ അപവർത്തിക്കുമ്പോൾ ഒന്നു ഗുണകാരം, മൂന്നു ഹാരകം എന്നു വരും, ഏകരാശിജ്യാവു വ്യാസത്തിൽ നാലൊന്ന് എന്നിട്ട്. എന്നാൽ അതതു ഫലത്തെ മൂന്നിൽ തന്നെ ഹരിച്ചാൽ മീത്തെ മീത്തെ ഫലം വരും. പിന്നെ ഒന്ന്, മൂന്നു തുടങ്ങിയുള്ള ഓജസംഖ്യകളെക്കൊണ്ടും ഹരിപ്പൂ. പിന്നെ ഫലങ്ങളിൽ ഓജങ്ങളുടെ യോഗത്തിങ്കന്നു യുഗ്മങ്ങളുടെ യോഗത്തെ കളയൂ. ശേഷം പരിധി. ഇങ്ങനെ വ്യാസം കൊണ്ടു പരിധിദ്വാദശാംശത്തെ വരുത്തും പ്രകാരം.

8. സൂക്ഷ്മപരിധ്യാനയനത്തിങ്കൽ സംസ്കാരങ്ങൾ

എങ്ങനെ പിന്നെ ഇവിടെ പിന്നെയും പിന്നെയും മീത്തെ മീത്തെയുള്ള വിഷമസംഖ്യകൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലങ്ങളെ സംസ്കരിച്ചിരിക്കുന്നതു

7. 12. B. തമ്മിൽ
8. 1. F. വരുന്നു

പരിധിയോട് അടുത്തു വന്നൂ[1] ഒടുക്കത്തെ സംസ്കാരം ചെയ്താൽ എന്ന പ്രകാരത്തെ ചൊല്ലുന്നൂ.

അവിടെ ഇച്ചൊല്ലിയ സംസ്കാരം തന്നെ സൂക്ഷ്മമോ അല്ലയോ എന്നു നടേ നിരുപിക്കേണ്ടുവത്. അതിനായിക്കൊണ്ട് ഏതാനും ഒരു വിഷമസംഖ്യയെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലം സംസ്കരിച്ച് അനന്തരം വേറെ വെച്ചു സംസ്കാരം ചൈവൂ. അനന്തരം വേറെ ഇരിക്കുന്നതിൽ മീത്തെ വിഷമസംഖ്യാഹൃതഫലത്തെ സംസ്കരിച്ച് അതിനു മീത്തെ സമസംഖ്യകൊണ്ടു സംസ്കാരം ചൈവൂ. എന്നാലുണ്ടാകുന്ന പരിധികൾ രണ്ടും തുല്യങ്ങൾ എന്നാവൂ ഇരിപ്പത് എങ്കിൽ സംസ്കാരം സൂക്ഷ്മമെന്നു കല്പിച്ചാലും. എങ്ങനെ എന്ന്. രണ്ടു പരിധിക്കും സംഖ്യാസാമ്യമുണ്ട് എന്നാവൂ ഇരിപ്പത് എങ്കിൽ സംസ്കാരത്തിന്നു സർവ്വസാധാരണത്വമുണ്ട്. എന്നാൽ മീത്തെ മീത്തെ വിഷമസംഖ്യാഹരണാനന്തരം സംസ്കാരം ചൈതാലും അവണ്ണം വരുമെത്രെ. എന്നാൽ മുമ്പിലെ സംഖ്യകൾകൊണ്ടു സംസ്കാരം ചൈതതു തന്നെ സൂക്ഷ്മമെത്രെ എന്നു് അറിയേണം. അവ്വണ്ണം വരൂ പിന്നെ.

മീത്തെ വിഷമസംഖ്യകൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലവും അതിന്റെ സംസ്കാരഫലവും തങ്ങളിലുള്ള അന്തരവും മുമ്പിലെ സംസ്കാരത്തോടു[2] തുല്യം എങ്കിലേ പരിധികൾ രണ്ടും തുല്യമായിട്ടു വരൂ. എന്നാൽ ഏതാനും ഒരു വിഷമസംഖ്യകൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലത്തോടു തുല്യമായിട്ടിരിപ്പൂ കീഴെ സംസ്കാരഫലവും മീത്തെ[3] സംസ്കാരഫലവും ഉള്ള യോഗം. യാതൊരുപ്രകാരം തുല്യമായിട്ടു[4] വരൂ[5] അവ്വണ്ണം സംസ്കാരം ചെയ്യേണം

ഇവിടെ രണ്ടു സംസ്കാരഹാരകങ്ങളും ഇരട്ടിച്ച വിഷമസംഖ്യയോട് ഒത്തുവരും എന്നാവൂ ഇരിപ്പത്. എങ്കിൽ[6] രണ്ടു സംസ്കാരഫലങ്ങളുടെ യോഗം വിഷമസംഖ്യാഫലത്തോട് ഒത്തിരിക്കും. ഇവിടെ രണ്ടു

---

8. 2. F. സംസ്ക്കാരഫലത്തോടു
3. D. adds അത്
3. F. om. മീത്തെ സംസ്ക്കാര
4. B. തുല്യമായി
5. F. വരുന്നു
6. C. D. F. ഇരിപ്പതെങ്കിൽ
7. B. ഹാരകം

സംസ്കാരഹാരകവും കൂടി ഇരട്ടിച്ച വിഷമസംഖ്യയോടു തുല്യമായിട്ടു് ഒരിക്കലും സംഭവിക്കയില്ല. അതു എങ്ങനെ എന്ന്. ഇവിടെ വിഷമസംഖ്യയെ ഇരട്ടിച്ചതിനോടു തുല്യമാകേണമെല്ലോ സംസ്കാരഹാരം[7]. എന്നിട്ടു് ഇവിടെ ഏതൊരു[8] വിഷമസംഖ്യയെ ഒടുക്കത്തെ ഹാരകമായിക്കൊണ്ടത് അതിനു മീത്തെ വിഷമസംഖ്യയെ ഇരട്ടിച്ചതു നടേത്തെ സംസ്കാരഹാരകം എന്നു ചൊല്ലൂ. എങ്കിൽ രണ്ടാം സംസ്കാരഹാരകം അതിനു മീത്തെ വിഷമസംഖ്യയെ ഇരട്ടിച്ചതു എന്നു വരും; ഒരുപ്രകാരം[9] ചൊല്ലേണമെല്ലോ എന്നിട്ട്. അപ്പോൾ ഇത്[10] കീഴെ വിഷമസംഖ്യ[11] ഇരട്ടിച്ചതിൽ നാലേറീട്ടിരിക്കും. എന്നിയെ ഇതു ദ്വിഘ്നവിഷമസംഖ്യയോടു തുല്യമാകുന്നത് എന്നാവൂ കല്പിച്ചത് എങ്കിൽ കീഴേത് നാലു കുറഞ്ഞിട്ടിരിക്കും. എന്നാൽ രണ്ടു സംസ്കാരഹാരകവും കൂടി ദ്വിഘ്നവിഷമസംഖ്യയോട് ഒത്തിരിക്കുമാറ് വരാ ഒരു പ്രകാരവും സംസ്കാരഹാരകം.

എന്നിട്ടു രണ്ടു സംസ്കാരഹാരകവും ഒരു ദ്വിഘ്നവിഷമസംഖ്യയോടു അണവ്[12] ഉണ്ടാവൂ എവ്വണ്ണമാകുമ്പോൾ അവ്വണ്ണം ചൊല്ലുകേ അപ്പോളുള്ളൂ. എന്നിട്ടിവിടെ രണ്ടു സംഖ്യകൊണ്ടു അന്തരമുള്ളവറ്റെ ഇരട്ടിച്ചാൽ തങ്ങളിൽ നാല് അന്തരിച്ചിരിക്കും. ഇവറ്റിൽ ഏതാനും കൂട്ടിത്താൻ കളഞ്ഞു താനിരിക്കുന്നവറ്റെ ഇരട്ടിച്ചാലുമവ്വണ്ണന്തന്നെ അന്തരമായിട്ടിരിക്കുമെത്രെ. എന്നിട്ട് ഒരു ഹാരകം ഇരട്ടിച്ച വിഷമസംഖ്യയിങ്കന്നു രണ്ടു കുറഞ്ഞിരിപ്പൂ, മറ്റേതു രണ്ടേറീട്ടുമിരിപ്പൂ. അവ്വണ്ണം വരേണമെന്നതിനായിക്കൊണ്ട് മീത്തെ സമസംഖ്യയെ ഇരട്ടിച്ചതു സംസ്കാരഹാരകമെന്നു ചൊല്ലീ.

അനന്തരമീവണ്ണമുണ്ടാക്കുമ്പോളെത്രയുണ്ടു സംസ്കാരത്തിന്നു സ്ഥൌല്യമുള്ളത് എന്ന് അറിവാനായിക്കൊണ്ട് രണ്ടു സംസ്കാര ഫലങ്ങളുടെ യോഗവും നടുവിലെ വിഷമസംഖ്യാഫലവും തങ്ങളിലെ അന്തരാളത്തെ[13] ഉണ്ടാക്കുവാനായിക്കൊണ്ട് സംസ്കാരഹാരകങ്ങൾ രണ്ടിനേയും വിഷമസംഖ്യയും ഇവ മൂന്നിനേയും സമച്ഛേദങ്ങളാക്കി ചമക്കൂ. എന്നാൽ തങ്ങളിൽ അന്തരിക്കാം.

---

8. 8. F. യാതൊരു
9. C. D. F.Add. തന്നെ
10. C. om. ഇതു
11. F. add. B. കൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലം സംസ്കരിച്ച്
12. F. അണുവുണ്ടാവും അവ്വണ്ണ
13. F. അന്തരത്തെ

ഇവിടെ സംഖ്യ അറിഞ്ഞേ സമച്ഛേദങ്ങളാക്കാവൂ. സംഖ്യ ഇങ്ങനെ എന്നു വരുകിൽ എല്ലാടത്തേയ്ക്കും കൊള്ളരുതെന്നു വരും. എന്നേടത്തേയ്ക്കു സംഖ്യ അറിയാതേയും സമച്ഛേദങ്ങളാക്കുവാനുണ്ടുപായം, ധനർണ്ണപരികല്പനംകൊണ്ട്. അത് എങ്ങനെ എന്ന്. അതുണ്ടു ചൊല്ലീട്ട്–

ഋണമൃണധനയോർ ഘാതോ

ധനമൃണയോർ ധനവധോ ധനം ഭവതി

(ബ്രഹ്മസ്ഫുടസിദ്ധാന്തം, 18.33)

എന്നു തുടങ്ങീട്ട്. യാതൊരു രാശി ഋണഭൂതമായിരിക്കുന്നൂ, യാതൊരു രാശി ധനഭൂതമായിട്ടും ഇരിക്കുന്നൂതും അവ[14] തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചുണ്ടായ സംഖ്യയെ ഋണമായിട്ടിരിപ്പൊന്ന് എന്നറിയേണം. പിന്നെ ധനമായിട്ടിരിക്കുന്ന[15] രണ്ടു രാശികൾ തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചത് ധനങ്ങളായിട്ടിരിപ്പോന്ന്[16], പിന്നെ ഋണങ്ങൾ തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതും ധനമായിട്ടിരിപ്പോന്ന്, എന്നിങ്ങനെ അറിയേണം.

പിന്നെ സംഖ്യ അറിയാതെ രാശിവെക്കുംപ്രകാരം ഇങ്ങനെ എന്നും അറിയേണം. അതു എങ്ങനെ എന്ന്. ഇവിടെ സംഖ്യ അറിയാത്ത രാശി എത്ര സംഖ്യയായിട്ടുള്ളൂ എന്നുണ്ടല്ലോ ഉള്ളൂ അത്ര സംഖ്യകൊണ്ട് അതതു സ്ഥാനത്തിങ്കന്നു മീത്തെ സ്ഥാനത്തു കരേറുന്നു എന്നു കല്പിക്കുന്നത്, മറ്റെല്ലാംപോലെ ഒന്ന്, പത്ത്, നൂറ് എന്നിങ്ങനെ പതിന്മടങ്ങല്ല സ്ഥാനാന്തരങ്ങളെ കല്പിക്കുന്നൂ. ഈവണ്ണമാകുമ്പോൾ ആദിയിങ്കലെ രൂപസ്ഥാനം. അവിടെ ആ രാശിയിങ്കലെ സംഖ്യയോളം തികഞ്ഞാൽ രണ്ടാം സ്ഥാനത്തു കരേറൂ. എന്നിട്ട് രണ്ടാമതു രാശിസ്ഥാനം, രണ്ടാംസ്ഥാനത്ത് ഒന്നുണ്ടാകുമ്പോൾ രാശിതുല്യസംഖ്യ അത് എന്നു അറിയേണ്ടൂ. എന്നിട്ട് രണ്ടാംസ്ഥാനത്തിന്നും അത്ര സംഖ്യകൊണ്ടു കരേറുകയാൽ മൂന്നാംസ്ഥാനം രാശിയുടെ വർഗ്ഗസ്ഥാനം. പിന്നേയുമവ്വണ്ണമാകയാൽ നാലാമതു ഘനസ്ഥാനം. പിന്നെ വർഗ്ഗവർഗ്ഗസ്ഥാനം. അവ്വണ്ണം സമപഞ്ചഘാത-സമഷൾഘാതാദിസ്ഥാനങ്ങൾ മീത്തെ മീത്തേത് എന്ന് അറിയേണ്ടൂ. അതുണ്ടു ചൊല്ലീട്ട്–

"അവ്യക്ത-വർഗ്ഗ-ഘന-വർഗ്ഗവർഗ്ഗ-പഞ്ചഹതഷഡ്ഢതാദീനാം സ്ഥാനാനി"

8. 14. F. adds രണ്ടും
15. F. ധനങ്ങളായിരിക്കുന്ന
16. F. ധനമായിട്ടി.......

എന്നു തുടങ്ങീട്ട്.

ഇവിടെ ഒടുക്കത്തെ വിഷമസംഖ്യ രാശി എന്നു കല്പിച്ചുവെക്കും പ്രകാരത്തെ കാട്ടുന്നൂ. അവിടെ രണ്ടു വരിയായി ചില ഖണ്ഡങ്ങളെ എഴുതൂ, ഓരോ സ്ഥാനം ഓരോ ഖണ്ഡത്തിൽ അകപ്പെടുമാറ്. അതിൽ മീത്തെ വരി അംശകോഷ്ഠങ്ങൾ, കീഴെ വരി ഛേദകോഷ്ഠങ്ങൾ എന്നിങ്ങനെ കല്പിച്ചുവെയ്ക്കും പ്രകാരത്തെ കാട്ടുന്നൂ. വിഷമസംഖ്യ $\boxed{1}\boxed{0}$. ഇവിടെ ഋണഭൂതമായിരിക്കുന്ന രാശിക്ക് ഏതാനും ഒരു അടയാളം കൂടി വെച്ചുകൊള്ളണം. ശൂന്യത്തിന്ന് യാതൊരു വസ്തു വെക്കുന്നത് അതു താൻ. ഇവിടെ നടേത്തെ സംസ്കാരഹാരകം രാശിയെ ഇരട്ടിച്ചതിങ്കന്നു രണ്ടു കുറയും. അതിന്നു രണ്ടാം സ്ഥാനത്തു രണ്ട്. നടേത്തെ സ്ഥാനത്ത് ഋണരൂപമായിട്ടു രണ്ട് $\boxed{2}\boxed{2}^{0}$. പിന്നെ രണ്ടാം സംസ്കാരഹാരകം രാശിയെ ഇരട്ടിച്ചതിങ്കന്നു രണ്ടേറും. അതിന്നു രണ്ടാം സ്ഥാനത്ത് രാശി ഇരട്ടി, എന്നിട്ട് രണ്ടു നടേത്തെ സ്ഥാനത്തെ ധനരൂപമായിട്ടു, രണ്ടു രൂപവും $\boxed{2}\boxed{2}$. ഇങ്ങനെ വെക്കും പ്രകാരം.

പിന്നെ ഇവ മൂന്നും ഛേദങ്ങൾ എന്നു കല്പിച്ച് ഇവറ്റയ്ക്ക് ഓരോ രൂപം അംശമെന്നും കല്പിച്ച്,

> അന്യോന്യഹാരാഭിഹതൌ ഹരാംശൌ
>
> രാശ്യോസ്സമച്ഛേദവിധാനമേവം. (ലീലാവതി, 30)

എന്നതിന്നു തക്കവണ്ണം സമച്ഛേദങ്ങളാക്കുമ്പോൾ ഇവറ്റെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ച സമച്ഛേദങ്ങളായിട്ടുണ്ടാകും. ഛേദമൊന്നേ വരും[17]. അതാകുന്നതു നടേത്തേതു[18] ശൂന്യം, രണ്ടാം സ്ഥാനത്തു ഋണമായിട്ടു നാല്, മൂന്നാംസ്ഥാനത്തു ഋണവും ധനവും നന്നാലുണ്ടാകകൊണ്ടു തങ്ങളിൽ മാറീട്ടു ശൂന്യം, നാലാം സ്ഥാനത്തു നാല്. ഇങ്ങനെ ഛേദസംഖ്യ. പിന്നെ വിഷമസംഖ്യകൊണ്ടു[19] ഹരിച്ച അംശം നടേത്തെ സ്ഥാനത്തു ഋണമായിട്ട് നാല്. രണ്ടാം സ്ഥാനത്തു ശൂന്യം, മൂന്നാം സ്ഥാനത്തു നാല്. രണ്ടാം സംസ്കാരഹാരകംകൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലത്തിങ്കലെ അംശം[20] പിന്നെ നടേത്തെ സ്ഥാനത്തു ശൂന്യം, രണ്ടാം സ്ഥാനത്തു ഋണമായിട്ടു രണ്ട്, മൂന്നാംസ്ഥാനത്തു

8. 17. F. ഒന്നു വരും
18. F. നടേത്തേ സ്ഥാനത്ത്
19. E. തങ്ങളിൽ മാറീട്ടു ഹരിപ്പ്
20. F. അംശകത്തീന്ന്; om. പിന്നെ

ധനമായിട്ടു രണ്ട്. പിന്നെ നടേത്തെ സംസ്കാരഹാരകംകൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലത്തിങ്കലെ അംശത്തിന്ന് നടേത്തെ സ്ഥാനത്തു ശൂന്യം, രണ്ടാം സ്ഥാനത്തും മൂന്നാംസ്ഥാനത്തും ഈരണ്ട്. 'സംസ്കാരഫലയോഗം' പിന്നെ നടേത്തെ സ്ഥാനങ്ങൾ രണ്ടിങ്കലും ശൂന്യം മൂന്നാംസ്ഥാനത്തു നാല്.

വിഷമസംഖ്യാപ്തം		4	0	4^{O}
	4	0	4^{O}	O
പ്രഥമഹാരാപ്തം		2	2	0
	4	0	4^{O}	0
ദ്വിതീയഹാരാപ്തം		2	2^{O}	0
	4	0	4^{O}	0
സംസ്കാരഫലയോഗം		4	4	0
	4	0	4^{O}	0

എന്നാൽ സംസ്കാരഫലയോഗം വിഷമസംഖ്യകൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലത്തിൽ നാലേറും. എന്നാൽ മീത്തെസ്സമസംഖ്യ ഇരട്ടിച്ചത് സംസ്കാരഹാരകമെന്നു കല്പിക്കുമ്പോൾ ഒടുക്കത്തെ വിഷമസംഖ്യാഘനത്തെ തന്റെ മൂലം കളഞ്ഞിരിക്കുന്നതുകൊണ്ടു[21] നാലിൽ ഗുണിച്ചിരിക്കുന്ന[22] വ്യാസത്തെ ഹരിച്ചഫലം സ്ഥൌല്യമാകുന്ന അംശം എന്ന് അറിയേണ്ടുവത്. ഇവ്വണ്ണമാകുമ്പോൾ സംസ്കാരഫലം വേണ്ടതിങ്കന്ന് ഏറിപ്പോയെല്ലോ.

എന്നിട്ടു[23] സംസ്കാരാന്തരത്തെ ഓർക്കും പ്രകാരം. ഇവിടെ രണ്ടു ഹാരകത്തിലും[24] ഓരോന്നു കൂട്ടിക്കൊള്ളൂ എന്നു കല്പിക്കുന്നത്. ഇവിടെ

8. 21. F. ക്കുന്നതിനെക്കൊണ്ടു
22. D. F. ഗുണിച്ച
23. B. പിന്നെ ഈ
24. F. ഹാരകത്തിങ്കലും
25. F.om. ഹാരകങ്ങളും

മൂന്നു ഹാരകങ്ങളും[25] തമ്മിൽ ഗുണിച്ചതെല്ലോ സമച്ഛേദമാകുന്നത് അതതിന്റെ അംശമാകുന്നതു മറ്റെ ഹാരകങ്ങൾ രണ്ടും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചത് അവിടെ[26] വിഷമസംഖ്യ അംശമാകുന്നത് സംസ്കാരഹാരകങ്ങൾ രണ്ടും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചത്. ഇവിടെ[27] അസ്സംസ്കാരഹാരകങ്ങളിൽ[28] രണ്ടിങ്കലും[29] ഓരോ സംഖ്യകൂട്ടി തങ്ങളിൽ ഗുണിക്കുമ്പോൾ എത്ര ഉണ്ട് ഏറുവത് നടേത്തേതിൽ എന്നു ഓർക്കുന്നത്. അവിടെ ഒന്നിൽ കൂട്ടിയ ഒന്നിനെ മറ്റെ ഹാരകംകൊണ്ടു ഗുണിപ്പൂ. അവിടെ കൂട്ടിയതിനെ മറ്റെ ഹാരകത്തിൽ ഒന്നു കൂട്ടിയതിനെക്കൊണ്ടു ഗുണിപ്പൂ. പിന്നെ അവ രണ്ടും തങ്ങളിൽ[30] കൂട്ടൂ. അതു് ഓരോന്നു കൂട്ടിയാൽ ഏറുന്ന അംശമാകുന്നത്. ഇവിടെ രണ്ടു ഹാരകങ്ങളേയും ഒരു രൂപം കൊണ്ടെല്ലൊ ഗുണിക്കേണ്ടൂ. എന്നിട്ട് ഈ സംസ്കാരഹാരയോഗത്തെ രൂപത്തെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ചുകൊള്ളാം. സംസ്കാരഹാരയോഗം പിന്നെ. നാലിൽ ഗുണിച്ച രാശിയോടൊക്കും ഒരു ഹാരകം, രാശിയെ ഇരട്ടിച്ചതിൽ രണ്ടു കുറയും മറ്റേതു രണ്ടേറും എന്നിട്ട്. എന്നാൽ സമച്ഛേദമായിരിക്കുന്ന വിഷമസംഖ്യേടെ അംശത്തിങ്കൽ നാലിൽ ഗുണിച്ച രാശിയും ഒരു രൂപവുമേറും നടേത്തെ സംസ്കാരഹാരകത്തിങ്കലെ അംശം. പിന്നെ വിഷമസംഖ്യയും രണ്ടാം സംസ്കാരഹാരകവും തങ്ങളിൽ[31] ഗുണിച്ചത്. അവിടെ രണ്ടാംഹാരകത്തിൽ[32] ഒന്നേറുകകൊണ്ട് രാശിതന്നെ ഏറുമെത്രെ. ദ്വിതീയഹാരാംശത്തിങ്കലും ഇത്രതന്നെ ഏറുമെത്രെ[33]. എന്നാൽ സംസ്കാരഹാരകങ്ങളുടെ അംശയോഗത്തിങ്കൽ[34] മുമ്പിലേതിൽ രാശിയെ ഇരട്ടിച്ചതു ഏറും. വിഷമസംഖ്യാംശത്തിങ്കൽ[35] നാലിൽ ഗുണിച്ച രാശിയും ഒരു രൂപവും ഏറും. എന്നാൽ ഇപ്പോൾ രാശിസ്ഥാനത്തിങ്കലും[36]കൂടി സ്ഥൌല്യമുണ്ടായി എന്നു[37] വന്നൂ. മുമ്പിൽ രൂപസ്ഥാനത്തിലേ സ്ഥൌല്യമുള്ളൂ.

---

8. 26. B.C. F. om. അവിടെ
27. B. ആ
28. C. D. F ഹാരകങ്ങളിൽ
29. F. രണ്ടിലും
30. B. തമ്മിൽ
31. B. തമ്മിൽ
32. C. D ഹാരകത്തിങ്കൽ
33. F. om. അത്രേ
34. B. F. യോഗത്തിങ്കന്ന്
35. C. D. F. add പിന്നെ
36. B. C. D. F. സ്ഥാനത്തും
37. B. മുണ്ടെന്നു

എന്നാൽ സംസ്കാരഹാരകങ്ങളിൽ ഒന്നു തികയെ കൂട്ടരുതെന്നു വന്നു. എങ്കിൽ പിന്നെ എത്ര കൂട്ടൂ? എന്നിട്ട് ഒന്നു തികയെ കൂട്ടിയാറെ വിഷമസംഖ്യേടെ അംശത്തിങ്കൽ നാലിൽ ഗുണിച്ച രാശി ഏറും. മറ്റേവറ്റിന്റെ യോഗത്തിങ്കൽ രണ്ടിൽ ഗുണിച്ചത് ഏറും. ഇവിടെ പിന്നെ തന്നെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ച രൂപത്തെ കൂട്ടുമ്പോൾ ഇതിൽ പാതി രൂപമേ ഏറി ഇരിപ്പൂ, സംസ്കാരഹാരകങ്ങൾ ഇരട്ടിച്ച രാശിയോടു മിക്കതും തുല്യമെല്ലോ, എന്നിട്ട്. ഇവിടെ രൂപാന്തരം ഒന്നേയുള്ളൂ. നാലു രൂപാന്തരം ഉണ്ടാകയും വേണം, വിഷമസംഖ്യാംശത്തിങ്കൽ മറ്റേവ രണ്ടിന്റേയും യോഗത്തിങ്കന്നു നാലു കുറയുമെല്ലൊ എന്നിട്ട്. എന്നാൽ മുമ്പിൽ കല്പിച്ച സംസ്കാരഹാരകങ്ങളിൽ തന്നെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ച നാലു രൂപങ്ങൾ കൂട്ടേണം. അപ്പോൾ വിഷമസംഖ്യയിങ്കലെ അംശത്തിങ്കൽ മിക്കവാറും എട്ടു രൂപമേറും, മറ്റേവ രണ്ടിന്റേയും യോഗത്തിങ്കൽ നാലു രൂപമേറും. എന്നാൽ ഇപ്പോൾ മിക്കതും സൂക്ഷ്മമായി എന്നു കല്പിച്ചിട്ട്, തന്നെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ച നാലു രൂപങ്ങൾ കൂട്ടുവാൻ ചൊല്ലീ ആചാര്യൻ.

ഇവിടെ ഇരട്ടിച്ച വിഷമസംഖ്യയിൽ രണ്ടു കുറഞ്ഞതും രണ്ടു ഏറിയതും എല്ലോ മുമ്പിൽ സംസ്കാരഹാരകങ്ങളായിട്ടു കല്പിച്ചത്. വിഷമസംഖ്യയുടെ അടുത്ത്[38] ഇരുപുറവുമുള്ള സമസംഖ്യകളെ ഇരട്ടിച്ചവ പിന്നേവ ആകുന്നത്. എന്നാലിവറ്റെ സമാനജാതികളാക്കുമ്പോൾ ഇരട്ടിച്ച സമസംഖ്യാവർഗ്ഗത്തിൽ നാലു ഏറിയതു ഛേദം, ഇരട്ടിച്ച സമസംഖ്യതന്നെ അംശമാകുന്നത്. ഇവ രണ്ടിനേയും നാലിൽ അപവർത്തിച്ചാൽ സമസംഖ്യേടെ അർദ്ധം അംശമാകുന്നത്, സമസംഖ്യാവർഗ്ഗത്തിൽ രൂപം കൂടിയതു[39] ഛേദമാകുന്നത് എന്നിട്ടു ചൊല്ലീ–

"തസ്യാ ഊർദ്ധ്വഗതാ യാഃ

സമസംഖ്യാ തദ്ദളം ഗുണോഽന്തേ സ്യാൽ

തദ്വർഗ്ഗോ രൂപയുതോ ഹാരഃ"

എന്നിങ്ങനെ.

പിന്നെ ഇസ്സംസ്കാരത്തിന്നും എത്രയുണ്ടു സ്ഥൌല്യം എന്ന്

8. 38. B. അടുത്തടുത്ത്
39. F. കൂട്ടിയത്
40. B. മുൻ

അറിയേണ്ടുകിൽ മുമ്പിൽ[40] ചൊല്ലിയവണ്ണം തന്നെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ച നാലു രൂപം കൂട്ടിയ സംസ്കാരഹാരകങ്ങൾക്കും വിഷമസംഖ്യക്കും സമച്ഛേദമുണ്ടാക്കൂ. ഇവ വെക്കുംപ്രകാരം. നടേ കല്പിച്ച സംസ്കാരഹാരകം ഇരട്ടിച്ച രാശിയിൽ രണ്ടു കുറകകൊണ്ടു രണ്ടാംസ്ഥാനത്തു രണ്ട്, നടേത്തെ സ്ഥാനത്ത് ഋണമായിട്ട് രണ്ട്. ഇങ്ങനെ നടേത്തെ സംസ്കാരഹാരകം. രണ്ടാമതു പിന്നെ ദ്വിഘ്നരാശിയിൽ രണ്ടേറുകയാൽ രണ്ടു സ്ഥാനത്തും ധനമായിട്ട് രണ്ട്. ഇവറ്റിന്ന് അംശം ഓരോന്ന്. പിന്നെ ഈ ഛേദങ്ങളിൽ തന്നെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ച നാലു രൂപം കൂട്ടുമ്പോൾ ഛേദവർഗ്ഗത്തിൽ നാലു കൂടിയതു[41] ഛേദം. നടേത്തെ ഛേദത്തോടു തുല്യം അംശം. പിന്നെ ഛേദാംശങ്ങളെ അർദ്ധിക്കാം. എന്നാൽ പ്രഥമസംസ്കാരഹാരകച്ഛേദത്തിങ്കൽ മൂന്നാംസ്ഥാനത്തു രണ്ട്, രണ്ടാംസ്ഥാനത്തു ഋണമായിട്ടു നാല്, നടേത്തെ സ്ഥാനത്തു ധനമായിട്ട് നാല്. രണ്ടാമതിങ്കൽ പിന്നെ വിശേഷം. രണ്ടാംസ്ഥാനത്തെ നാലുംകൂടി ധനം എന്ന് അംശങ്ങൾ പിന്നെ രണ്ടിന്നും രണ്ടു സ്ഥാനങ്ങളിലും ഓരോന്ന്. അവിടെ നടേത്തേതിന്റെ നടേത്തെ സ്ഥാനത്തേതു് ഋണം എന്നു വിശേഷം. പിന്നെ വിഷമസംഖ്യാച്ഛേദം. രണ്ടാംസ്ഥാനത്തു ഒന്ന്, നടേത്തെ സ്ഥാനത്തു ശൂന്യം. അംശം ഒന്ന്[42]. പിന്നെ ഇവ മൂന്നിന്നും "അന്യോന്യഹാരാഭിഹതൌ ഹരാംശൌ", (ലീലാവതീ, 30) എന്നു സമച്ഛേദമാക്കൂ. അപ്പോൾ സമച്ഛേദത്തിന്ന് ആറു സ്ഥാനം, ആറു ഖണ്ഡത്തിൽ. ഇവിടെ നടേത്തെ ഖണ്ഡത്തിൽ ശൂന്യം, രണ്ടാംഖണ്ഡത്തിൽ പതിനാറ്, പിന്നെ മൂന്നിലും ശൂന്യം, പിന്നെ ആറാംഖണ്ഡത്തിൽ നാല്. ഇവിടെ നടേത്തെ സ്ഥാനം കൂടായുമ്പോൾ വിഷമസംഖ്യാംശം. ഇവിടെ ഒരു ഖണ്ഡത്തിലെ സംഖ്യ മീത്തേ ഖണ്ഡത്തിൽ കരേറുകയില്ല. പത്തിലേറിയാലും പത്തിലെല്ലോ കരേറുണ്ടൂ. എന്നിട്ട് അസ്സംഖ്യ അറിയാത്ത രാശി ആകയാൽ രാശിതുല്യസംഖ്യകൊണ്ടു കരേറുവാനോ ഉപായമില്ലെല്ലോ. എന്നിട്ട് ഇവിടേയും ഒരു സ്ഥാനത്തു വരുന്ന സംഖ്യകൾ ധനർണ്ണം, ഒന്നെങ്കിൽ കൂട്ടേണം, രണ്ട് എങ്കിൽ അന്തരിക്കാം. അത്രേ ആവൂ. ഇവിടുത്തെ നടേത്തെ

---

8. 41. B. F. കൂട്ടുകയാകുന്നത്. ഇവ ഛേദങ്ങളായി മീത്തെ നന്നാലാംശങ്ങളും ഉണ്ടായിരിക്കും. പിന്നെ അവറ്റെ സമച്ഛേദങ്ങളായി അപവർത്തിക്കുമ്പോൾ ഛേദത്തിന്ന് സംഖ്യ മുന്നാം സ്ഥാനം. അത് രണ്ടും നടേത്തെ സ്ഥാനത്തു രണ്ടും. അതും നന്നാലംശത്തിങ്കൽ. പിന്നെ പ്രഥമ ഹാരത്തീന്ന് രണ്ടാം സ്ഥാനത്തു ഒന്ന്. നടേത്തെ സ്ഥാനത്ത് ഋണമായിട്ട് ഒന്ന്. രണ്ടാം ഹാരകം രണ്ടിന്റെ അംശത്തിങ്കൽ രണ്ടു സ്ഥാനത്തും ഓരോന്നു വിഷമസംഖ്യാഛേദം. രണ്ടാം സ്ഥാനത്ത് ഒന്ന്, നടേത്തെ സ്ഥാനത്തു ശൂന്യം.

42. B. അംശത്തിന്ന് ഒന്ന്

സംസ്കാരാംശം പിന്നെ. ഇതിന്നും അഞ്ചുസ്ഥാനം. നടേത്തേതു ശൂന്യം, രണ്ടാംസ്ഥാനത്ത് ഋണം നാല്, മൂന്നാമതു ശൂന്യം, പിന്നെ രണ്ടുസ്ഥാനത്തും ഈരണ്ട്. ദ്വിതീയസംസ്കാരഹാരകത്തിന്റെ അംശം പിന്നെ. നടേത്തെ സ്ഥാനത്തു ശൂന്യം, രണ്ടാമ്മേടത്തു നാല്, പിന്നെ ശൂന്യം, പിന്നെ ഋണം രണ്ട്, പിന്നെ അഞ്ചാം സ്ഥാനത്തു ധനമായിട്ടു രണ്ട്, ഇങ്ങനെ ക്രമം.

സംസ്കാരഫലയോഗം പിന്നെ. അഞ്ചാംസ്ഥാനത്തു നാല് മറ്റേവ ശൂന്യം. ഇതിനെ വിഷമസംഖ്യാഫലത്തിങ്കന്നു കളഞ്ഞാൽ നടേത്തെ സ്ഥാനത്തു പതിനാറു ശേഷിക്കുമത്രേ. പിന്നെ ശേഷിച്ച അംശത്തേയും ഛേദത്തേയും നാലിൽ അപവർത്തിച്ചാൽ അംശം നാലും, ഛേദം ആറാംസ്ഥാനത്ത് ഒന്നും, രണ്ടാംസ്ഥാനത്തു നാല്, മറ്റേവ ശൂന്യം. ഇവ്വണ്ണമാകുമ്പോൾ വിഷമസംഖ്യയുടെ [43]പഞ്ചാഹതിയിൽ നാലിൽ ഗുണിച്ച മൂലം കൂട്ടിയതു ഛേദം. ഇതിലിറങ്ങിയ[44] നാലംശം സ്ഥൌല്യമാകുന്നത് എന്ന് വന്നു.

9. സൂക്ഷ്മപരിധ്യാനയനപ്രകാരാന്തരങ്ങൾ

ഇപ്പോൾ ഇതിന്നു തക്കവണ്ണം പരിധിയെ[1] വരുത്താം. അതിന്റെ പ്രകാരത്തെ ചൊല്ലുന്നു[2]:

സമപഞ്ചാഹതയോ യാ
രൂപാദ്യയുജാം ചതുർഘ്നമൂലയുതാഃ |
താഭിഃ ഷോഡശഗുണിതാത്
വ്യാസാത് പൃഥഗാഹതേഷു വിഷമയുതേ: |
സമഫലയുതിമപഹായ
സ്യാദിഷ്ടവ്യാസസംഭവഃ പരിധിഃ ||

(തന്ത്രസംഗ്രഹവ്യാഖ്യാ II. 287)

ഇതി

8\. 43. F. സമപഞ്ചാ
44\. C. D. ഇതിൽ കുറയുന്ന
9\. 1. C. D. F. പിന്നെ; പരിധി
2\. B. പ്രകാരം
3\. B.C. D.F. om. ഇവിടെ; (......to......) ചൊല്ലുന്നു

ഇവിടെ[3] പരിധി വരുത്തുവാൻ അതിന്റെ പ്രകാരത്തെ ചൊല്ലുന്നൂ. ഇവിടെ പ്രായികമായിരിക്കുന്ന പരിധിക്ക് ഇസ്സംസ്കാരം ചെയ്താൽ ഇത്ര സ്ഥൌല്യമുണ്ടെന്നറിഞ്ഞാൽ അതു കൂട്ടീതാകിൽ ഏറിപ്പോയി എന്നാൽ അതിനു മീത്തെ വിഷമസംഖ്യകൊണ്ട് ഉണ്ടാക്കിയ സംസ്കാരഫലം കളഞ്ഞാൽ ഒട്ടു സൂക്ഷ്മമാകും. പിന്നയും പിന്നയും സംസ്കാരം ചെയ്താൽ[4] സൂക്ഷ്മമാകും എന്നു വന്നിരിക്കുമ്പോൾ ആദിയിങ്കന്നു തുടങ്ങീട്ടു തന്നെ ഈ[5] സംസ്കാരം ചെയ്തുകൊണ്ടാലും പരിധി സൂക്ഷ്മമാകുമെന്നു വരും എന്ന് ഇതിന്ന് ഉപപത്തി.

കേവലം വിഷമസംഖ്യേ ഇരട്ടിച്ചതു തന്നെ സംസ്കാരഹാരകം എന്നു കല്പിച്ചാൽ അവിടുത്തെ സ്ഥൌല്യാംശത്തെ പരിഹരിച്ചു പരിധി വരുത്തും പ്രകാരം–

വ്യാസാദ് വാരിധിനിഹതാത്
പൃഥഗാപ്തം ത്ര്യാദ്യയുഗ്വിമൂലഘ്നൈഃ |
ത്രിഘ്നവ്യാസേ സ്വമൃണം
ക്രമശഃ കൃത്വാ പരിധിരാനേയഃ ||

ഇതി.

എന്നിയെ ഒടുക്കത്തെ വിഷമസംഖ്യാഫലത്തിന്റെ അർദ്ധം സംസ്കരിക്കുന്നത് എന്നാവൂ ഇരിപ്പത് എങ്കിൽ ആ വഴിയുണ്ടു പരിധി വരുത്തും പ്രകാരം–

ദ്വ്യാദിയുജാം വാ കൃതയോ
വ്യേകാ ഹാരാ ദ്വിനിഘ്നവിഷ്കംഭേ |
ധനമൃണമന്തേƒന്ത്യോർദ്ധ്വഗതൌജ-
കൃതിർദ്വിസഹിതാ ഹരസ്യാർദ്ധം ||

പിന്നേയുമുണ്ട്–

9. 4. B. സംസ്ക്കരിച്ചാൽ
5. D. om ഈ

ദ്വ്യാദേശ്ചതുരാദേർവ്വാ
ചതുരധികാനാം നിരേകവർഗ്ഗാശ്ചേത് ।
ഹാരാഃ കുഞ്ജരഗുണിതോ
വിഷ്കംഭസ്സ്വമിതി കല്പിതോ ഭാജ്യഃ ॥
ഫലയുതിരേകത്ര വ്യതിർ-
ഭാജ്യദളം ഫലഹീനമന്യത്ര ।

ഇതി, എന്നിങ്ങനെ തുടങ്ങി.

10. സൂക്ഷ്മതരമായൊരു സംസ്കാരം

അനന്തരം വിഷമസംഖ്യാഹരണാനന്തരം ചൊല്ലിയ സംസ്കാരം നടേത്തേതിൽ സൂക്ഷ്മതരമായിരിപ്പോരു സംസ്കാരത്തെ ചൊല്ലുന്നൂ പിന്നെ.

അന്തേ സമസംഖ്യാദള-
വർഗ്ഗ സൈകോ ഗുണഃ സ ഏവ പുനഃ
യുഗഗുണിതോ രൂപയുതഃ
സമസംഖ്യാദളഹതോ ഭവേദ്ഹാരഃ

ഇതി.

**[ഗണിതയുക്തിഭാഷയിൽ
പരിധിയും വ്യാസവും എന്ന
ആറാമദ്ധ്യായം സമാപ്തം]**

അദ്ധ്യായം ഏഴ്

ജ്യാനയനം

1. വൃത്താന്തർഗ്ഗതഷഡശ്ര- ബാഹുവ്യാസാർദ്ധതുല്യന്യായം

ഇവ്വണ്ണം ചക്രകലാസമസംഖ്യമായി വൃത്താകാരമായിരിക്കുന്ന പരിധിക്കു വ്യാസമുണ്ടാക്കി അതിന്റെ അർദ്ധംകൊണ്ടു ഒരു വൃത്തം വീശി[1] ആ[2] വൃത്തമദ്ധ്യത്തിങ്കൽ പൂർവ്വാപരരേഖയും ദക്ഷിണോത്തരരേഖയും[3] ഉണ്ടാക്കി പിന്നെ ദക്ഷിണോത്തരരേഖയുടെ ഇരുപുറവും ഈരണ്ടു സമത്ര്യശ്രങ്ങൾ കല്പിപ്പൂ. അവറ്റിന്റെ ഭുജകളെല്ലാം വ്യാസാർദ്ധത്തോടു തുല്യമായിട്ടു[4] കല്പിക്കേണ്ടൂ. അവിടെ ദക്ഷിണോത്തരരേഖയുടെ രണ്ട് അഗ്രത്തിങ്കലും അഗ്രം സ്പർശിക്കുമാറു വ്യാസാർദ്ധതുല്യങ്ങളായിട്ട് നാലു സമസ്തജ്യാക്കളെ കല്പിപ്പൂ. ഇവ ത്ര്യശ്രത്തിന്റെ ഓരോ ഭുജകളാകുന്നത്. പിന്നെ കേന്ദ്രത്തിങ്കന്നു സമസ്തജ്യാഗ്രങ്ങളിൽ സ്പർശിക്കുമാറു നാലു വ്യാസാർദ്ധങ്ങളെ കല്പിപ്പൂ. ഇവ ഓരോ ഭുജകളാകുന്നത്. പിന്നെ ഭക്ഷിണോത്തരരേഖാർദ്ധങ്ങൾ ഓരോന്ന് ഈരണ്ടു ത്ര്യശ്രങ്ങൾക്ക് സാധാരണങ്ങളായിരിക്കുന്ന[5] ഭുജകൾ. ഇങ്ങനെ[6] ദക്ഷിണോത്തരരേഖയുടെ ഇരുപുറവും ഈരണ്ടു ത്ര്യശ്രങ്ങൾ. ഇങ്ങനെ വ്യാസാർദ്ധതുല്യഭുജകളായിട്ട് നാലു സമത്ര്യശ്രങ്ങളെ കല്പിപ്പൂ. ഇവിടെ യാതൊരു ത്ര്യശ്രത്തിങ്കലും ഒരു ഭുജ മുഴുവനേ നിലത്തു സ്പർശിക്കമാറു കല്പിക്കേണ്ടൂ. ഇതിന്നു[7] 'ഭൂമി' എന്നു പേർ.

1\. 1. F. വീയി
2. B. om. ആ
3. B. പൂർവ്വാപരദക്ഷിണോത്തരരേഖകളെ
4. C. തുല്യമായി; F. തുല്യങ്ങളായിട്ടു
5. B. C. സാധാരണങ്ങളായിട്ടിരിക്കുന്ന D. സാധാരണമായിട്ടിരി
6. C. adds പിന്നെ
7. B. F. അതിന്നു

പിന്നെ[8] ഭുമിയുടെ രണ്ടഗ്രത്തിങ്കലും സ്പർശിക്കുന്ന[9] ഭുജകൾ രണ്ടും മേല്പോട്ടാക്കി[10] കല്പിപ്പൂ. പിന്നെ ആ ഭുജകൾ രണ്ടും തങ്ങളിൽ[11] കൂടുന്ന കോണിങ്കൽ നിന്നു കനത്തൊരു വസ്തു കെട്ടിയൊരു സൂത്രം കീഴ്പോട്ടു തൂക്കൂ. അതിന്നു 'ലംബ'മെന്നു പേർ. മേല്പട്ടു കല്പിച്ച[12] ഭുജകൾ രണ്ടും തങ്ങളിൽ[13] നീളമൊക്കുമെങ്കിൽ ലംബം ഭൂമദ്ധ്യത്തിൽ സ്പർശിക്കും; ഒന്നു ചെറുതാകിൽ അപ്പുറത്തു നീങ്ങും. ഇവിടെ പിന്നെ പൂർവ്വസൂത്രത്തിന്റെ കിഴക്കെ അഗ്രം നേരെ മേലാകുമാറ് ഉയർത്തുമാറ്[14] കല്പിപ്പൂ. അപ്പോൾ ഭക്ഷിണോത്തരസൂത്രം 'സമവിതാന'മായിട്ടിരിക്കും.

പിന്നെ ദക്ഷിണോത്തരസൂത്രത്തിന്റെ കിഴക്കെ പുറത്തെ ത്ര്യശ്രങ്ങൾ രണ്ടിന്റേയും മീത്തെ കോണിങ്കൽനിന്നു[15] രണ്ടു ലംബസൂത്രങ്ങൾ താഴ്ത്തൂ. അവ ദക്ഷിണോത്തരസൂത്രത്തിന്റെ രണ്ടർദ്ധങ്ങളുടേയും നടുവിൽ സ്പർശിക്കും. അപ്പോളവ രണ്ടു സൂത്രങ്ങളുടേയും ഇട വ്യാസാർദ്ധത്തോളമുണ്ട്. ദക്ഷിണോത്തരസൂത്രത്തിങ്കൽ കേന്ദ്രത്തിങ്കന്ന് ഇരുപുറവുമുള്ള വ്യാസാർദ്ധങ്ങൾ രണ്ടിന്റേയും നടുവിൽ സ്പർശിക്കയാൽ രണ്ടു വ്യാസാർദ്ധങ്ങളുടേയും രണ്ടർദ്ധങ്ങൾ[16] കൂടുകയാൽ ഒരു വ്യാസാർദ്ധത്തോളം നീളമായിട്ടിരിക്കും അത്[17]. എന്നാൽ ആ ലംബസൂത്രങ്ങളുടെ അഗ്രങ്ങളുടെ ഇടയും അത്രതന്നെ വ്യാസാർദ്ധതുല്യമായിട്ടേ[18] ഇരിക്കും. അതു ലംബാഗ്രാന്തരചാപത്തിങ്കലെ സമസ്തജ്യാവാകയുമുണ്ട്. പിന്നെ രണ്ടു ലംബങ്ങളുടേയും ഓരോ പുറത്തെ ഭുജകളും വ്യാസാർദ്ധതുല്യങ്ങളായി സമസ്തജ്യാരൂപങ്ങളായിട്ടിരിക്കും.

എന്നാൽ ദക്ഷിണോത്തരസൂത്രത്തിന്റെ കിഴക്കേപുറത്തെ പരിദ്ധ്യർദ്ധം വ്യാസാർദ്ധതുല്യങ്ങളായിരിക്കുന്ന[19] മൂന്നു സമസ്തജ്യാക്കളെക്കൊണ്ടു[20]

---

1. 8. B. om. പിന്നെ
9. F. സ്പർശിച്ചിരിക്കുന്ന
10. B. ആയി; F.om. ആക്കി
11. B. തമ്മിൽ
12. B. മേല്പോട്ടുള്ള
13. B. om. തങ്ങളിൽ
14. F. അളവെത്തുമാറ്
15. B. om. നിന്നു
16. D. F. രണ്ടർദ്ധം
17. B. om. അത്
18. C. മായിട്ടു
19. F. ആയിട്ടിരിക്കുന്ന
20. F. adds വൃത്തം

തികയും എന്നു വന്നൂ. ഇവ്വണ്ണം[21] മറ്റെ പരിദ്ധ്യർദ്ധത്തിങ്കലും. എന്നാൽ വ്യാസാർദ്ധതുല്യങ്ങളായിട്ടിരിക്കുന്ന ആറു സമസ്തജ്യാക്കളെക്കൊണ്ടു വൃത്തം മുഴുവനും തികയും എന്നു വരും. ഇവ്വണ്ണമാകുമ്പോൾ രണ്ടു രാശീടെ സമസ്തജ്യാവു വ്യാസാർദ്ധതുല്യം എന്നു വരും. വൃത്തഷൾഭാഗമാണെല്ലൊ രണ്ടു രാശിയാകുന്നത്[2] എന്നിട്ട്. ഇതുകൊണ്ടു തന്നെ വ്യാസാർദ്ധത്തിന്റെ അർദ്ധം ഏകരാശീടെ അർദ്ധജ്യാവ് എന്നു വരും.

2. ജ്യാശരവർഗ്ഗയോഗമൂലത്തിൽനിന്നു ജ്യാനയനം

2.i. ജ്യാകോടിശരങ്ങൾ

ചാപത്തേയും ജ്യാവിനേയും കൂടി അർദ്ധിച്ചിരിക്കുന്നതിനെ ഈ ചാപത്തിന്റെ 'അർദ്ധജ്യാവ്' ഇത് എന്നു ചൊല്ലുന്നൂ. ചാപം മുഴുവനായിട്ടിരിപ്പൂ, ജ്യാവ് അർദ്ധവും, ഇങ്ങനെ ഇരിക്കുന്നവറ്റെ അല്ല ഇച്ചാപത്തിന്റെ അർദ്ധജ്യാവ് ഇത് എന്നു ചൊല്ലുന്നൂ. ഇവിടെ പിന്നെ ഗ്രഹവിഷയമായിരിക്കുന്ന ക്രിയകളിൽ അർദ്ധജ്യാവുകൊണ്ടേ ഉപകാരമുള്ളൂ. എന്നിട്ട് അർദ്ധജ്യാവിനെ അത്രേ 'ജ്യാവ്' എന്നു ചൊല്ലുന്നൂ

ഇവിടെ പിന്നെ സമസ്തജ്യാമധ്യത്തിങ്കന്നു സമസ്തജ്യാചാപമധ്യത്തിന്റെ അകലം 'ശര'മാകുന്നത് അർദ്ധജ്യാവിന്നും സമസ്തജ്യാവിന്നും ഒന്നേ ശരമാകുന്നത്. അതു വൃത്തകേന്ദ്രത്തിങ്കന്നു ചാപമദ്ധ്യത്തിങ്കൽ സ്പർശിക്കുന്ന വ്യാസാർദ്ധസൂത്രത്തിന്റെ ഖണ്ഡമാകുന്നത്.

ഇവിടെ വൃത്തം നിലത്തു വരക്കുമാറു കല്പിക്കുമ്പോൾ പൂർവ്വസൂത്രാഗ്രത്തിങ്കന്നു വടക്കേപുറം പരിധീടെ പന്ത്രണ്ടാലൊന്നിനെ മേടമെന്നു കല്പിക്കുമാറു നിരൂപിക്കുന്നൂ. അപ്പോൾ പൂർവ്വാപരസൂത്രത്തിങ്കൽ ശരം ആകുമാറു[1] നേരെ തെക്കുവടക്കു കല്പിപ്പൂ ഭുജാജ്യാവിനെ. നേരെ കിഴക്കുപടിഞ്ഞാറു കോടിജ്യാവിനേയും കല്പിപ്പൂ[2]. അപ്പോൾ ഉത്തരസൂത്രാഗ്രം കോടിശരമായിട്ടിരിക്കും[3]. ഇവിടെ പ്രഥമരാശിജ്യാഗ്രത്തിങ്കന്നു കിഴക്കുപടിഞ്ഞാറുള്ള രേഖ

---

1. 21. B. അവ്വണ്ണം
   22. B. om. ആകുന്നത്
2. 1. B. വരുമാറു
   2. B. ഞാറു കല്പിപ്പു കോടി ജ്യാവിനെ
   3. B. ആയിരിക്കും

പ്രഥമരാശിജ്യാകോടിയാകുന്നത്. അതു രണ്ടു രാശീടെ അർദ്ധജ്യാവ്. ഇതിനെ പൂർവ്വസൂത്രത്തിങ്കന്നു വാങ്ങിയശേഷം പ്രഥമരാശിജ്യാശരം. പ്രഥമരാശിജ്യാവിനെ ഉത്തരസൂത്രത്തിങ്കന്നു വാങ്ങിയശേഷം ഏകരാശിജ്യാവിന്റെ കോടിയാകുന്ന ദ്വിരാശിജ്യാവു യാതൊന്നു് അതിന്റെ ശരമായിട്ടിരിക്കും.

2. ii. ജ്യാനയനം

പ്രഥമരാശിജ്യാവിനേയും അതിന്റെ ശരവും തങ്ങളിൽ[4] ഭുജാകോടികൾ എന്നു കല്പിക്കാം, അന്യോന്യം വിപരീതദിക്കാകയാൽ. എന്നാൽ ഇവ രണ്ടിന്റേയും വർഗ്ഗയോഗമൂലം പൂർവ്വരേഖാഗ്രത്തിങ്കന്നു പ്രഥമരാശിജ്യാഗ്രത്തോടുള്ള അന്തരാളം ഒരു രാശിയുടെ സമസ്തജ്യാവ്. ഇതിനെ പിന്നെ പൂർവ്വരേഖയിങ്കൽ[5] ഇസ്സമസ്തജ്യാമദ്ധ്യം വരുമാറു വെക്കുമാറു കല്പിപ്പൂ. എന്നാൽ നേരെ തെക്കുവടക്കായി പൂർവ്വാപരരേഖയിങ്കൽ ശരമായിട്ടിരിക്കും. ഈ ജ്യാവിന്റെ അർദ്ധം അർദ്ധരാശീടെ അർദ്ധജ്യാവ്. ഇതിനെ വർഗ്ഗിച്ചു വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗത്തിങ്കന്നു കളഞ്ഞു മൂലിച്ചാൽ രണ്ടര രാശീടെ അർദ്ധജ്യാവ്. ഇതിനെ[6] വ്യാസാർദ്ധത്തിൽ കളഞ്ഞശേഷം പൂർവ്വസൂത്രാഗ്രത്തിങ്കൽ അർദ്ധരാശിജ്യാശരം. ഈവണ്ണം അർദ്ധരാശിജ്യാവിനെ വ്യാസാർദ്ധത്തിങ്കന്നു കളഞ്ഞശേഷം ഉത്തരസൂത്രാഗ്രത്തിങ്കൽ രണ്ടര രാശി ജ്യാവിന്റെ ശരം.

ഇങ്ങനെ[7] അർദ്ധജ്യാവർഗ്ഗവും ശരവർഗ്ഗവും കൂട്ടിമൂലിച്ച് അർദ്ധിച്ചാൽ ഈ ജ്യാവിനെ സംബന്ധിച്ചുള്ള ചാപത്തെ അർദ്ധിച്ചിട്ടുള്ളതിന്റെ അർദ്ധജ്യാവു വരും. ഇങ്ങനെ ജ്യാശരവർഗ്ഗയോഗമൂലം കൊണ്ടു ജ്യാക്കളെ ഉണ്ടാക്കാം. പിന്നെ വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗത്തെ ഇരട്ടിച്ചു മൂലിച്ച് അർദ്ധിച്ചാൽ ഒന്നരരാശീടെ അർദ്ധജ്യാവുണ്ടാകും. ഈ വഴിയും ചില ജ്യാക്കൾ ഉളവാകും.

---

2. 4. B. തമ്മിൽ
5. B. D. പൂർവ്വാപര
6. B. F. ഇതിനെ വർഗ്ഗിച്ച് വ്യസാർദ്ധവർഗ്ഗത്തിൽ കളഞ്ഞത് മൂലിച്ചാൽ രണ്ടു രാശീടെ അർദ്ധജ്യാവും ഇതിനെ വ്യാസാർദ്ധത്തിൽ കളഞ്ഞശേഷം ഉത്തരസൂത്രാഗ്രത്തിങ്കൽ രണ്ടു രാശി ജ്യാവിന്റെ ശരം പൂർവ്വ സൂത്രാഗ്രത്തിങ്കൽ അർദ്ധരാശിജ്യാശരം.
7. B. F. ഇവ്വണ്ണം

3. സാങ്കേതികസംജ്ഞകളും നിർവ്വചനങ്ങളും

3. i. ഭുജാകോടിജ്യാക്കൾ

ഇങ്ങനെ പൂർവ്വസൂത്രാഗ്രത്തിങ്കന്ന് ഉത്തരസൂത്രാഗ്രത്തിന്നിട വൃത്തത്തിന്റെ[1] നാലൊന്ന്. ഇതിനെ ഇട ഒക്കുമാറു കണ്ട്[2] ഇരുപത്തിനാലുതാൻ ഏറത്താൻ പകുക്കുമാറു കണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ ഉണ്ടാക്കൂ. പിന്നെ അവ്വണ്ണം മറ്റെ മൂന്നു പദങ്ങളിലും[3]. ഇവിടെ ബിന്ദുക്കളുടെ ഇട ഓരോ 'ചാപഖണ്ഡം' ആകുന്നത്. ചാപഖണ്ഡാഗ്രങ്ങളിൽ നിന്ന്[4] തെക്കു വടക്കാമ്മാറു പൂർവ്വാപരസൂത്രത്തിങ്കൽ നേരെ നടുവ് അകപ്പെടുമാറ് ഉള്ള രേഖകൾ 'ഭുജാജ്യാക്കൾ' ആകുന്നത്. ഈവണ്ണം രണ്ടു ചാപഖണ്ഡങ്ങളുടെ അഗ്രങ്ങൾ തങ്ങളിൽ[5] സ്പർശിക്കുന്ന സന്ധിയിങ്കന്നുതന്നെ കിഴക്കുപടിഞ്ഞാറായി ദക്ഷിണോത്തരസൂത്രത്തിങ്കൽ മദ്ധ്യം സ്പർശിക്കുമാറുള്ള രേഖകൾ 'കോടിജ്യാക്കൾ' ആകുന്നത്. അതുകൊണ്ട് വന്നൂ, 'ഓജപദ'ത്തിങ്കൽ ഗതം ഭുജാ, ഏഷ്യം കോടി, 'യുഗ്മപദ'ത്തിങ്കൽ[6] മറിച്ച് എന്നും, പിന്നെ ഭുജാകോടിജ്യാക്കൾക്കു പുർവ്വോത്തരസൂത്രങ്ങളിൽ 'മൂലം', ചാപസന്ധിയിങ്കൽ ജ്യാക്കളുടെ 'അഗ്രം' എന്നും ചൊല്ലുന്നൂ. ഇവ്വണ്ണം ചാപഖണ്ഡങ്ങളുടേയും ഒരഗ്രത്തെ 'മൂലം' എന്നും ഒരഗ്രത്തെ 'അഗ്രം' എന്നും ചൊല്ലും. വ്യവഹാരാർത്ഥമായിട്ട് ഇവിടെ[7] ഭുജാചാപഖണ്ഡങ്ങൾക്കു പൂർവ്വാപരസൂത്രത്തിന്നടുത്തുള്ള അഗ്രത്തെ 'മൂലം' എന്നും ദക്ഷിണോത്തരസൂത്രത്തിനടുത്തുള്ള അഗ്രത്തെ 'അഗ്രം'എന്നും ചൊല്ലും. കോടിഖണ്ഡങ്ങൾക്കു മറിച്ചു മൂലാഗ്രങ്ങൾ.

3. ii. ഇരുപത്തിനാല് ജ്യാക്കൾ

പിന്നെ ഇവിടെ ഒരു രാശിയെ എട്ട്, ഒരു പദത്തെ ഇരുപത്തിനാലും വിഭജിക്കമാറു കല്പിച്ച് ജ്യാക്കളെ ഉണ്ടാക്കുമാറ് ചൊല്ലുന്നൂ. അവിടെ പൂർവ്വസൂത്രത്തിന്റെ[8] വടക്കെ പുറത്തെ വൃത്തത്തിങ്കൽ രാശീടെ എട്ടൊന്നു ചെന്നിടത്തു നടേത്തെ ചാപത്തിന്റെ അഗ്രം എന്നു കല്പിപ്പൂ. ആ

---

3. 1. F. വൃത്തത്തിൽ
2. B. om. കണ്ട്
3. F. പാദങ്ങളിലും
4. B. അഗ്രത്തിങ്കന്ന്
5. B. പദത്തിൽ
6. F. ചൊല്ലും
7. F. അവിടെ
8. B. F. പൂർവ്വസൂത്രാഗ്രത്തിങ്കന്ന്; D. പൂർവ്വസൂത്രത്തിങ്കന്ന്

ചാപത്തിന്റെ അർദ്ധജ്യാവു പ്രഥമജ്യാവാകുന്നത്. അതു പൂർവ്വസൂത്രത്തിങ്കന്നു പ്രഥമചാപാഗ്രത്തോളമുള്ളതു പ്രഥമചാപത്തിന്റെ ഖണ്ഡജ്യാവാകുന്നതും തന്നെ. പിന്നെ പ്രഥമചാപാഗ്രത്തിങ്കന്നു പിന്നേയും രാശ്യഷ്ടമാംശം ചെന്നേടം[9] ദ്വിതീയചാപാഗ്രം. ഈ ഇട രണ്ടാംചാപഖണ്ഡമാകുന്നത്. ഇതിന്റെ അഗ്രത്തിങ്കന്നു പൂർവ്വസൂത്രത്തോളം നേരെ തെക്കുവടക്കുള്ള അർദ്ധജ്യാവു രണ്ടാംജ്യാവാകുന്നത്. പിന്നെ പ്രഥമചാപത്തിന്റെ അഗ്രത്തിങ്കന്നും[10] ദ്വിതീയ ചാപത്തിന്റെ അഗ്രത്തിങ്കന്നും[11] ഉത്തരസൂത്രത്തോളം നേരെ കിഴക്കുപടിഞ്ഞാറുള്ള അർദ്ധജ്യാക്കൾ പ്രഥമദ്വിതീയജ്യാക്കളുടെ കോടികളാകുന്നത്. പിന്നെ ഈവണ്ണം എല്ലാ ചാപാഗ്രത്തിങ്കന്നും തെക്കുവടക്കും കിഴക്കുപടിഞ്ഞാറും ജ്യാക്കളെ കല്പിപ്പൂ. ഇരുപത്തിനാലാമതു വ്യാസാർദ്ധമാകുന്നത്.

3. iii. ഭുജാകോടിഖണ്ഡങ്ങൾ

പിന്നെ പൂർവ്വസൂത്രത്തിന്റെ അഗ്രത്തിങ്കലെ വൃത്തസമ്പാതത്തിങ്കന്നു പ്രഥമജ്യാമൂലത്തോട് ഇട പൂർവ്വസൂത്രാഗ്രം പ്രഥമചാപത്തിന്റെ കോടി - ഖണ്ഡമാകുന്നത്. പിന്നെ പ്രഥമചാപത്തിന്റെ ഭുജാഖണ്ഡമാകുന്നതു ഭുജാജ്യാവു തന്നെ. പിന്നെ ദ്വിതീയജ്യാഗ്രത്തിങ്കന്നു പ്രഥമജ്യാവിന്റെ കോടിയോളമുള്ള ദ്വിതീയജ്യാഭാഗം രണ്ടാം ചാപത്തിന്റെ ഭുജാഖണ്ഡമാകുന്നത്. പിന്നെ പ്രഥമജ്യാകോടീടെ അഗ്രം പ്രഥമചാപാഗ്രത്തിങ്കന്നു ദ്വിതീയജ്യാവോളമുള്ള ഇട ദ്വിതീയചാപത്തിന്റെ കോടിഖണ്ഡമാകുന്നത്.

ഈവണ്ണം തൃതീയചാപത്തിന്റെ അഗ്രത്തിങ്കന്നു[12] തെക്കുവടക്കും മൂലത്തിങ്കന്നു കിഴക്കുപടിഞ്ഞാറും ഉള്ള ഭുജാകോടിജ്യാക്കളുടെ അഗ്രം തങ്ങളിലെ[13] സമ്പാതത്തോട് വൃത്തത്തോട് ഇട തൃതീയചാപത്തിന്റെ ഭുജാകോടിഖണ്ഡങ്ങളാകുന്നത്[14]. ഈവണ്ണം എല്ലാ ചാപഖണ്ഡങ്ങളുടേയും തന്റെ തന്റെ രണ്ടു തലക്കന്നും തുടങ്ങിയ[15] ഭുജാകോടിജ്യാക്കളുടെ അഗ്രങ്ങൾ തങ്ങളിലെ സമ്പാതത്തിങ്കന്നു വൃത്തത്തോടുള്ള ഇട യാതൊന്ന് ഈ ഖണ്ഡങ്ങൾ തങ്ങളിൽ ഭുജാകോടികളായിരിപ്പോ ചിലവ.

---

3. 9. B. ചെന്നേടത്ത്
10. B. ചാപാഗ്രത്തിങ്കന്ന്
11. B. ദ്വിതീയചാപാഗ്രത്തിങ്കന്നും
12. B. ചാപാഗ്രത്തിങ്കന്ന്
13. B. അഗ്രങ്ങളിലെ
14. B. ആകുന്നു; F. ഖണ്ഡമാകുന്നത്
15. B.C.D. F add തുടങ്ങി

ഇവറ്റിന്റെ കർണ്ണമാകുന്നത് അതതു ചാപഖണ്ഡങ്ങൾക്കു വെവ്വേറെ ഉള്ള സമസ്തജ്യാവ്. ഇവയെല്ലാം നീളമൊത്തിരിപ്പോ ചിലവ. ചാപഖണ്ഡങ്ങൾ എല്ലാം തുല്യങ്ങളാകയാൽ സമസ്തജ്യാക്കളും തുല്യങ്ങൾ. ഇവ കർണ്ണങ്ങളായിട്ടുള്ള ഭുജാകോടികൾ[16] ഓരോ കർണ്ണത്തിന്ന് ഓരോ പ്രകാരം നീളമായിരിക്കും. ഭുജാകോടിഖണ്ഡജ്യാക്കളായിട്ടിരിക്കുന്ന ഭുജാകോടികൾ ഇവ. തുല്യകർണ്ണങ്ങളായി നാനാരൂപങ്ങളായിരിക്കുന്ന ഭുജാകോടികളോടു കൂടിയിരിക്കുന്ന ത്ര്യശ്രങ്ങൾ ഇരുപത്തിനാല്.

പിന്നെ ഭുജാകോടികൾക്കു കർണ്ണങ്ങളാകുന്നതു വൃത്തകേന്ദ്രത്തിങ്കന്ന് അതതു ഭുജാകോടി യോഗത്തോളമുള്ളവ. ചാപഖണ്ഡാഗ്രങ്ങളിൽ സ്പർശിക്കുന്നവയാകയാൽ എല്ലാ കർണ്ണങ്ങളും തുല്യങ്ങൾ. ഇവിടേയും ഭുജാകോടികൾ നാനാരൂപങ്ങൾ.

3. iv. വെവ്വേറെ പാദങ്ങളിൽ ഭുജാകോടിചാപങ്ങൾ

ഇവിടെ പൂർവ്വസൂത്രാഗ്രം വൃത്തത്തെ സ്പർശിക്കുന്നേടം മേഷരാശീടെ ആദി. അവിടുന്നു വൃത്തത്തിന്റെ പന്ത്രണ്ടാലൊന്നു ചെന്നേടം മേടത്തിന്റെ ഒടുക്കം[17]. പിന്നേയുമത്രചെന്നേടം ഇടവത്തിന്റെ ഒടുക്കം[18], ഉത്തരസൂത്രാഗ്രം മിഥുനത്തിന്റെ ഒടുക്കം[19]. എന്നിങ്ങനെ കല്പിച്ചിട്ടു പറയുന്നു. ഇവിടെ പൂർവ്വസൂത്രാഗ്രവും വൃത്തവുമുള്ള സമ്പാതത്തിങ്കൽ മൂലമായി ഇഷ്ടപ്രദേശത്തിങ്കൽ അഗ്രമായിട്ടുള്ളത് 'ഇഷ്ടഭുജാചാപം'. ഉത്തരസൂത്രാഗ്രത്തിങ്കന്ന് അത്രേടമുള്ളതു 'ഇഷ്ടകോടി ചാപം'.

എന്നാൽ നടേത്തെ പദത്തിങ്കൽ പദാദിയിങ്കന്നു തുടങ്ങി കഴിഞ്ഞ ഭാഗം[20] 'ഭുജാചാപം'. ഇഷ്ടപ്രദേശത്തിങ്കന്നു തുടങ്ങി പദം തികവാൻ പോരാത്തതു 'കോടിചാപം'. രണ്ടാംപദത്തിങ്കൽ ചെന്നതു കോടിചാപം, ഉത്തരസൂത്രാഗ്രം പദാദിയാകയാൽ. കോടിചാപാഗ്രത്തിങ്കന്നു പദം തികവാൻ പോരാത്തതു ഭുജാചാപം; ഭുജക്കു പശ്ചിമസൂത്രാഗ്രം പദാദിയാകയാൽ. മൂന്നാംപദത്തിങ്കൽ നടേത്തെ പദത്തിങ്കലെപ്പോലെ[21]. നാലാംപദത്തിങ്കൽ രണ്ടാംപദത്തിങ്കലെപ്പോലെ[22] ഭുജാകോടിചാപങ്ങൾ. നടേത്തെ പദത്തിങ്കൽ പൂർവ്വസൂത്രത്തിങ്കൽ[23] ഭുജാചാപത്തിന്നു മൂലം, ഇഷ്ടപ്രദേശത്തിങ്കലഗ്രം. ഈ ഇഷ്ടപ്രദേശത്തിങ്കൽതന്നെ അഗ്രമായി ഉത്തരസൂത്രത്തിങ്കൽ[24]

3. 16. D. ഭുജാകോടി ഖണ്ഡങ്ങൾ
17. B. മേടാവസാനം
18. B. ഇടവാന്ത്യം
19. B. മിഥുനാന്ത്യം
20. H. ചാപം
21. B. പദത്തെപ്പോലെ
22. B. രണ്ടാം പദംപോലെ
23. B. F. പൂർവ്വസൂത്രാഗ്രത്തിങ്കൽ

മൂലമായിരിക്കും ആ ഭുജാചാപത്തിന്റെ കോടിചാപം. ഇവറ്റിന്റെ അർദ്ധജ്യാക്കൾ ഭുജാകോടിജ്യാക്കളാകുന്നത്.

3. v. ഭുജാകോടിശരഖണ്ഡങ്ങൾ

എന്നാൽ വൃത്തപാദത്തെ ഇരുപത്തിനാല് ഇട[25] ഖണ്ഡിക്കുമാറു കല്പിക്കുമ്പോൾ നടേത്തെ ചാപഖണ്ഡം ഇഷ്ടഭുജാചാപം എന്നും കല്പിക്കുമ്പോൾ ഭുജാചാപം ഒരു ഖണ്ഡം പോയശേഷം ഇരുപത്തിമൂന്നു ഖണ്ഡം കൂടിയതു കോടിചാപം. എന്നാൽ നടേത്തെ ജ്യാവിന്നു കോടി ഇരുപത്തിമൂന്നാം ജ്യാവ്. രണ്ടാമതിന് ഇരുപത്തിരണ്ടാമത്. ഇങ്ങനെ കണ്ടുകൊള്ളൂ.

ഇവിടെ ഭുജാജ്യാമൂലങ്ങൾ എല്ലാം പൂർവ്വസൂത്രത്തിങ്കൽ സ്പർശിക്കും. ഈ സൂത്രത്തിങ്കൽ ജ്യാമൂലസമ്പാതങ്ങളുടെ ഇട വൃത്തകേന്ദ്രത്തിങ്കന്നു തുടങ്ങി ക്രമേണ കോടിജ്യാഖണ്ഡങ്ങൾ. ഇവിടെ ഭുജാജ്യാവിന്റെ ഇരുപത്തിമൂന്നാമതിന്റെ മൂലവും വൃത്തകേന്ദ്രവും തങ്ങളിലുള്ള[26] ഇട പൂർവ്വസൂത്രത്തിങ്കലെ ഖണ്ഡം നടേത്തെ കോടിഖണ്ഡം. പിന്നെ ഇരുപത്തിമൂന്നാം ജ്യാവിന്റെ മൂലത്തിങ്കന്ന് ഇരുപത്തിരണ്ടാം ഭുജാജ്യാവിന്റെ മൂലത്തോടിട പൂർവ്വസൂത്രത്തിങ്കലെ ഖണ്ഡം കോടിജ്യാവിങ്കലെ രണ്ടാം ഖണ്ഡം. ഈ ഖണ്ഡങ്ങൾ രണ്ടും കൂട്ടിയാൽ രണ്ടാം ജ്യാവ്. ഇവ്വണ്ണം ക്രമേണ ഉള്ള ഖണ്ഡങ്ങളാൽ ഓരോന്നു ക്രമേണ കൂട്ടിയാൽ ക്രമേണ മീത്തെ മീത്തെ ജ്യാക്കളായിട്ടിരിക്കും. പിന്നെ ഇവിടെ പൂർവ്വസൂത്രത്തിങ്കലെ അഗ്രത്തിങ്കലെ ഖണ്ഡം നടേത്തെ ഭുജാജ്യാവിന്റെ ശരം. ഇതിൽ പിന്നെയും[27] അടുത്ത ഒരു ഖണ്ഡം കൂട്ടിയാൽ രണ്ടാം ജ്യാവിന്റെ ശരം. ഇങ്ങനെ പൂർവ്വസൂത്രാഗ്രത്തിങ്കന്നു തുടങ്ങി ഖണ്ഡയോഗം ചെയ്കിൽ ക്രമേണ ഭുജാശരങ്ങൾ. കേന്ദ്രത്തിങ്കന്നു തുടങ്ങുകിൽ കോടിജ്യാക്കൾ. ഖണ്ഡങ്ങൾ വെവ്വേറെ ഇരിക്കുമ്പോൾ, കേന്ദ്രത്തിങ്കന്നു തുടങ്ങുകിൽ കോടിഖണ്ഡങ്ങൾ അഗ്രത്തിങ്കന്നു തുടങ്ങുകിൽ ക്രമേണ ശരഖണ്ഡങ്ങൾ. ഇവ്വണ്ണം ഉത്തരസൂത്രത്തിങ്കൽ വൃത്തകേന്ദ്രത്തിങ്കന്നു തുടങ്ങുകിൽ ഭുജാഖണ്ഡങ്ങൾ ഖണ്ഡയോഗത്തിങ്കൽ ഭുജാജ്യാക്കളായിട്ടിരിക്കും. ഉത്തരസൂത്രാഗ്രത്തിങ്കന്നു തുടങ്ങുകിൽ കോടിശരഖണ്ഡങ്ങളും കോടിശരങ്ങളും ക്രമേണ. ഇങ്ങനെ വ്യാസാർദ്ധസൂത്രത്തിങ്കൽ ജ്യാഖണ്ഡങ്ങളെ കല്പിക്കും പ്രകാരം.

---

3. 24. B. F. സൂത്രാഗ്രത്തിങ്കൽ
25. B. F. om. ഇട
26. B. തമ്മിൽ
27. C. Adds ഇവിടെ

4. ജ്യാനയനം

4.i. പഠിതജ്യാക്കൾ

പിന്നെ അതതു ചാപഖണ്ഡങ്ങളുടെ സമസ്തജ്യാക്കൾ തുല്യങ്ങളായിട്ടിരിക്കുന്നവ കർണ്ണങ്ങളായിട്ടു കർണ്ണങ്ങളുടെ രണ്ട് അഗ്രങ്ങളിലും സ്പർശിക്കുന്ന ജ്യാക്കൾ തങ്ങളിലുള്ള സമ്പാതത്തിങ്കന്ന് സമസ്തജ്യാക്കളാകുന്ന കർണ്ണങ്ങളുടെ അഗ്രത്തോളമുള്ള ഇട ഭുജാകോടികളായി സമസ്തജ്യാവിനോടുകൂടിയ ത്ര്യശ്രങ്ങളായിട്ടിരിക്കും. ഈ ഭുജാകോടികളെ ആകിലുമാം ഭുജാകോടിഖണ്ഡജ്യാക്കൾ എന്നു കല്പിപ്പാൻ. ഈവണ്ണമായിരിക്കുന്ന ജ്യാഖണ്ഡങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കി പഠിക്കേണം. അവറ്റിന്നു 'പഠിതജ്യാക്കൾ' എന്നു പേരുണ്ട് പൂർവ്വശാസ്ത്രങ്ങളിൽ പഠിക്കയാൽ. വ്യുൽക്രമേണ കൂടി പഠിപ്പൂ. അത്[1] 'ഉൽക്രമജ്യാക്കൾ'[2]. പദാദിയിങ്കന്നു തുടങ്ങി ഇത്ര ചാപഖണ്ഡം കഴിഞ്ഞ സന്ധി ഇഷ്ടപ്രദേശമെന്നു വരുമ്പോൾ[3] അത്ര[4] പഠിതജ്യാവുതന്നെ ഇഷ്ടജ്യാവാകുന്നത്. പിന്നെ ഇസ്സന്ധിയിങ്കന്നു പിന്നത്തെ ചാപഖണ്ഡത്തിൽ[5] ഒട്ടുചെന്നേടം ഇഷ്ടപ്രദേശമെന്നു വരുമ്പോൾ ഈ പഠിതജ്യാവിൽ കൂട്ടൂ, മീത്തെ ചാപഖണ്ഡൈകദേശത്തിന്റെ ജ്യാഖണ്ഡൈകദേശം. എന്നാലിഷ്ടജ്യാവത്.

ഇവിടെ ജ്യാഖണ്ഡൈകദേശമുണ്ടാക്കും പ്രകാരം പിന്നെ. ഇച്ഛാപഖണ്ഡം പ്രമാണമാകുമ്പോൾ ഈ ഖണ്ഡജ്യാക്കളിൽ ഇത്രാമതു പ്രമാണഫലം, ഇച്ഛാപഖണ്ഡൈകദേശത്തിന്ന് എത്ര ജ്യാഖണ്ഡൈകദേശം എന്ന് ഈ ത്രൈരാശികം കൊണ്ടുണ്ടാക്കാം[6] അതു സ്ഥൂലമത്രെ. അതിന്നു ഹേതു നടേത്തെ ചാപത്തിലിരട്ടി രണ്ടാം ചാപം, മുമ്മടങ്ങു മൂന്നാംചാപം, ഇങ്ങനെ ചാപങ്ങൾ[7]. നടേത്തെ ജ്യാവിലിരട്ടി ഇല്ല രണ്ടാം ജ്യാവ്, മുമ്മടങ്ങില്ല മൂന്നാംജ്യാവ് എന്നിവണ്ണമിരിക്കും. അതിന്നു ഹേതു നടേത്തെ ചാപത്തിന്നു വളവില്ല, ശരം പെരികെക്കുറകയാൽ; ജ്യാവിനോടു മിക്കവാറും സമം. ചാപം വലുതായോളം വളവ് ഏറും. അവിടെ[8] ജ്യാവു കുറവേ നീളമുണ്ടായിരിപ്പൂ, ശരം നീളമേറുകയാൽ. എന്നാൽ ചാപം പ്രമാണമായിട്ടു ജ്യാവിനെ ത്രൈരാശികം ചെയ്യരുത്, ഫലം സ്ഥൂലമാകയാൽ.

4\. 1. B. അവ
2. B.C.D. Add എന്നാൽ
3. B. C.D.F. പ്രദേശവൃത്തത്തിലെന്നു വരുമ്പോൾ
4. F. അത്രാവതെ
5. D. ചാപഖണ്ഡത്തിങ്കൽ
6. F. ഉണ്ടാക്കുന്നത്
7. F. ചാപഖണ്ഡങ്ങൾ
8. B. ഇവിടെ

4.ii. പഠിതജ്യാക്കളെ സൂക്ഷ്മമായിട്ടു വരുത്തും പ്രകാരം

അനന്തരം പഠിതജ്യാക്കളെത്തന്നെ സൂക്ഷ്മമായിട്ടറിയും പ്രകാരത്തെ ചൊല്ലുന്നുണ്ട്[9]. അവിടെ നടേത്തെ ചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ മൂലമാകുന്ന പൂർവ്വസൂത്രാഗ്രത്തിങ്കലും ഇവിടുന്നു വടക്കുനീങ്ങി രാശ്യഷ്ടമാംശം ഇരുന്നൂറ്റി ഇരുപത്തഞ്ച് ഇലി ചെന്നേടം[10]അഗ്രം അവിടേയും സ്പർശിച്ചിട്ട് ആദ്യചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ സമസ്തജ്യാവിനെ കല്പിപ്പൂ. യാവ ചിലവ പിന്നെ അച്ചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ മൂലാഗ്രങ്ങളിൽ നിന്നു തുടങ്ങിയ ഭുജാകോടി ഖണ്ഡജ്യാക്കൾ, അവറ്റെ അന്യോന്യം ഭുജാകോടികളായിട്ടു കല്പിക്കുമ്പോൾ ഇവറ്റിന്റെ കർണ്ണമായിട്ടിരിക്കും[11] അസ്സമസ്തജ്യാവ്. പിന്നെ വൃത്തകേന്ദ്ര ത്തിങ്കന്ന് ഇച്ചാപഖണ്ഡമദ്ധ്യത്തിങ്കൽ സ്പർശിക്കുമാറ് ഒരു വ്യാസാർദ്ധത്തെ കല്പിപ്പൂ. ഇതിന്റെ അഗ്രം ഇസ്സമസ്തജ്യാവിന്റെ ശരമാകുന്നത്. ആകയാൽ ഈ വ്യാസാർദ്ധവും സമസ്തജ്യാവും തങ്ങളിൽ വിപരീതദിക്ക് ആകയാൽ പൂർവ്വസൂത്രാഗ്രത്തിങ്കൽനിന്നു് ഈ വ്യാസാർദ്ധാഗ്രം എത്ര വടക്കു നീങ്ങി ഇരിക്കുന്നൂ, ദക്ഷിണോത്തരസൂത്രത്തിന്റെ ദക്ഷിണാഗ്രത്തിങ്കൽനിന്ന് അസ്സമസ്തജ്യാഗ്രം ആയംശംകൊണ്ടു കിഴക്കു നീങ്ങി ഇരിക്കും. ഇവിടെ ആദ്യചാപസമസ്തജ്യാവിനെക്കുറിച്ചു ദക്ഷിണോത്തരസൂത്രമാകുന്നതു് ആദ്യജ്യാവു തന്നെ. പിന്നെ ഈ വ്യാസാർദ്ധാഗ്രത്തിങ്കൽ അഗ്രമായിട്ടു രണ്ടു ഭുജാകോടിജ്യാക്കളെ കല്പിപ്പൂ.

അവിടെ ഖണ്ഡാർദ്ധമാകുന്ന നൂറ്റൊരുപത്തു രണ്ടര ഇലി ഭുജാചാപമാകുന്നത്. വളവു കുറയുകയാൽ ഇച്ചാപത്തെത്തന്നെ അർദ്ധജ്യാവു് എന്നു കല്പിച്ച് ഇതിന്റെ വർഗ്ഗത്തെ വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗത്തിങ്കന്നു കളഞ്ഞു മൂലിച്ചതു കോടിജ്യാവ് ഇരുപത്തിമൂന്നര ചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ ജ്യാവ്. ഇതുപോയ വ്യാസാർദ്ധശേഷം ഭുജാശരം. ഇവിടെ പ്രഥമചാപഖണ്ഡമദ്ധ്യത്തിങ്കൽ സ്പർശിക്കുന്ന വ്യാസാർദ്ധകർണ്ണത്തിന്നു നൂറ്റൊരുപത്തുരണ്ടര ഇലി ഭുജാജ്യാവാകുന്നത്. ഈ ജ്യാവിലിരട്ടിപോന്നിരിക്കുന്ന സമസ്തജ്യാകർണ്ണത്തിന്ന് എന്തു ഭുജ എന്ന ഇത്രൈരാശികം കൊണ്ടു സമസ്തജ്യാകർണ്ണത്തിന്റെ ഭുജ ആയിരിക്കുന്ന

4. 9. C. ചൊല്ലുന്നു, B.om, ചൊല്ലുന്നുണ്ട്.
10. F. ചെല്ലുന്നേടത്ത്
11. C.D.F. കർണ്ണങ്ങളായിട്ടിരിക്കും

പ്രഥമജ്യാശരമുണ്ടാകും. ഇവിടെ ത്രിജ്യാകർണ്ണത്തിന്നു തെക്കുവടക്കു ഭുജാ. ഇത്ത്രിജ്യാകർണ്ണത്തിന്നു വിപരീതമാകയാൽ സമസ്തജ്യാകർണ്ണത്തിന്നു കിഴക്കുപടിഞ്ഞാറു ഭുജാ. പിന്നെ ഈ വ്യാസാർദ്ധകർണ്ണത്തിന്ന് ഇരുപത്തിമൂന്നര ചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ ജ്യാവു കോടിയാകുന്നത്, ഇസ്സമസ്തജ്യാകർണ്ണത്തിന്ന് എന്തു കോടി എന്ന് ആദ്യജ്യാവുണ്ടാകും. ഇവിടെ ത്രിജ്യാകർണ്ണത്തിന്നു കോടി കിഴക്കുപടിഞ്ഞാറ്, സമസ്തജ്യാകർണ്ണത്തിന്നു തെക്കുവടക്കു കോടി. പിന്നെ പ്രഥമജ്യാശരം വ്യാസാർദ്ധത്തിങ്കന്നു[12] കളഞ്ഞാൽ പ്രഥമജ്യാകോടി ഉണ്ടാകും[13]

ഈ ന്യായം കൊണ്ടുതന്നെ ദ്വിതീയാദിജ്യാക്കളെ ഉണ്ടാക്കൂ[14]. അത് എങ്ങനെ എന്ന്. ഇവിടെ ഇനി പ്രഥമജ്യാഗ്രത്തിങ്കൽ അഗ്രമായിട്ട് ഒരു വ്യാസാർദ്ധകർണ്ണത്തെ കല്പിപ്പൂ. ഇതിന്നു ഭുജാകോടികളാകുന്നതു നടേത്തെ ജ്യാവും ഇരുപത്തിമൂന്നാം ജ്യാവും. ഇവ ഇവിടെ പ്രമാണഫലങ്ങളാകുന്നത്. പിന്നെ നടേത്തെ ചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ നടുവിലും രണ്ടാംചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ നടുവിലും സ്പർശിച്ചിട്ട്[15] ഒരു സമസ്തജ്യാകർണ്ണത്തെ കല്പിപ്പൂ. ഇതു[16] ഇച്ഛാരാശിയാകുന്നത്. ഇസ്സമസ്തജ്യാവും രാശിയിൽ എട്ടൊന്നായിട്ടിരിക്കും[17] രണ്ടു ചാപഖണ്ഡത്താലും പപ്പാതി കൂടുകയാൽ. ഇതിന്ന് ഇച്ഛാഫലങ്ങളാകുന്നത് രണ്ടാം ചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ മദ്ധ്യത്തിൽ അഗ്രമായിരിക്കുന്ന ഭുജാഖണ്ഡജ്യാവു നടേത്തെ ചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ നടുവിലഗ്രമായിരിക്കുന്ന കോടിജ്യാവോളമുള്ളതു ഒന്ന് ഈ ഭുജാഖണ്ഡജ്യാസമ്പാതത്തിങ്കന്നു തുടങ്ങീട്ടു കോടിജ്യാവിന്റെ അഗ്രം ഒന്ന്. ഇതു കോടിഖണ്ഡമാകുന്നത്. ഈ കോടിഖണ്ഡം പോയശേഷം കോടിജ്യാവു ദ്വിതീയചാപഖണ്ഡമദ്ധ്യത്തിങ്കലഗ്രമായിരിക്കുന്ന കോടിജ്യാവായിരിക്കും[18]. പിന്നെ ഈ ഭുജാഖണ്ഡം പ്രഥമചാപഖണ്ഡമദ്ധ്യത്തിങ്കൽ അഗ്രമായിരിക്കുന്ന ഭുജാജ്യാവിൽ കൂട്ടൂ. എന്നാൽ ദ്വിതീയചാപഖണ്ഡമദ്ധ്യത്തിങ്കലഗ്രമായിരിക്കുന്ന ഭുജാജ്യാവുണ്ടാകും.

---

4. 12. B. വ്യാസാർദ്ധത്തീന്നു
13. F. ജ്യാവുണ്ടാകും
14. C. ഉണ്ടാക്കുന്നു
15. B. സ്പർശിക്കുമാറ്
16. B.D.R അതു
17. B. എട്ടൊന്നായിരിക്കും
18. D. F. കോടിജ്യാവായിട്ടിരിക്കും

പിന്നെ ഈ ജ്യാക്കൾ പ്രമാണഫലങ്ങളായി ഈ ജ്യാഗ്രങ്ങളുടെ സംമ്പാതത്തിങ്കൽ അഗ്രമായിരിക്കുന്ന വ്യാസാർദ്ധകർണ്ണം പ്രമാണമായി ദ്വിതീയചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ സമസ്തജ്യാവ് ഇച്ഛയായി, കല്പിച്ചിട്ടുണ്ടാക്കിയ ഇച്ഛാഫലങ്ങൾ ദ്വിതീയചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ ഭുജാകോടിജ്യാക്കളാകുന്നത്. ഇതിൽ ഭുജാഖണ്ഡം പ്രഥമജ്യാവിൽ കൂട്ടൂ. കോടിഖണ്ഡത്തെ ഇരുപത്തിമൂന്നാംജ്യാവിൽ കളയൂ. എന്നാൽ രണ്ടാം ജ്യാവും ഇരുപത്തിരണ്ടാം ജ്യാവും ഉണ്ടാകും. ഇവ ഭുജാകോടികളായിട്ടുമിരിക്കും.

പിന്നെ ഇവ പ്രമാണഫലങ്ങളായിട്ടു തൃതീയചാപഖണ്ഡമദ്ധ്യത്തിങ്കൽ അഗ്രമായിരിക്കുന്ന ഭുജാകോടിജ്യാക്കളെ ഉണ്ടാക്കൂ. പിന്നെ അവ പ്രമാണ ഫലങ്ങളായിട്ടു തൃതീയചാപത്തിന്റെ അഗ്രത്തിങ്കൽ അഗ്രമായിരിക്കുന്ന ഭുജാ കോടിജ്യാക്കളെ ഉണ്ടാക്കൂ. പിന്നെ ഒടുക്കത്തോളമീവണ്ണം. അവിടെ[19] ചാപമദ്ധ്യത്തിങ്കന്ന് ഉണ്ടാകുന്നതു മദ്ധ്യത്തിങ്കലേതിൽ സംസ്കരിപ്പൂ. ചാപഖണ്ഡാഗ്രത്തിങ്കന്ന് ഉണ്ടാകുന്ന ഖണ്ഡജ്യാക്കൾ ഖണ്ഡാഗ്രത്തിങ്കൽ ഉണ്ടായവറ്റിൽ സംസ്കരിപ്പൂ. എന്നാൽ ചാപഖണ്ഡമദ്ധ്യത്തിങ്കലേവ ഒരു പരിഷ; അഗ്രത്തിങ്കലേവ ഒരു പരിഷ. ഇവറ്റിന്റെ[20] മദ്ധ്യത്തിങ്കലേവറ്റെ ഉപേക്ഷിച്ച് അഗ്രത്തിങ്കലേവറ്റെ പഠിച്ചേപ്പൂ. ഇവ പഠിതജ്യാക്കളാകുന്നത്.

4.iii. ഇഷ്ടപ്രദേശത്തിങ്കലെ ജ്യാനയനപ്രകാരം

പിന്നെ ഒരു ചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ അഗ്രത്തിങ്കലൊഴിയ ഇടയിലൊരു ഇഷ്ടപ്രദേശമാകുമ്പോൾ ഇഷ്ടപ്രദേശത്തിങ്കലഗ്രമായിരിക്കുന്ന ഭുജാകോടികളെ അറിവാനും ഇതുതന്നെ ഉപായം. [21]ഇസ്സമീപത്തിങ്കലെ ചാപഖണ്ഡാഗ്രത്തിങ്കന്ന് ഇഷ്ടപ്രദേശത്തോടിടക്കു "ശിഷ്ടചാപം" എന്നു പേർ. അശ്ശിഷ്ടചാപത്തെ തന്നെ സമസ്തജ്യാവായി ഇച്ഛാരാശിയായി കല്പിച്ച് ത്രൈരാശികം ചെയ്തുണ്ടാക്കുന്ന ഇച്ഛാഫലങ്ങൾ അശ്ശിഷ്ടചാപത്തിന്റെ ഭുജാകോടിഖണ്ഡജ്യാക്കൾ ആയിട്ടിരിക്കും. അവറ്റെ ഇഷ്ടപ്രദേശത്തിന്നടുത്തുള്ള ചാപഖണ്ഡാഗ്രത്തിങ്കലെ പഠിതജ്യാക്കളിൽ സംസ്കരിച്ചാൽ വൃത്തത്തിങ്കലെ ഇഷ്ടപ്രദേശത്തിങ്കലഗ്രങ്ങളായിരിക്കുന്ന ഭുജാകോടി ജ്യാക്കളുണ്ടാകും.

4. 19. F. ഇവിടെ
20. C. ഇവറ്റിൽ
21. D. ഇവിടെ, സമീപ; F. അവിടെ

അവിടെ ശിഷ്ടചാപമദ്ധ്യത്തിങ്കൽ അഗ്രമായിരിക്കുന്ന വ്യാസാർദ്ധകർണ്ണം പ്രമാണമാകുന്നത്. ഇതിന്റെ ഭുജാകോടിജ്യാക്കൾ പ്രമാണഫലങ്ങളാകുന്നത്. ഇവറ്റെ അറിഞ്ഞീല പിന്നെ. എന്നിട്ട് ഇവിടക്കുമിതുതന്നെ ഉപായം. ഇവിടെ ശിഷ്ടചാപമദ്ധ്യത്തിങ്കലും പഠിതജ്യാഗ്രത്തിങ്കലും സ്പർശിച്ചിട്ട് ശിഷ്ടചാപത്തിൽ പാതിക്ക് ഒരു സമസ്തജ്യാവിനെ കർണ്ണമായി കല്പിച്ച് ഇക്കർണ്ണത്തിന്റെ ഭുജാകോടിഖണ്ഡങ്ങളെ ഇച്ഛാഫലങ്ങളായി ഉണ്ടാക്കി പഠിതജ്യാക്കളിൽ സംസ്കരിച്ചാൽ ശിഷ്ടചാപമദ്ധ്യത്തിങ്കൽ അഗ്രമായിരിക്കുന്ന[22] ജ്യാക്കളുണ്ടാകും. ഇവറ്റിന്നു പിന്നെ ശിഷ്ടചാപാർദ്ധത്തിന്റെ മദ്ധ്യത്തിങ്കൽ അഗ്രങ്ങളായിരിക്കുന്ന ജ്യാക്കളെ അപേക്ഷ ഉണ്ട്. അവ പഠിതജ്യാക്കൾതന്നെ എന്നു കല്പിപ്പൂ, ഈഷൽഭേദമേ ഉള്ളൂ എന്നിട്ട്. ഇതുകൊണ്ട്[23] സൂക്ഷ്മത പോരായ്കിൽ ശിഷ്ടചാപത്തിൽ നാലൊന്നിന്നു സമസ്തജ്യാവിനെ കല്പിച്ച്[24] ഇതിന്നു ഖണ്ഡജ്യാക്കളെ ഉണ്ടാക്കൂ[25] നടേ. ഇതും പോരായ്കിൽ ഇതിന്റേയുമർദ്ധത്തിങ്കലേയ്ക്കു കല്പിച്ചുകൊള്ളൂ[26]. ഇതിനെ 'ഇഷ്ടദോഃകോടിധനുഷോഃ', (തന്ത്രസംഗ്രഹം. II.10 B) എന്നതുകൊണ്ടു ചൊല്ലിയത്.

5. സംകലിതങ്ങളെക്കൊണ്ട് ഇഷ്ടജ്യാശരാനയനം

5. i. ജ്യാഖണ്ഡങ്ങളും ഖണ്ഡാന്തരങ്ങളും

ഇങ്ങനെ ചാപഖണ്ഡമദ്ധ്യത്തിങ്കല[1]ഗ്രമായിരിക്കുന്ന[2] ജ്യാക്കളെ പ്രമാണഫലങ്ങളായി കല്പിക്കുമ്പോൾ ചാപസന്ധിയിങ്കൽ അഗ്രങ്ങളായിരിക്കുന്ന സമസ്തജ്യാകർണ്ണത്തിന്റെ ഭുജാകോടികളായിട്ടു ചാപസന്ധിയിങ്കലെ ഭുജാകോടിജ്യാക്കൾ ഉളവാകും. അവിടെ പ്രഥമചാപമദ്ധ്യത്തിങ്കലവറ്റെക്കൊണ്ടു പ്രഥമചാപഖണ്ഡാഗ്രത്തിലേവ[3]. അവിടേയും പ്രമാണഫലം പൂർവ്വാപരമെങ്കിൽ ഇച്ഛാഫലം ദക്ഷിണോത്തരം, പ്രമാണഫലം ദക്ഷിണോത്തരമെങ്കിൽ ഇച്ഛാഫലം പൂർവ്വാപരം എന്നിതു നിയതം. പിന്നയുമുണ്ട് . ചാപഖണ്ഡമദ്ധ്യത്തിങ്കലഗ്രം പ്രമാണഫലങ്ങൾക്ക്[4]

---

4. 22. S. F. ആയിട്ടിരിക്കുന്ന
23. B.C.D.F om. അവ പഠിതജ്യാക്കൾ; [...to...] ഇതുകൊണ്ട്
24. C. കല്പിച്ചിട്ട്
25. B. ഉണ്ടാക്കുന്നു
26 B.C.D.F Add ഇങ്ങനെ സൂക്ഷ്മത ഉണ്ടാക്കിക്കൊള്ളൂ

5. 1. F. മദ്ധ്യത്തുങ്കൽ
2. B. F. അഗ്രങ്ങളായിരിക്കുന്ന
3. F. അഗ്രത്തിങ്കലേവ
4. C. പ്രമാണഫലങ്ങൾ

എങ്കിൽ ചാപഖണ്ഡാഗ്രത്തിങ്കലഗ്രം ഇച്ഛാഫലങ്ങൾക്ക്. ചാപഖണ്ഡാഗ്രത്തിങ്കൽ, പ്രമാണഫലങ്ങൾക്ക് അഗ്രമെങ്കിൽ, ചാപഖണ്ഡ മദ്ധ്യത്തിങ്കൽ അഗ്രങ്ങൾ ഇച്ഛാഫലങ്ങൾക്ക്, എന്നിതു നിയതം. ഇവിടെ എല്ലാ ഖണ്ഡജ്യാക്കളും വരുത്തുന്നേടത്തു സമസ്തജ്യാത്രിജ്യാക്കൾ തന്നെ ഇച്ഛാ പ്രമാണങ്ങളാകുന്നത്. എന്നിട്ടു തുല്യങ്ങൾ അവ[5]. പ്രമാണഫലങ്ങൾക്കു ഭേദമുണ്ടാക കൊണ്ടത്രെ ഇച്ഛാഫലങ്ങൾക്കു ഭേദമുണ്ടാകുന്നൂ.

ഇവിടെ ചാപഖണ്ഡമദ്ധ്യത്തിങ്കലഗ്രങ്ങളായിരിക്കുന്ന കോടികളുടെ അന്തരംകൊണ്ട് ഇച്ഛാരാശിയെ ഗുണിപ്പൂ എങ്കിൽ ചാപഖണ്ഡാഗ്രത്തിങ്കലഗ്രമായിരിക്കുന്ന ഭുജാഖണ്ഡങ്ങളുടെ അന്തരം വരും. പിന്നെ ചാപഖണ്ഡമദ്ധ്യത്തിങ്കലെ ദോഃഖണ്ഡം കൊണ്ടു ഗുണിക്കിൽ[6] ചാപഖണ്ഡാഗ്രത്തിങ്കലെ കോടിഖണ്ഡാന്തരം വരും. എന്നാലിവിടെ പ്രഥമചാപസന്ധിയിങ്കലെ ഭുജാജ്യാവിനെ[7] ചാപഖണ്ഡസമസ്ത ജ്യാവുകൊണ്ടു ഗുണിച്ച് ത്രിജ്യകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ പ്രഥമചാപമദ്ധ്യത്തിങ്കൽ അഗ്രമായിരിക്കുന്ന കോടിഖണ്ഡം വരും. പിന്നെ ആ ഖണ്ഡത്തെ സമസ്തജ്യാവുകൊണ്ടു ഗുണിച്ച് ത്രിജ്യകൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ. എന്നാൽ പ്രഥമചാപഖണ്ഡാഗ്രത്തിങ്കൽ അഗ്രമായിരിക്കുന്ന ഭുജാഖണ്ഡത്തിങ്കന്നു രണ്ടാംചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ അഗ്രത്തിങ്കൽ അഗ്രമായിരിക്കുന്ന ഭുജാഖണ്ഡം എത്ര കുറയും അതുണ്ടാകും. എന്നാൽ പ്രഥമജ്യാവിനെ ചാപഖണ്ഡസമസ്തജ്യാവർഗ്ഗംകൊണ്ടു ഗുണിച്ച് ത്രിജ്യാവർഗ്ഗം കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ[8] ഫലം പ്രഥമ[9]ഖണ്ഡജ്യാവും ദ്വിതീയഖണ്ഡജ്യാവും തങ്ങളിലുള്ള[10] അന്തരമായിട്ടിരിക്കും.

പിന്നെ ചാപസന്ധിയിങ്കലെ പഠിതാജ്യാക്കൾക്ക് 'പിണ്ഡജ്യാക്കൾ' എന്നും ഉണ്ടു പേർ. എന്നാലതതു പിണ്ഡജ്യാക്കളെ സമസ്തജ്യാവർഗ്ഗം കൊണ്ടു ഗുണിച്ച് ത്രിജ്യാവർഗ്ഗംകൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ. ഫലം ഖണ്ഡജ്യാന്തരം. ഇവിടെ

5. 5. F. ഇവ
6. 6. B. ഗുണിച്ചാൽ
7. F. Add കൊണ്ടു
8. F. ഹരിപ്പൂ
9. C.D.add ഇവിടെ യാതൊരു ചാപഖണ്ഡസന്ധിങ്കൽ അഗ്രമായിട്ടിരിപ്പു ഈ ഖണ്ഡജ്യാവ്
10. B. തമ്മിലുള്ള

യാതൊരു ചാപഖണ്ഡസന്ധിയിൽ അഗ്രമായിട്ടിരിക്കുന്നൂ[11] പിണ്ഡജ്യാവ് ഇതിന്റെ ഇരുപുറവുമുള്ള ചാപഖണ്ഡങ്ങളുടെ ഖണ്ഡജ്യാക്കൾ യാവചിലവ, ഇവറ്റിന്റെ അന്തരങ്ങൾ ഫലമായിട്ടുണ്ടാകുന്നത്. ഇവിടെ പിന്നെ ഗുണകാരത്തിന്റെ സ്ഥാനത്തു ഫലവും ഹാരകത്തിന്റെ സ്ഥാനത്തു ഗുണ്യവും കൊള്ളാം. എന്നിട്ട് അതതു ഖണ്ഡാന്തരം കൊണ്ടു ഗുണിച്ച് അതതു പിണ്ഡജ്യാവിനെക്കൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ അതതു പിണ്ഡജ്യാവിനെ. എന്നാലും അതതു ഖണ്ഡാന്തരങ്ങൾ വരും. ഇങ്ങനെ ഖണ്ഡങ്ങളും ഖണ്ഡാന്തരങ്ങളും വരുത്തും പ്രകാരം.

അനന്തരം ഖണ്ഡാന്തരയോഗം, ഖണ്ഡാന്തരസംകലിതം എന്നു തുടങ്ങിയുള്ളവറ്റെ വരുത്തും പ്രകാരത്തെക്കൊണ്ട് ഇഷ്ടജ്യാശരങ്ങളെ വരുത്തും പ്രകാരത്തെ ചൊല്ലുന്നൂ. അവിടെ പ്രഥമചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ ഖണ്ഡജ്യാവാകുന്നതും പിണ്ഡജ്യാവാകുന്നതും ഒന്നേ എന്നോ ചൊല്ലിയെല്ലോ മുമ്പിൽ. ഇതിനെ സമസ്തജ്യാവർഗ്ഗം കൊണ്ടു ഗുണിച്ച് ത്രിജ്യാവർഗ്ഗം കൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ. ഫലം[12] നടേത്തെ ഖണ്ഡജ്യാവും രണ്ടാം ഖണ്ഡജ്യാവും തങ്ങളിലുള്ള[13] അന്തരം. ഈ അന്തരത്തെ നടേത്തെ ഖണ്ഡജ്യാവിങ്കന്നു കളഞ്ഞാൽ ശേഷം രണ്ടാം ഖണ്ഡജ്യാവ്. പിന്നെ അതിനെ നടേത്തെ ഖണ്ഡജ്യാവിൽ കൂട്ടിയാൽ രണ്ടാം പിണ്ഡജ്യാവാകും. ഇതിനെ സമസ്തജ്യാവർഗ്ഗം കൊണ്ടു ഗുണിച്ച് ത്രിജ്യാവർഗ്ഗം കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ഫലം രണ്ടാം ഖണ്ഡജ്യാവും മൂന്നാം ഖണ്ഡജ്യാവും[14] തങ്ങളിലുള്ള അന്തരം. ഇതിനെ രണ്ടാം ഖണ്ഡജ്യാവിങ്കന്നു കളഞ്ഞാൽ മൂന്നാം ഖണ്ഡജ്യാവുണ്ടാകും. ഇതിനെ രണ്ടാം പിണ്ഡജ്യാവിൽ കൂട്ടിയാൽ മൂന്നാം പിണ്ഡജ്യാവുണ്ടാകും. ഇവ്വണ്ണം അതതു പിണ്ഡജ്യാവിനെ ഗുണിച്ചു ഹരിച്ചാൽ അതിന്റെ[15] മീത്തെ ഖണ്ഡാന്തരം വരും. പിന്നെ നടേത്തെ തുടങ്ങി ഇഷ്ടചാപഖണ്ഡത്തോളമുള്ള ഖണ്ഡാന്തരങ്ങളെ ഒക്കകൂട്ടി നടേത്തെ ഖണ്ഡജ്യാവിങ്കന്നു കളവൂ. ശിഷ്ടം ഇഷ്ടഖണ്ഡജ്യാവായിട്ടിരിക്കും[16]. പിന്നെ

5\. 11. F. ആയിരിക്കുന്ന
12\. B. ഹരിച്ചാൽ ഫലം
13\. B. തമ്മിലുള്ള
14\. B. രണ്ടാംജ്യാവും മൂന്നാം ജ്യാവും തമ്മിലുള്ള
15\. F. അതാതിന്റെ
16\. B. C.D.F. ആയിട്ടുവരും

ഈ ഖണ്ഡജ്യാന്തരങ്ങളെ ഒക്കകൂട്ടി ഒരിക്കലെ വരുത്തേണമെങ്കിൽ ഇഷ്ടജ്യാവിങ്കന്നു നടേത്തെ പഠിതജ്യാക്കളെ ഒക്കകൂട്ടി സമസ്തജ്യാവർഗ്ഗംകൊണ്ടു ഗുണിച്ച്. ത്രിജ്യാവർഗ്ഗം കൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ. ഫലം ഖണ്ഡാന്തരയോഗം. ഇതിനെ പ്രഥമഖണ്ഡജ്യാവിങ്കന്നു കളഞ്ഞാൽ[17] ശിഷ്ടം ഇഷ്ടഖണ്ഡജ്യാവായി[18] വരും. ഇവിടെ ചാപഖണ്ഡമദ്ധ്യത്തിങ്കലെ ശരഖണ്ഡയോഗത്തെ സമസ്തജ്യാവിനെ കൊണ്ടു ഗുണിച്ച്, ത്രിജ്യകൊണ്ടു ഹരിച്ചാലും ഖണ്ഡാന്തരയോഗം വരും. ശരഖണ്ഡയോഗം പിന്നെ മദ്ധ്യത്തിങ്കലേത് ഉണ്ടാവാൻ ചാപഖണ്ഡാഗ്രത്തിങ്കലെ ഭുജാജ്യാപിണ്ഡയോഗത്തെ ചാപഖണ്ഡസമസ്തജ്യാവിനെക്കൊണ്ട് ഗുണിച്ച് ത്രിജ്യകൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ എന്നാൽ ചാപഖണ്ഡമദ്ധ്യോത്ഥശരഖണ്ഡയോഗം ഉണ്ടാകും.

5.ii. ഇഷ്ടജ്യാശരങ്ങളെ ജ്യാസംകലിതം കൊണ്ട് വരുത്തുംപ്രകാരം

ഖണ്ഡജ്യായോഗത്തെ വരുത്തുംപ്രകാരം പിന്നെ. പദത്തിൽ[19] ഇരുപത്തിനാലു ജ്യാവ് എന്നിരിക്കുന്നേടത്ത് എട്ടാംജ്യാവിനെ വരുത്തുവാൻ ചൊല്ലുന്നു. ആ[20] പ്രഥമപിണ്ഡജ്യാവിനെ ഏഴിൽ ഗുണിപ്പൂ; രണ്ടാം പിണ്ഡജ്യാവിനെ ആറിൽ ഗുണിപ്പൂ; മൂന്നാമതിനെ അഞ്ചിൽ, നാലാമതിനെ നാലിൽ, അഞ്ചാമതിനെ മൂന്നിൽ, ആറാമതിനെ രണ്ടിൽ, ഏഴാം പിണ്ഡജ്യാവിനെ ഒന്നിൽ[21] ഗുണിപ്പൂ[22]. ഇവ ഒക്ക തങ്ങളിൽ കൂട്ടൂ. ഇതിന്നു 'ജ്യാസംകലിതം' എന്നു പേർ. സംകലിതത്തേയോ മുമ്പിൽ വിസ്തരിച്ചു ചൊല്ലിയല്ലോ[23], വൃത്തവ്യാസത്തെ[24] വരുത്തുന്നേടത്ത്. എന്നാൽ ഈ ജ്യാസംകലിതത്തെ ചാപഖണ്ഡസമസ്തജ്യാവർഗ്ഗം കൊണ്ടു ഗുണിച്ച്

---

5. 17. F. കളവൂ
18. C. D.F. ആയിട്ടുവരും
19. C. D. പദത്തിങ്കൽ
20. B. C. om. ആ
21. B. ഗുണിക്കൂ
22. C. D. R. add പിന്നെ
23. B. സംകലിതം മുൻ ചൊല്ലിയല്ലോ
24. C.F. വൃത്തവ്യാസങ്ങളെ

ത്രിജ്യാവർഗ്ഗം കൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ. ഫലത്തെ പ്രഥമഖണ്ഡജ്യാവിനെ എട്ടിൽ ഗുണിച്ചതിങ്കന്നു കളവൂ. ശിഷ്ടം എട്ടാം ജ്യാവായിട്ടിരിക്കും[25a]

ഇങ്ങനെ യാതൊരു ചാപഖണ്ഡാഗ്രത്തിങ്കലെ ജ്യാസംകലിതം ചെതത് അതിന്റെ മീത്തെ ചാപഖണ്ഡാഗ്രത്തിങ്കലെ ജ്യാചാപാന്തരം വരും എന്നു നിയതം. ഇവിടെ ചാപഖണ്ഡം എത്രയും ചെറുതായിട്ടു കല്പിക്കേണ്ടൂ; അപ്പോൾ ഖണ്ഡജ്യാവും ആദ്യത്തിന്റേതു ചാപം തന്നെയായിട്ടിരിക്കും. എന്നാൽ അതിനെ ഇഷ്ടസംഖ്യകൊണ്ടു[25b] ഗുണിച്ചാൽ അതു ഇഷ്ടചാപം തന്നെ ആയിട്ടിരിക്കും. എന്നാൽ സംകലിതത്തിന്റെ ഫലം[26] ഇഷ്ടചാപത്തിങ്കന്നു കളഞ്ഞാൽ ഇഷ്ടജ്യാവു വരും.

ഇവിടെ ഒരു പ്രകാരം പറഞ്ഞുകൊള്ളേണമെല്ലൊ[27] എന്നിട്ടു ചൊല്ലീ, പദത്തിങ്കൽ ഇരുപത്തിനാലു ജ്യാവ് എന്ന്. എന്നിട്ടിവിടെ ഇഷ്ടചാപത്തിങ്കലെ ഒടുക്കത്തെ ഖണ്ഡാന്തരം തുടങ്ങി ആദ്യദ്വിതീയഖണ്ഡാന്തരത്തോളമുള്ളവറ്റെ ക്രമേണ ഒന്നു തുടങ്ങി ഓരോന്നേറിയുള്ള സംഖ്യകളെകൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ ഖണ്ഡാന്തരസംകലിതം വരും. ഇതു ഇഷ്ടചാപവും ഇഷ്ടജ്യാവും തമ്മിലുള്ള അന്തരമാകുന്നത് എന്നു വന്നു[28].

ഇവിടെ ഇഷ്ടചാപത്തിന്ന് അടുത്തു കീഴേതിനോളമുള്ള ജ്യാക്കളെല്ലോ ജ്യാചാപാന്തരത്തിന്നു സാധനമാകുന്നത്. ഈ ജ്യാക്കളാൽ ഒന്നും അറിഞ്ഞീലാ എന്നിരിക്കയാൽ ചാപത്തെത്തന്നെ ജ്യാവെന്നു കല്പിച്ചു ചാപസംകലിതം ചെവൂ. ഇവിടെ ഇഷ്ടചാപംതന്നെ ഒടുക്കത്തെ ജ്യാവാകുന്നത്. ഇതിൽ[29] ഒരു ചാപഖണ്ഡം കുറഞ്ഞത് അടുത്തു കീഴെ ജ്യാവ്. പിന്നെ ഇതിങ്കന്നും ഓരോരോ ഖണ്ഡം കുറഞ്ഞതു കീഴെ കീഴെ ജ്യാക്കൾ എന്നു കല്പിപ്പൂ. ഇവിടെയും പിന്നെ ഇഷ്ടചാപത്തിങ്കൽ എത്ര ഇലി ഉള്ളൂ അത്ര ചാപഖണ്ഡമുള്ളൂ എന്നൂ കല്പിപ്പൂ. എന്നാൽ പിന്നെ ഇസ്സംഖ്യകളുടെ ഏകാദ്യേകോത്തരസംകലിതം ചെവൂ. അതു യാതൊന്ന് അതു ജ്യായോഗമാകുന്നത് എന്നു വരും. ഇതിനെ സമസ്തജ്യാവാകുന്ന ഒരു ഇലിയെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ സംഖ്യാഭേദം വരാ. എന്നാൽ ഇതിനെതന്നെ ത്രിജ്യക്കൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ. ഫലം ചാപഖണ്ഡമദ്ധ്യത്തിങ്കലെ

5. 25a.B എട്ടാം ജ്യാവായിരിക്കും
25b.B.C. ഖണ്ഡസംഖ്യകൊണ്ട്
26. C. adds ഇരുപത്തഞ്ചാലെ ജ്യാവ് എന്നിവിടെ ഇഷ്ടചാപത്തിങ്കലെ ഫലം
27. B. പറയേണമല്ലോ D. F. add അത്രേ
28. F. തമ്മിലുള്ള അന്തരമാകുന്നു
29. F. ഇവിടെ

ശരഖണ്ഡയോഗം. ഖണ്ഡം ചെറുതാകയാൽ ഖണ്ഡാഗ്രത്തിങ്കലെ ശരഖണ്ഡയോഗവും മിക്കതുമിതിന്നു സമം. എന്നിട്ട് ഇതുതന്നെ എന്നു കല്പിക്കാം. ഖണ്ഡം ചെറുതായോളം ജ്യാവും സൂക്ഷ്മമായിരിക്കും[30]. എന്നിട്ട് ഇലീടെ പരാർദ്ധാംശം താൻ ഖണ്ഡമെന്നു കല്പിച്ച് പരാർദ്ധമാകുന്ന ഛേദം കൊണ്ടു ഗുണിച്ച് സംകലിതം ചെതു ഛേദം കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ഫലം, ഛേദംകൊണ്ടു ഗുണിയാതെ സംകലിതം ചെതതിനോടു മിക്കതും തുല്യമായിട്ടിരിക്കും.[31]

iii. ആദ്യദ്വിതീയാദി സംകലിതങ്ങൾ

എന്നാലിവിടെ എത്ര രൂപവ്യക്തികളുള്ളൂ, അണുപരിമാണമായിട്ടിരിപ്പോ ചിലവ, ഇഷ്ടചാപത്തിങ്കലത്ര സംഖ്യ ഉള്ളോരു രാശിയെ സംകലിതം ചെയ്യുന്നൂ[32]. അസ്സംഖ്യ പദമായിട്ടിരിപ്പൊന്ന്. അസ്സംകലിതക്ഷേത്രം പദത്തോളം വരി, വരിയിൽ നടേത്തേതിൽ സംഖ്യ ഒന്ന്. അതു സമചതുരശ്രമായിട്ടിരിപ്പോരു ഖണ്ഡമെന്നു കല്പിച്ചാൽ എളുപ്പമുണ്ട്. രണ്ടാം വരിയിൽ രണ്ടു ഖണ്ഡം, മുന്നാം വരിയിൽ മൂന്ന്[33] ഇങ്ങനെ ഓരോന്നേറീട്ട് ഒടുക്കത്തെ വരിയിൽ[34] പദസംഖ്യയോളം ഖണ്ഡസംഖ്യയായിട്ടിരിക്കും[35]. ഇവിടെ[36] രാശിയാകുന്നത് ഇഷ്ടചാപം. ഇതിങ്കലെ ഇലികളെ അണുച്ഛേദംകൊണ്ടു ഗുണിച്ച് അണുവായിട്ടുള്ള അണുസംഖ്യ പദസംഖ്യ ആകുന്നത്. പിന്നെ പദവും പദത്തിൽ ഒരു സംഖ്യ ഏറിയതും തങ്ങളിൽ[37] ഗുണിച്ച് ഒന്നും രണ്ടും തങ്ങളിലുള്ള ഘാതം രണ്ടുകൊണ്ട്[38] ഹരിച്ചാൽ ഫലം സംകലിതമായിട്ടിരിക്കും[39] ഇങ്ങനെ നടേത്തെ സംകലിതം.

രണ്ടാം സംകലിതം പിന്നെ. ഇസ്സംകലിതവും ഇതിൽ ഒരു വരി കുറഞ്ഞ സംകലിതവും, രണ്ടു വരി കുറഞ്ഞ സംകലിതവും, മൂന്നുവരി കുറഞ്ഞതും ഇങ്ങനെ ക്രമേണ ഓരോരോ പദം കുറഞ്ഞ സംകലിതങ്ങളെ ഒക്ക കൂട്ടിയതു രണ്ടാം സംകലിതമാകുന്നത്. പിന്നെ ഇസ്സംകലിതം അന്ത്യപദത്തിന്റെ സംകലിതമെന്നു കല്പിച്ച് ഉത്തരങ്ങളെ ഒരോരോ പദം കുറഞ്ഞവറ്റെ ഒക്ക കൂട്ടിയതു മൂന്നാം സംകലിതം.

---

5. 30. F. C. ആയിട്ടിരിക്കും
31. B. തുല്യമായിരിക്കും
32. F. ചെവൂ
33. C. മൂന്ന് ഖണ്ഡം
34. B. ഒടുക്കത്തേതിൽ
35. B. ആയിരിക്കും
36. C. ഇവിടെ പിന്നെ
37. B. തമ്മിൽ
38. F. അതിനെക്കൊണ്ട്
39. B. സംകലിതമായിരിക്കും

ഇതിനെ വരുത്തുംപ്രകാരം. പദവും പദത്തിൽ ഒന്നു കൂടിയതും പദത്തിൽ രണ്ടു കൂടിയതും മൂന്നും[40] തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതിനെ ഒന്നും രണ്ടും മൂന്നും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ച് ആറുകൊണ്ടു ഹരിച്ചഫലം രണ്ടാം സംകലിതം. ഈവണ്ണം ഒരോന്നോരോന്നേറിയ രാശികൾ എത്ര[41] അവ തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചൂ അത്ര ഒന്ന്, രണ്ട് സംഖ്യകൾ തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതിനെക്കൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ. ഫലം ഒന്നു കീഴെ സംകലിതം. ഇവിടെ ചാപഖണ്ഡം അത്യന്തം അണുവായി കല്പിച്ചാൽ ജ്യാവു സുക്ഷ്മമാകും[42]. എന്നിട്ടു ശൂന്യപ്രായമായ[43] രൂപങ്ങളെക്കൊണ്ടു പദത്തിൽ ഒരോന്നേറുമ്പോൾ സംഖ്യയ്ക്ക് എത്രയും വിശേഷമില്ല. എന്നിട്ട് ഇഷ്ടചാപത്തിന്റെ വർഗ്ഗഘനാദികളെത്തന്നെ ഏകാദിഘാതംകൊണ്ടു ഹരിക്കേ വേണ്ടൂ. എന്നാൽ ഫലം സൂക്ഷ്മമായിട്ടിരിക്കും[44].

എന്നിട്ടു ചാപവർഗ്ഗാർദ്ധം നടേത്തെ സംകലിതം. പിന്നെ[45] ഇഷ്ടചാപഘനത്തിൽ ആറൊന്നു രണ്ടാം സംകലിതം. അവിടെ നടേത്തെ സംകലിതം വർഗ്ഗാർദ്ധമെന്നിരിക്കയാൽ രണ്ടാം സംകലിതത്തിന്ന് അത് അന്ത്യപദം എന്നു കല്പിച്ച് അതിൽ ഒന്നു കുറഞ്ഞ പദത്തിന്റെ വർഗ്ഗാർദ്ധം ഉപാന്ത്യപദം. ഇങ്ങനെ ക്രമേണ യോഗം ചെതാൽ ഇഷ്ടചാപത്തിന്റെ വർഗ്ഗാർദ്ധത്തിന്റെ സംകലിതമായിട്ടിരിക്കും. അതു വർഗ്ഗസംകലിതത്തിന്റെ അർദ്ധം. പദത്തിന്റെ ഘനത്തിൽ മൂന്നൊന്നു വർഗ്ഗസംകലിതമെന്നോ മുമ്പിൽ ചൊല്ലിയെല്ലോ. എന്നാൽ ഇതിന്റെ അർദ്ധമാകുന്നതു ഘനത്തിൽ ആറൊന്ന്. പിന്നെ മൂന്നാം സംകലിതമാകുന്നതു ഘനസംകലിതത്തിന്റെ ആറൊന്ന് എന്നിരിക്കും ഈ ന്യായം കൊണ്ട്[46]. എന്നാൽ അതു വർഗ്ഗവർഗ്ഗത്തിൽ ഇരുപത്തുനാലൊന്നായിട്ടിരിക്കും. എന്നാൽ സമരാശികളെ എത്രവറ്റെ[47] തങ്ങളിൽ[48] ഗുണിപ്പ്[49] ഒന്ന്, രണ്ട് തുടങ്ങിയിട്ടുള്ളവറ്റിന്റെ അത്രേടമുള്ള സംഖ്യേടെ ഘാതം ഹാരകമാകുന്നത് അതിന് എന്നു മുമ്പിൽ സംകലിതം വിസ്തരിച്ചു ചെല്ലിയതിനെക്കൊണ്ട് വന്നുകുടൂം.

5. 40. B. F. മൂന്ന് രാശിയും തമ്മിൽ
41. B.C.D. F. സംഖ്യകൾ
42. F. ആയിരിക്കാം
43. C. D. R. ശൂന്യപ്രായമാകുന്ന
44. B. സൂക്ഷ്മമാകും
45. F. adds വർഗ്ഗാർദ്ധമെന്നിരിക്കയാൽ രണ്ടാം സംകലിതത്തിന്
46. B. om. ഈ ന്യായം കൊണ്ട്
47. F. എത്രവറ്റെകളിൽ
48. B. തമ്മിൽ
49. C. ഗുണിപ്പൂ

5. iv. ഇഷ്ടജ്യാശരങ്ങൾക്ക് മീത്തെ സംസ്കാരങ്ങൾ

എന്നാലിവിടെ നടേത്തെ സംകലിതമാകുന്നത് ആദ്യജ്യാവു തുടങ്ങി ഇഷ്ടജ്യാവോളമുള്ള ജ്യാക്കളുടെ യോഗം. ഇതിനെ സമസ്തജ്യാസംഖ്യ ഒന്ന്[50] എന്നിട്ട് അതിനെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ സംഖ്യാഭേദമില്ല. എന്നിട്ട് വ്യാസാർദ്ധംകൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ. ഫലം ശരഖണ്ഡയോഗമാകുന്ന ശരമായിട്ടുവരും. പിന്നെ ഇശ്ശരത്തെ[51] ചാപഖണ്ഡയോഗംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചു വ്യാസാർദ്ധംകൊണ്ടു ഹരിച്ച് മൂന്നിലും ഹരിച്ചാൽ ജ്യാചാപാന്തരം വരും[52]. പിന്നെ ഇഷ്ടചാപഘനത്തിന്റെ ആറൊന്നിനെ വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗം കൊണ്ടു ഹരിച്ചഫലവും ജ്യാചാപാന്തരമായിട്ടിരിക്കും.

പിന്നെ ഇഷ്ടജ്യാശരത്തെ വ്യാസാർദ്ധംകൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ ഫലം ആദ്യാന്ത്യഖണ്ഡാന്തരം. പിന്നത്തെ ജ്യായോഗംകൊണ്ടു ആദ്യോപാന്ത്യഖണ്ഡാന്തരം ഉണ്ടാകും. ഇവ്വണ്ണമാകുമ്പോൾ ഘനഷഷ്ഠാംശമാകുന്ന രണ്ടാം സംകലിതത്തിങ്കന്ന് ആദ്യഖണ്ഡജ്യാവിങ്കന്ന് എല്ലാ ഖണ്ഡത്തിന്റെയും അന്തരങ്ങൾ ഒക്ക കൂടിയതു ഖണ്ഡാന്തരസംകലിതം - ഇതു തന്നെ ജ്യാചാപാന്തരമാകുന്നതും അതുണ്ടാകും.

ഇതു പ്രായികമെത്രെ താനും, ജ്യാസംകലിതത്തിന്റെ സ്ഥാനത്തു ചാപസംകലിതമെല്ലോ കൊണ്ടത് എന്നിട്ട്.

എന്നാൽ ഈവണ്ണം[53] കീഴെ കീഴെ ജ്യാചാപാന്തരങ്ങൾ ഒക്ക തങ്ങളിൽ[54] കൂട്ടിയതു ജ്യാസംകലിതത്തിങ്കന്നു ചാപസംകലിതത്തിൽ ഏറിപ്പോയ അംശമാകുന്നത്. എത്ര ചാപങ്ങളുടെ യോഗത്തിങ്കന്നു ശരത്തെ ഉണ്ടാക്കി അത്ര ജ്യാചാപാന്തരങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കി വ്യാസാർദ്ധം കൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലത്തെ[55] ശരത്തിങ്കന്നു കളഞ്ഞാൽ ശരമൊട്ടു സൂക്ഷ്മമാകും.

എന്നാലിവിടെ രണ്ടാം സംകലിതത്തിങ്കന്ന് എല്ലോ[56] ഒടുക്കത്തെ ജ്യാചാപാന്തരത്തെ ഉണ്ടാക്കി, ഇവ്വണ്ണം പദത്തിന്റെ[57] ഓരോന്നോരോന്നു കുറഞ്ഞതിന്റെ രണ്ടാം സംകലിതത്തിങ്കന്നു ഉപാന്ത്യാദി കീഴെ കീഴെ ജ്യാചാപാന്തരങ്ങൾ ഒക്ക ഉണ്ടാക്കേണ്ടൂ. എന്നാൽ മൂന്നാം

---

5. 50. B. C. om. എന്നിട്ട് അതിനെ
51. B. C. ഈ ശരങ്ങളെ
52. B. C. D വരും
53. B. C. F. എന്നീവണ്ണം
54. B. ജ്യാവാന്തരങ്ങളൊക്കെ തങ്ങളിൽ
55. B. F. ഫലം
56. F. ത്തിൽ തന്നെല്ലോ
57. C. D. F. പദത്തിൽ

സംകലിതത്തിങ്കന്നു ജ്യാചാപാന്തരയോഗമുണ്ടാകും. എന്നാൽ നാലാം സംകലിതത്തിങ്കന്നു ജ്യാചാപാന്തരസംകലിതത്തെ ഉണ്ടാക്കേണ്ടൂ[58], മുമ്പിൽ ചൊല്ലിയവണ്ണം. പിന്നെ ഇസ്സംകലിതം യാതൊന്ന് അതു മുമ്പിൽ ജ്യാസംകലിതം വേണ്ടിയിരുന്നേടത്തു ചാപസംകലിതം കൊണ്ടാറെ ഏറിപ്പോയ അംശമത്. ഇച്ചാപസംകലിതത്തിങ്കന്ന് വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗംകൊണ്ടു ഹരിച്ചഫലം മുമ്പിലുണ്ടാക്കിയ ജ്യാചാപാന്തരത്തിങ്കന്നു കളഞ്ഞാൽ ഇഷ്ടജ്യാചാപാന്തരമൊട്ടു സൂക്ഷ്മമാകും.

ഇവിടെ നടേ ഉണ്ടാക്കിയ ജ്യാചാപാന്തരത്തെ ഇഷ്ടചാപംകൊണ്ടു ഗുണിച്ച് വ്യാസാർദ്ധം കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ശരസംസ്കാരമുണ്ടാകും[59]. ഇശ്ശരസംസ്കാരത്തെ പിന്നെയും ഇഷ്ടചാപംകൊണ്ടു ഗുണിച്ച്[60] വ്യാസാർദ്ധംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ജ്യാചാപാന്തരസംസ്കാരമുണ്ടാകും. ഈവണ്ണമുണ്ടാക്കിയ ജ്യാചാപാന്തര സംസ്കാരം ജ്യാചാപാന്തരയോഗത്തിങ്കന്നു ഉണ്ടാക്കൂ. അതാകുന്നത് ഈ സംസ്കാരത്തെ ചാപംകൊണ്ടു ഗുണിച്ച് പിന്നെ അതിനെ വ്യാസാർദ്ധംകൊണ്ടു ഹരിച്ചതു മുമ്പിലെ ശരസംസ്കാരത്തിങ്കന്നു കളഞ്ഞാൽ ഇശ്ശരസംസ്കാരം സൂക്ഷ്മമാകും. ഇശ്ശരസംസ്കാരത്തെ പിന്നെ ഇഷ്ടചാപംകൊണ്ടു ഗുണിച്ച് വ്യാസാർദ്ധംകൊണ്ടു ഹരിച്ചഫലം ജ്യാചാപാന്തരസംസ്കാരത്തിന്റെ സംസ്കാരം. ഇവിടെ എല്ലാടവും ഫലത്തെ ചാപംകൊണ്ട് ഗുണിച്ചാൽ ഒന്ന്, രണ്ട് എന്നുതുടങ്ങിയുള്ള സംഖ്യകളിലത്രാമതുകൊണ്ടു ഹരിച്ചതിനെ വ്യാസാർദ്ധം കൊണ്ടു ഹരിക്കേണ്ടൂ, സംകലിതത്തിങ്കന്നു വേണം സംസ്കാരമുണ്ടാക്കുവാൻ എന്നിട്ട്[61] ഇങ്ങനെ ഒരു സംകലിതത്തിന്റെ ഫലത്തിങ്കന്നു മീത്തെ സംകലിതം കൊണ്ടുണ്ടാക്കുന്ന ഫലത്തിങ്കൽ[62] അന്തരത്തെ ഉണ്ടാക്കും പ്രകാരം. ഇവിടെ ചാപത്തെ എത്ര ആവൃത്തി ചാപം കൊണ്ടുഗുണിച്ചൂ, ഇതിന്നു ഹാരകം വ്യാസാർദ്ധത്തെ വ്യാസാർദ്ധംകൊണ്ട് അത്ര ആവൃത്തി ഗുണിച്ച് അത്ര ഏകാദ്യേകോത്തരങ്ങളുടെ ഘാതവും കൂടി ഹാരകം. ഒരു ഫലത്തിങ്കന്നു മീത്തെ ഫലമുണ്ടാക്കുവാൻ ഇഷ്ടചാപംകൊണ്ടു ഫലത്തെ ഒരിക്കൽ ഗുണിപ്പൂ, വ്യാസാർദ്ധം കൊണ്ട് ഒരിക്കൽ ഹരിപ്പൂ. എന്നാലും ഫലം തുല്യം.

---

5. 58. F. ജ്യാചാപാന്തരയോഗം ഉണ്ടാകും
59. B. F. ആ; C. D. അശ്ശര
60. F. adds പിന്നെ അതിനെ
61. F. എന്നിങ്ങനെ
62. B. C. D. ഫലത്തിന്റെ

5. v. പഠിതജ്യാക്കൾ ഇല്ലാതെ സൂക്ഷ്മ ജ്യാശരാനയനം

ഇങ്ങനെ ഫലങ്ങളെല്ലാം ജ്യായോഗത്തിങ്കന്ന് ഉണ്ടാക്കേണ്ടൂ എന്നിരിക്കുന്നേടത്തു ചാപയോഗത്തിങ്കന്ന് ഉണ്ടാക്കയാൽ സംസ്കാരഫലങ്ങളെല്ലാം വാസ്തവഫലത്തിങ്കന്ന് ഏറ ഉണ്ടായിരിക്കും. എന്നിട്ടു മീത്തെ മീത്തെ സംസ്കാരഫലം നടേത്തെ നടേത്തെ സംസ്കാരഫലത്തിങ്കന്നു കളയേണം, എന്നാലിവണ്ണം വേണ്ടൂ[63] ഇവിടുത്തെ ക്രിയാക്രമം. ഇഷ്ടചാപം നടേത്തെ രാശിയാകുന്നത്. ഇതിനെ വർഗ്ഗിച്ച് അർദ്ധിച്ച് ത്രിജ്യകൊണ്ടു ഹരിച്ചതു രണ്ടാം രാശിയാകുന്നത്. രണ്ടാം രാശിയെ വേറെ ഒരിടത്തു വെപ്പൂ. പിന്നെ ഇതിനേയും ചാപംകൊണ്ടു ഗുണിച്ച് മൂന്നിലും ത്രിജ്യകൊണ്ടും ഹരിപ്പൂ. ഈ ഫലത്തെ[64] പ്രഥമഫലത്തിന്റെ കീഴെ വെയ്പ്പ്. പിന്നെ ഇതിനേയും ചാപംകൊണ്ടു ഗുണിച്ച് നാലിലും ത്രിജ്യകൊണ്ടും ഹരിപ്പൂ. ഫലം ദ്വിതീയഫലത്തിന്റെ കീഴെ വെപ്പൂ. ഇങ്ങനെ അതതു ഫലത്തിങ്കന്നു ചാപംകൊണ്ടു ഗുണിച്ച് വ്യാസാർദ്ധംകൊണ്ടും ഒന്ന് രണ്ട് തുടങ്ങിയവറ്റിൽ മീത്തെ മീത്തെ വറ്റെക്കൊണ്ടും ഹരിച്ചാൽ[65] മീത്തെ മീത്തെ ഫലങ്ങളുണ്ടാകും. ഇവിടെ മൂന്നാമത് അഞ്ചാമത് എന്നു തുടങ്ങിയുള്ള ഓജഫലങ്ങൾ പ്രഥമരാശിയുടെ പങ്ക്തിയിൽ കീഴെ കീഴെ വെപ്പൂ. നാലാമത് ആറാമത് തുടങ്ങിയുള്ള യുഗ്മഫലങ്ങളെ ദ്വിതീയരാശിയുടെ പങ്ക്തിയിൽ കീഴെ കീഴെ വെപ്പൂ. പിന്നെ എല്ലായിലും കീഴേത് അടുത്തു മീത്തേതിൽ കളയൂ. ശിഷ്ടം അടുത്തു മീത്തേതിൽ, ഇങ്ങനെ ഒരു പങ്ക്തിയിൽ പ്രഥമരാശി ശേഷിക്കും. മറ്റേ പങ്ക്തിയിൽ ദ്വിതീയരാശി ശേഷിക്കും. അവ ഇഷ്ടജ്യാശരങ്ങൾ.

ഇവിടെ ഓജഫലങ്ങളെ തന്നെ വേറെ ഉണ്ടാക്കി[66] ഇഷ്ടജ്യാവുണ്ടാക്കൂ. യുഗ്മഫലങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കി ഇഷ്ടശരവുമുണ്ടാക്കൂ, ഇങ്ങനേയുമാം. ഇവിടെ[67] ഇഷ്ടജ്യാവിനെ ഉണ്ടാക്കുംപ്രകാരം. ഇഷ്ടചാപത്തെ ഇഷ്ടചാപവർഗ്ഗം കൊണ്ടു ഗുണിച്ച് വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗം കൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ. പിന്നെ രണ്ടും മൂന്നും തങ്ങളിലുള്ള ഘാതം ആറുകൊണ്ടും ഹരിപ്പൂ. ഫലം ജ്യാചാപാന്തരം. പിന്നേയും ക്രമേണയുള്ള ഫലങ്ങൾക്കൊക്കെ ചാപവർഗ്ഗം ഗുണകാരം, വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗം ഹാരകം, യുഗ്മസംഖ്യയും മീത്തെ ഓജസംഖ്യയും

5. 63. F. വേണ്ടുവത്
63. D. E. ഫലത്തെ
65. F. ഹരിപ്പൂ. ഫലത്തെ
66. F. ആ ഇഷ്ടജ്യാഫലങ്ങൾ
67. B. om. ഇവിടെ

തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതും ഹാരകം. അതതു[68] യുഗ്മസംഖ്യാവർഗ്ഗത്തിൽ തന്റെ മൂലം കൂട്ടിയതായിട്ടിരിക്കുമിത്, യുഗ്മസംഖ്യയിങ്കന്ന് ഒന്ന് എല്ലോ മീത്തെ ഓജസംഖ്യയിൽ ഏറൂ, എന്നിട്ട്. ഇങ്ങനെ ഇഷ്ടജ്യാവു തന്നെ[69] വേറെ വരുത്തും പ്രകാരം.

പിന്നെ ദ്വിതീയരാശിയെ ഇവ്വണ്ണം അതിന്റെ ഫലങ്ങളേയും ഗുണിച്ച് ഹരിച്ചാൽ ഇഷ്ടശരം വരും. ഇവിടെ ഓജസംഖ്യാവർഗ്ഗത്തിൽ തന്റെ മൂലം കൂടിയതു[70] ഹാരകമാകുന്നത് എന്നേ വിശേഷമുള്ളൂ.

പിന്നെ ഇവ്വണ്ണം വൃത്തപാദത്തിങ്കലെ ഇഷ്ടജ്യാശരങ്ങളെ വരുത്തുവാൻ ഉണ്ടാക്കിയ ഫലങ്ങളെ പഠിച്ചിയേച്ച് ഇവറ്റെക്കൊണ്ട് ഇഷ്ടചാപത്തിങ്കലേയ്ക്കു ത്രൈരാശികം കൊണ്ടു വരുത്തൂ. ഓജഫലവും യുഗ്മഫലവും വെവ്വേറെ പഠിപ്പൂ, രണ്ടു പരിഷയായിട്ട്. ഇവിടെ രണ്ടു വകയിലും ഒടുക്കത്തെ ഫലങ്ങളെ ഇഷ്ടചാപവർഗ്ഗം കൊണ്ടു ഗുണിച്ച് വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗം കൊണ്ടു ഹരിച്ചഫലം ഉപാന്ത്യഫലത്തിങ്കന്നു കളവൂ. പിന്നേയും ഇവ്വണ്ണം ഗുണിച്ചു, ഹരിച്ചു, നടേത്തേതിൽ[71] നടേത്തേതിൽ കളവൂ. പിന്നെ 'വിദ്വാൻ' എന്നു തുടങ്ങിയുള്ളവറ്റിന്റെ ഒടുക്കത്തെ ഫലത്തെ ഇഷ്ടചാപത്തിങ്കന്നു കളവൂ. ശിഷ്ടം ഇഷ്ടജ്യാവ് 'സ്തേന' എന്നു തുടങ്ങിയുള്ളവറ്റിൽ ഈവണ്ണം ക്രിയചെയ്താൽ ഒടുക്കത്തേതു തന്നെ ഇഷ്ടശരം, ഇങ്ങനെ പഠിതങ്ങൾ കൂടാതെ ഇഷ്ടജ്യാശരങ്ങളെ വരുത്തും പ്രകാരം[72].

6. പ്രായികപരിധിയെ സൂക്ഷ്മമാക്കും പ്രകാരം

അനന്തരം[1] ഈ ന്യായത്തിന്നു തക്കവണ്ണം ഇഷ്ടവ്യാസത്തിന്നു പ്രായികമായിട്ട്[2] ഒരു പരിധിയെ ഉണ്ടാക്കിയിരിക്കുന്നതിനെ സൂക്ഷ്മമാക്കും പ്രകാരത്തെ ചൊല്ലുന്നു.

അവിടെ നടേ ഇഷ്ടമായി ഒരു വ്യാസത്തെ കല്പിച്ച് അതിനെ

68. C. D. F. അതാതിന്റെ ഫലം കൂട്ടിയതായിട്ടിരിക്കും
69. F. ഇഷ്ടജ്യാശരങ്ങളെ
70. E.F കൂട്ടിയത്
71. B. F.om. നടേത്തേതിൽ
72. B. ഉണ്ടാക്കും പ്രകാരം

6\. 1. B.om. അനന്തരം
2. B. പ്രായികമായൊരു

പ്രായികമായിട്ട് ഒരു പരിധിയെ ഉണ്ടാക്കൂ[3]. ഏഴിന്ന് ഇരുപത്തിരണ്ടു എന്നു തുടങ്ങിയുള്ള പ്രായികവ്യാസപരിധികളെക്കൊണ്ട് ത്രൈരാശികത്തിന്നു തക്കവണ്ണം. പിന്നെ ഇഷ്ടവ്യാസത്തെ വ്യാസാർദ്ധമെന്നു കല്പിച്ച് ഇച്ചൊല്ലിയ പ്രായികപരിധീടെ നാലൊന്ന് അവിടെ മിക്കവാറും എട്ടൊന്നായിട്ടിരിക്കും. ഇതിന്ന് ഇച്ചൊല്ലിയ ന്യായത്തിന്നു തക്കവണ്ണം ജ്യാവിനെ ഉണ്ടാക്കൂ. അപ്പോളത് ഇഷ്ടവ്യാസം വ്യാസാർദ്ധമായിട്ടിരിക്കുന്ന വൃത്തത്തിങ്കൽ[4] യാതൊന്ന് സൂക്ഷ്മമായിട്ടിരിക്കുന്ന പരിധീടെ അഷ്ടാംശമാകുന്നത് അതിന്റെ ജ്യാവിനോടു മിക്കതുമൊത്തിരിക്കും ഈ ഉണ്ടാക്കിയ ജ്യാവ്. ഇവിടെ 'നിഹത്യ ചാപവർഗ്ഗേണ' എന്ന ന്യായത്തിന്നു തക്കവണ്ണം ജ്യാവിനെ വരുത്തുന്നേടത്ത് നടേത്തെ[5] ഹാരകമാകുന്ന ത്രിജ്യാവർഗ്ഗത്തിന്റെ സ്ഥാനത്ത് ഇഷ്ടവ്യാസവർഗ്ഗത്തെ കൊള്ളൂ, ദ്വിഗുണ വ്യാസവൃത്തത്തിങ്കലെ വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗമാകയാൽ. ഇത്രേ ഇഷ്ടവ്യാസത്തിങ്കൽ ഈ ജ്യാവുണ്ടാക്കുന്നേടത്തു വിശേഷമുള്ളൂ.

പിന്നെ ഈ ജ്യാവിന്റെ വർഗ്ഗത്തെ വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗത്തിങ്കന്നു കളയൂ[6]. ശേഷം കോടിവർഗ്ഗമായിട്ടിരിക്കും. പിന്നെ സൂക്ഷ്മമായിട്ടിരിക്കുന്ന പരിധ്യഷ്ടാംശത്തിന്റ ജ്യാവർഗ്ഗം വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗത്തിൽ പാതി ആയിട്ടിരിക്കും. കോടിവർഗ്ഗവും[7] അത്രതന്നെ ആയിട്ടിരിക്കും. അഷ്ടാംശം പരിധിപാദത്തിൽ അർദ്ധമാകയാൽ ഭുജാകോടികൾ സമങ്ങളായിട്ടിരിക്കും.

പിന്നെ പ്രായികമായി ഉണ്ടാക്കിയ പരിധ്യഷ്ടാംശത്തിന്റേയും സൂക്ഷ്മമായിരിക്കുന്ന പരിധ്യഷ്ടാംശത്തിന്റേയും അന്തരത്തിന്റെ ജ്യാവിനെ മേലിൽ ചൊല്ലുവാനിരിക്കുന്ന 'ജീവേ പരസ്പരം' എന്ന ന്യായത്തിന്നു തക്കവണ്ണം ഉണ്ടാക്കാം. അതിനു പ്രായികഭുജാകോടികളുടെ വർഗ്ഗങ്ങളെ സൂക്ഷ്മകോടിഭുജാവർഗ്ഗങ്ങളെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ച് വ്യാസവർഗ്ഗം കൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ. ഫലങ്ങൾ പ്രായികഭുജാകോടിവർഗ്ഗങ്ങളുടെ അർദ്ധങ്ങളായിട്ടിരിക്കും, ഗുണകാരങ്ങൾ പാതിയും ഇരട്ടിയും ആയിട്ടിരിക്കയാൽ. പിന്നെ ഇവറ്റിന്റെ മൂലങ്ങൾ[8] തങ്ങളിൽ അന്തരിപ്പൂ. ശേഷം സൂക്ഷ്മപ്രായികപരിധികളുടെ അഷ്ടാംശങ്ങളുടെ അന്തരത്തിന്റെ ജ്യാവ്. ഇതിനെ ചാപിപ്പൂ. അതിന്ന് ഇതിന്റെ ഘന

6. 3. B. പരിധി ഉണ്ടാക്കൂ
4. B. C. വൃത്തത്തിൽ
5. B.C. D. F നടേത്തെ
6. B.D കളയൂ; D.C.സൂക്ഷമമായിരിക്കുന്ന
7. B.C. പിന്നെ പ്രായികമായി ഉണ്ടാക്കിയ കോടിവർഗ്ഗവും അത്രതന്നെ ആയിരിക്കും.
8. B. C. D.F. മൂലങ്ങളെ

ത്തിങ്കന്നു വ്യാസവർഗ്ഗത്തെ ആറിൽ ഗുണിച്ച് അതിനെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലത്തെ ഈ അന്തരജ്യാവിൽ കൂട്ടൂ. ഇത് അന്തരചാപമാകുന്നത്. പിന്നെ ഇതിനെ പ്രായികാഷ്ടാംശചാപത്തിൽ കൂട്ടൂ, പ്രായികജ്യാവർഗ്ഗം വ്യാസ വർഗ്ഗാർദ്ധത്തേക്കാൾ ചെറുത് എന്നിരിക്കിൽ, വലുത് എന്നിരിക്കിൽ കളവൂ. അപ്പോൾ സൂക്ഷ്മാഷ്ടാംശമായിട്ടു വരുമതു പരിധീടെ, ദ്വിഗുണവ്യാസത്തി ങ്കൽ. ഇഷ്ടവ്യാസത്തിങ്കൽ പരിധീടെ ചതുരംശം ആയിട്ടിരിക്കും. അതിനെ നാലിൽ ഗുണിച്ചാൽ സൂക്ഷ്മമായിരിക്കുന്ന പരിധി. ഇങ്ങനെ പ്രായികപരി ധിയെ സൂക്ഷ്മമാക്കും പ്രകാരം.

7. ജ്യാവർഗ്ഗാനയനം

അനന്തരം 'നിഹത്യ ചാപവർഗ്ഗേണ' എന്ന ന്യായത്തിങ്കന്നു കുറഞ്ഞൊരു വിശേഷം കൊണ്ടു ജ്യാവർഗ്ഗമുണ്ടാകും എന്നതിനെ ചൊല്ലുന്നൂ. ഇവിടെ ചാപവർഗ്ഗത്തെ ചാപവർഗ്ഗംകൊണ്ടുതന്നെ ഗുണിക്കുന്നൂ. ചാപവർഗ്ഗത്തേയും ഫലങ്ങളേയും[1] കീഴെ കീഴെ വെക്കുന്നൂതും. പിന്നെ രണ്ടു തുടങ്ങി മൂന്ന്, നാല്, അഞ്ച് എന്നിങ്ങനെയുള്ള നിരന്തരസംഖ്യകളുടെ വർഗ്ഗങ്ങളിൽനിന്നു തന്റെ തന്റെ മൂലാർദ്ധത്തെ കളഞ്ഞ ശേഷത്തെക്കൊണ്ട് വ്യാസാർദ്ധ വർഗ്ഗത്തെ ഗുണിച്ച് അവറ്റെക്കൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ. ഇത്രേ വിശേഷമുള്ളൂ. ഒടുക്കത്തേതു ശേഷിക്കുന്നത് ജ്യാവർഗ്ഗം. പിന്നെ ഈ ന്യായംകൊണ്ടു ശര വർഗ്ഗത്തേയും ഉണ്ടാക്കാം. ഇവിടെ 'വിദ്വാംസ്തുന്നബലഃ' എന്നതിന്റെ സ്ഥാനത്തു 'ശൌരിർജ്ജയതി' എന്നു തുടങ്ങിയുള്ളവ.

8. ജീവേ പരസ്പരന്യായവും തദ്വാരാ ജ്യാക്കളെ വരുത്തും പ്രകാരവും

8.i ജീവേ പരസ്പരന്യായം

ഇച്ചൊല്ലിയ ന്യായത്തിങ്കൽ എല്ലാടവും ചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ സമസ്ത ജ്യാവു മുഴുവനേ ഇച്ഛാരാശിയാകുന്നത്. ഇനി മേലിൽ ചൊല്ലുന്നതിങ്കൽ സമസ്തജ്യാവിന്റെ അർദ്ധം ഇച്ഛാരാശി എന്നു ഭേദമാകുന്നത്. ഇവിടെ പ്രഥ

7. 1. Add ക്രമേണ

മചാപഖണ്ഡാഗ്രത്തിങ്കലും തൃതീയചാപഖണ്ഡാഗ്രത്തിങ്കലും സ്പർശിച്ചു രണ്ടു ഖണ്ഡത്തിന്നും കൂടി ഒരു സമസ്തജ്യാവു കല്പിപ്പൂ. പിന്നെ ദ്വിതീയ ജ്യാഗ്രത്തിങ്കൽ സ്പർശിച്ചിട്ട് ഒരു വ്യാസാർദ്ധത്തെ കല്പിപ്പൂ. ആ വ്യാസാർദ്ധകർണ്ണത്തിന്നു ദ്വിതീയജ്യാവും ഇരുപത്തിരണ്ടാം ജ്യാവും ഭുജാ കോടികളാകുന്നത്. ഇവിടേയും സമസ്തജ്യാമദ്ധ്യം വ്യാസാർദ്ധകർണ്ണത്തി ങ്കൽ സ്പർശിക്കും. ഇതിന്റെ അർദ്ധങ്ങൾ രണ്ടും ഓരോ ചാപഖണ്ഡ[1]ത്തിന്റെ അർദ്ധജ്യാക്കളായിട്ടിരിക്കും. ഈ അർദ്ധജ്യാക്കൾ ഇവിടെ ഇച്ഛാരാശിയാകു ന്നത്[2]. എന്നാൽ ദ്വിതീയജ്യാവിനെക്കൊണ്ടു ചാപഖണ്ഡാർദ്ധജ്യാവിനെ ഗുണിച്ച് വ്യാസാർദ്ധം കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ഫലം സമസ്തജ്യാമദ്ധ്യത്തി ങ്കന്നു കിഴക്കുപടിഞ്ഞാറായിരിപ്പോരു കോടിജ്യാഖണ്ഡമുണ്ടാകും. പിന്നെ ഇരുപത്തിരണ്ടാം ജ്യാവിനെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ച് ത്രിജ്യകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ഫലം തൃതീയചാപാഗ്രത്തിങ്കന്നു കോടിഖണ്ഡമൂലത്തോളമുള്ള ഭുജാഖണ്ഡ മുണ്ടാകും, തെക്കുവടക്കായിട്ട്.

പിന്നെ രണ്ടു ചാപഖണ്ഡത്തിന്നും കൂടിയുള്ള സമസ്തജ്യാകർണ്ണമദ്ധ്യവും വ്യാസാർദ്ധകർണ്ണവും തങ്ങളിൽ[3] സ്പർശിച്ചേടത്തുന്നു പൂർവ്വാപരസൂത്ര ത്തോളവും ദക്ഷിണോത്തരസൂത്രത്തോളവുമുള്ള അകലമുണ്ടാക്കേണം. ഇവിടെ ത്രിജ്യാവു കർണ്ണമാകുമ്പോൾ രണ്ടാം ജ്യാവും ഇരുപത്തിരണ്ടാം ജ്യാവും ഭുജാകോടികളാകുന്നത്, സമസ്തജ്യാശരോനമായിരിക്കുന്ന വ്യാസാർദ്ധഭാഗം കർണ്ണമാകുമ്പോൾ എന്തു ഭുജാകോടികൾ എന്ന ത്രൈരാ ശികം കൊണ്ടുണ്ടാകും അവ രണ്ടും. പിന്നെ ഇവിടെ ശരോനവ്യാസാർദ്ധ ത്തിന്റെ ഭുജയിങ്കൽ ഭുജാഖണ്ഡം കൂട്ടൂ. എന്നാൽ മൂന്നാം ജ്യാവുണ്ടാകും; കളകിൽ പ്രഥമജ്യാവുണ്ടാകും; പിന്നെ ശരോനവ്യാസാർദ്ധത്തിന്റെ കോടി യിങ്കേന്ന് കോടിഖണ്ഡം കളവൂ[4]. എന്നാൽ ഇരുപത്തൊന്നാം ജ്യാവുണ്ടാ കും. ആ കോടിയിൽ കോടിഖണ്ഡം കൂട്ടുകിൽ ഇരുപത്തിമൂന്നാം ജ്യാവു ണ്ടാകും. സമസ്തജ്യാകർണ്ണത്തിന്റെ അർദ്ധങ്ങൾ രണ്ടും ഇച്ഛാരാശിയായി[5] കല്പിക്കുമ്പോളെ ഭുജാകോടിഖണ്ഡങ്ങൾ തുല്യങ്ങൾ രണ്ടു ഖണ്ഡത്തി ന്നും, എന്നിട്ട്. ശരോനവ്യാസാർദ്ധത്തിങ്കന്ന് ഉണ്ടായ ഭുജാകോടികൾ അർദ്ധ ജ്യാകർണ്ണത്തിങ്കന്നു ഉണ്ടായ ഖണ്ഡജ്യാക്കൾക്ക് അവധികളാകുന്നത്, എന്നി ട്ട്[6]. ഇങ്ങനെ പഠിതജ്യാക്കളെ വരുത്തും പ്രകാരം.

---

8. 1. B.C. D. om. ഖണ്ഡ
2. B. ആകുന്നു; E. രാശികളാകുന്നത്
3. B. തമ്മിൽ
4. F. adds ശേഷം എന്നാൽ
5. B. D. രാശികളായി
6. F. എന്നുണ്ട്

പിന്നെ ഇവ്വണ്ണംതന്നെ ശിഷ്ടചാപത്തിന്റെ അർദ്ധജ്യാകർണ്ണത്തിന്ന് ഉണ്ടായ[7] ഭുജാകോടിഖണ്ഡങ്ങളും ശിഷ്ടചാപശരോനവ്യാസാർദ്ധത്തിന്നും ഭുജാകോടികളെ ഉണ്ടാക്കി അവയുംകൂടി ഇഷ്ടജ്യാക്കളെ ഉണ്ടാക്കിക്കൊള്ളൂ.

8.ii. ജീവേ പരസ്പരന്യായം : പ്രകാരാന്തരം

അനന്തരം ഈ ന്യായത്തിന്നുതന്നെ പ്രകാരഭേദം ചൊല്ലുന്നൂ. ഇവിടെ തൃതീയചാപഖണ്ഡാഗ്രത്തിങ്കന്നു പൂർവ്വസൂത്രത്തോളമുള്ളതു തൃതീയ ജ്യാവാകുന്നത്. ഇതിങ്കൽ[8] സമസ്തജ്യാമദ്ധ്യത്തിങ്കന്ന് ഉണ്ടാകുന്ന കോടി ഖണ്ഡം യാതൊരിടത്തു സ്പർശിക്കുന്നൂ തൃതീയജ്യാവിങ്കൽ, അവിടുന്ന് ഇരുപുറവും ഓരോ ഖണ്ഡം. ഇതിൽ[9] വടക്കെ ഖണ്ഡം ഭുജയായി, കോടിഖ ണ്ഡം[10] കോടിയായി, സമസ്തജ്യാർദ്ധം കർണ്ണമായിട്ടിരിപ്പോരു ത്ര്യശ്രം. പിന്നെ തൃതീയജ്യാവിങ്കലെ തെക്കെ ഖണ്ഡത്തിന്നും ഇച്ചൊല്ലിയ കോടിഖ ണ്ഡം തന്നെ കോടിയാകുന്നത്. ദ്വിതീയജ്യാവിനോടു തുല്യമായിരിക്കും കർണ്ണം. ഇവിടയ്ക്കു സമസ്തജ്യാമദ്ധ്യത്തിങ്കന്നു തൃതീയജ്യാവും പൂർവസൂ ത്രവും തങ്ങളിലുള്ള[11] സംപാതത്തോളമുള്ളതു കർണ്ണമാകുന്നത്. ഇവിടെ[12] ഇതു ദ്വിതീയജ്യാവിനോടു തുല്യമാകുന്നു. ഇവ്വണ്ണം ത്രിജ്യാ പ്രമാണം, സമ സ്തജ്യാർദ്ധവും ഇതിന്റെ ശരോനവ്യാസാർദ്ധമാകുന്ന കോടിയും രണ്ട[13] പ്രമാണഫലങ്ങൾ. ദ്വിതീയജ്യാവ് ഇച്ഛാ. സമസ്തജ്യാമദ്ധ്യത്തിങ്കന്നുള്ള കോടിഖണ്ഡവും ഇതിന്റെ സംപാതത്തിങ്കന്നു തൃതീയജ്യാവിന്റെ ദക്ഷിണ ഖണ്ഡവും ഇവ രണ്ടും ഇച്ഛാഫലങ്ങൾ. യാതൊരുപ്രകാരം ഭുജാകോടിക ളായിരിക്കുന്ന പ്രമാണഫലങ്ങൾക്കു കർണ്ണമായിരിക്കുന്നൂ പ്രമാണരാശി ഇവ്വണ്ണം ഭുജാകോടികളായിരിക്കുന്ന ഇച്ഛാഫലങ്ങൾക്കു കർണ്ണമായിട്ടിരിക്കും ഇച്ഛാരാശി എന്നു നിയതം.

ഇങ്ങനെ ദ്വിതീയജ്യാ കർണ്ണമായി തൃതീയജ്യാവിന്റെ തെക്കെ ഖണ്ഡം ഭുജയായി ത്രൈരാശികം കൊണ്ടു വരുത്തിയ കോടിഖണ്ഡം കോടി. ഇങ്ങനെ ഒരു ത്ര്യശ്രം. സമസ്തജ്യാവിന്റെ വടക്കെ അർദ്ധം കർണ്ണം, തൃതീയജ്യാ

8.. 7. B. C. D. F. ഉണ്ടാക്കിയ
8. F. ഇതിങ്കന്ന്
9. B. അതിൽ
10. C. F. ഇക്കോടി ഖണ്ഡം; C. Adds തന്നെ
11. B. തമ്മിലുള്ള
12. B.C. D അവിടെ
13. C. D. F. രണ്ടും

വിന്റെ വടക്കെ ഖണ്ഡം[14] ഭുജ. കോടിഖണ്ഡംതന്നെ കോടിയാകുന്നത്. ഇങ്ങനെ ഒരു ത്ര്യശ്രം. ഇവ്വണ്ണമാകുമ്പോൾ പ്രഥമജ്യാവും ദ്വിതീയജ്യാവും ഭുജകളായി തൃതീയജ്യാവു ഭൂമിയായി കോടിഖണ്ഡം ലംബമായി ഇരിപ്പോരു ത്ര്യശ്രമിത്. എന്നാൽ ലംബവർഗ്ഗത്തെ ഭുജാവർഗ്ഗങ്ങൾ രണ്ടിങ്കന്നും കളഞ്ഞു മൂലിച്ചാൽ വെവ്വേറെ രണ്ട് ആബാധകൾ ഉണ്ടാകും. ഇവറ്റിന്റെ യോഗം ഭൂമിയാകുന്ന തൃതീയജ്യാവ്. ഇങ്ങനേയും പഠിതജ്യാക്കളേയും ഇഷ്ടജ്യാക്കളേയുമുണ്ടാക്കാം. ഇങ്ങനെ രണ്ട് അർദ്ധജ്യാക്കളെ വെവ്വേറെ അറിഞ്ഞാൽ രണ്ടു ജ്യാക്കളുടേയും ചാപയോഗത്തിന്റെ ജ്യാവു വരുത്തുവാനുള്ള ഉപായം ചൊല്ലീതായി.

9. വ്യാസാർദ്ധം കൂടാതെ ജ്യാക്കളെ വരുത്തും പ്രകാരം–ത്ര്യശ്രക്ഷേത്രന്യായം

അനന്തരം[1] വ്യാസാർദ്ധം കൂടാതെ ജ്യാക്കളെ വരുത്തുംപ്രകാരത്തെ ചൊല്ലുന്നു[2]. ത്രിഭുജക്ഷേത്രന്യായത്തെക്കൊണ്ടു സിദ്ധിക്കേണം, എന്നിട്ട് അതിനെ നടേ[3] ചൊല്ലുന്നൂ. ഇവിടെ[4] വിഷമത്ര്യശ്രത്തിങ്കൽ[5] മൂന്നിലുംവെച്ച് വലിയ ഭുജയെ പടിഞ്ഞാറെ തെക്കുവടക്കു നീളമായിട്ടു കല്പിപ്പൂ. ഇതിന്നു 'ഭൂമി' എന്നു പേർ. പിന്നെ[6] മറ്റെ ഭുജകൾ രണ്ടിനേയും ഭൂമ്യഗ്രങ്ങൾ രണ്ടിങ്കന്നു തുടങ്ങി കിഴക്കു തങ്ങളിൽ[7] സ്പർശിക്കുമാറു കല്പിപ്പൂ. ഇവറ്റിന്നു 'ഭുജകൾ'[8] എന്നു പേർ. പിന്നെ ഈ ഭുജകൾ തങ്ങളിൽ കൂട്ടുന്നേടത്തു നിന്നു ഭൂമിക്കു വിപരീതമായി ഭൂമിയോളം ഒരു സൂത്രത്തെ കല്പിപ്പൂ. ഇതിന്നു 'ലംബം' എന്നു[9] പേർ. ലംബസംപാതത്തിങ്കന്നു ഇരുപുറവുമുള്ള ഭൂഖണ്ഡങ്ങൾക്ക് 'ആബാധകൾ' എന്നു പേർ. ഭുജാകോടികളായിരിക്കുന്ന ആബാധാലംബങ്ങൾക്കു കർണ്ണമായിട്ടിരിപ്പോ ചിലവ ത്ര്യശ്രഭുജകൾ. ഇവിടെ വലിയ

---

8. 14. D. അർദ്ധം

9. 1. D. അഥ
2. B.F. പ്രകാരം; അത്
3. C. D. om നടേ
4. B. om. ഇവിടെ
5. B. C. ത്ര്യശ്രക്ഷേത്രത്തിൽ
6. B. om. പിന്നെ; B. ഭുജകളേയും
7. B. തമ്മിൽ
8. B. ഇതുകൾ ഭുജകൾ
9. B. ഇതു ലംബം

ഭുജാവർഗ്ഗത്തിങ്കന്നു ചെറിയ ഭുജാവർഗ്ഗത്തെ കളഞ്ഞാൽ[10] ചെറിയ ആബാധാവർഗ്ഗത്തേക്കാൾ എത്ര വലുത് വലിയ ആബാധാവർഗ്ഗം, അത് ഇവിടെ ശേഷിപ്പത്, ലംബവർഗ്ഗം രണ്ടു കർണ്ണവർഗ്ഗത്തിങ്കലും തുല്യമല്ലോ എന്നിട്ട്. ആകയാൽ ആബാധാവർഗ്ഗാന്തരവും ഭുജാവർഗ്ഗാന്തരവും ഒന്നെ ആയിട്ടിരിക്കും.

എന്നാൽ ഭുജായോഗത്തെ ഭുജാന്തരംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചത്[11] ഭുജാവർഗ്ഗാന്തരം. അതുതന്നെ ആബാധാവർഗ്ഗാന്തരവുമാകയാൽ ആബാധായോഗരൂപമായിരിക്കുന്ന[12] ഭൂമിയെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ഫലം ആബാധാന്തരം. ഇതിനെ ഭൂമിയിൽ കൂട്ടുകയും[13] കളകയും ചെയ്തിട്ട് അർദ്ധിച്ചാൽ ആബാധകളുണ്ടാകും. പിന്നെ അതത് ആബാധാവർഗ്ഗത്തെ അതതു ഭുജാവർഗ്ഗത്തിങ്കന്നു കളഞ്ഞു മൂലിച്ചാൽ ലംബമുണ്ടാകും. ലംബത്തെ ഭൂമ്യർദ്ധംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ ക്ഷേത്രഫലമുണ്ടാകും.

ഇവിടെ രണ്ടു ഭുജാമദ്ധ്യത്തിങ്കന്നും അതത് ആബാധാമദ്ധ്യത്തിങ്കൽ സ്പർശിക്കുന്ന സൂത്രമാർഗ്ഗേണ പൊളിച്ചു ത്ര്യശ്രഖണ്ഡങ്ങൾ രണ്ടിനേയും ലംബാഗ്രത്തിങ്കൽ ഭൂമ്യഗ്രമാകുന്ന പ്രദേശവും കർണ്ണരേഖാമാർഗ്ഗത്തിങ്കൽ കർണ്ണരേഖയും സ്പർശിക്കുമാറു വെപ്പൂ. അപ്പോൾ ഭൂമ്യർദ്ധതുല്യമായിട്ടു രണ്ടു ഭുജകൾ, പിന്നെ ലംബതുല്യങ്ങളായിട്ടു രണ്ടു ഭുജകൾ ഇങ്ങനെ ഇരിപ്പോരു ചതുരശ്രമുണ്ടാകും. ആകയാൽ ഭൂമ്യർദ്ധലംബങ്ങളുടെ ഘാതം ക്ഷേത്രഫലം ആയിട്ടിരിക്കും. ഇതു ത്ര്യശ്രക്ഷേത്രന്യായമാകുന്നത്[14].

10. വൃത്താന്തർഗ്ഗതചതുരശ്രകർണ്ണങ്ങൾ

അനന്തരം ഇതിനെക്കൊണ്ട് ചതുരശ്രക്ഷേത്രന്യായത്തെ[1] അറിയുംപ്രകാരം[2] ചൊല്ലുന്നു. അവിടെ നടേ ഒരു വൃത്തത്തെ കല്പിപ്പൂ. പിന്നെ വൃത്താന്തർഭാഗത്തിങ്കൽ ഒരു ചതുരശ്രത്തെ കോണു നാലും വൃത്തത്തെ സ്പർശിക്കുമാറു കല്പിപ്പൂ. ഇച്ചതുരശ്രത്തിന്റെ ഭുജകൾ നാലും അന്യോന്യതുല്യങ്ങ

9. 10. B. C. D. F. add ശേഷം
11. B. ഗുണിച്ചാൽ അത്
12. B.C. F. രൂപമാകുന്ന
13. F. കൂട്ടിയും കളഞ്ഞും; om. ചെയ്തിട്ട്
14. B. ഇങ്ങനെ ത്ര്യശ്രന്യായം

10. 1. B. ത്ര്യശ്രന്യായം കൊണ്ട് ചതുരശ്രന്യായം അറിയും പ്രകാരം
2. D. F. പ്രകാരത്തെ

ളല്ലാതേയും[3] ഇരിപ്പൂ. പിന്നെ ഈ ചതുരശ്രബാഹുക്കളുടെ പരിമാണത്തെ ക്കൊണ്ട് ഇതിങ്കലെ[4] കർണ്ണങ്ങളേയുമറിയേണം. ഇതിന്റെ[5] പ്രകാരം.

ഇവിടെ വ്യവഹാരാർത്ഥമായിട്ടു ഭുജകൾക്ക് ഒരു നിയമത്തെ കല്പിച്ചു കൊള്ളൂ. ഈ ഭുജകളിൽ എല്ലായിലും വലുതു[6] പടിഞ്ഞാറേത്. അതിന്നു 'ഭൂമി' എന്നു പേർ. പിന്നെ തെക്കേത്, പിന്നെ വടക്കേത്. ഇവ രണ്ടിന്നും 'ഭുജകൾ' എന്നു പേർ. പിന്നെ എല്ലായിലും ചെറിയതു കിഴക്കേത്. ഇതിന്നു 'മുഖം' എന്നു പേർ. എന്നിങ്ങനെ കല്പിപ്പൂ. ഇബ്ബാഹുക്കൾ രണ്ട് അഗ്രവും വൃത്തത്തെ സ്പർശിക്കയാൽ സമസ്തജ്യാക്കളായിട്ടിരിന്നോ ചിലവ. ഈ നാലു സമസ്തജ്യാക്കളെക്കൊണ്ടും വൃത്തം മുഴുവൻ തികഞ്ഞിരിക്കും, ജ്യാഗ്രങ്ങൾ തങ്ങളിൽ സ്പർശിക്കയാൽ. ഇവിടെ അടുത്ത[7] ജ്യാക്കൾ ഈരണ്ടിന്റെ ചാപയോഗങ്ങളാകുന്നവ യാവ ചിലവ. ഇവറ്റിന്റെ ജ്യാക്കൾ ചതുരശ്രത്തിങ്കലെ കർണ്ണങ്ങളാകുന്നവ. ഇക്കർണ്ണങ്ങളാലൊന്നിനെക്കൊണ്ടു ചതുരശ്രത്തെ രണ്ടായി പകുത്താൽ ഇക്കർണ്ണത്തിന്റെ രണ്ടു പാർശ്വത്തി ങ്കലും ഓരോ ത്ര്യശ്രങ്ങളുണ്ടാകും[8]. രണ്ടു ത്ര്യശ്രങ്ങൾക്കും സാധാരണമാ യിട്ടിരിപ്പോരു ഭൂമി ആയിട്ടിരിപ്പൊന്ന് ഇക്കർണ്ണം[9]. ഭുജകൾ ഈരണ്ടും ഭുജ കളായിട്ടിരിപ്പൊന്ന്. പിന്നെ ഈവണ്ണംതന്നെ മറ്റെ കർണ്ണത്തെക്കൊണ്ടും താൻ ഭൂമിയായിട്ടു രണ്ടു ത്ര്യശ്രങ്ങൾ ഉളവാകും.

10.i. സമസ്തജ്യാഘാതം യോഗാന്തരചാപത്തിന്റെ സമസ്തജ്യാവർഗ്ഗാന്തരത്തിന് സമം

പിന്നെ ഇക്കർണ്ണങ്ങളിലിഷ്ടം ആകുന്നതിന്റെ ഒരു പാർശ്വത്തിങ്കലെ ഭുജ കൾ രണ്ടിന്റേയും യോഗത്തെ തങ്ങളിലെ[10] അന്തരംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ അത് ആബാധായോഗത്തിന്റേയും ആബാധാന്തരത്തിന്റേയും ഘാതമായി ട്ടിരിക്കും. ആബാധായോഗമാകുന്നതു പിന്നെ ഈ രണ്ടു ഭുജകളുടേയും യോഗചാപത്തിന്റെ സമസ്തജ്യാവായിട്ടിരിക്കും. പിന്നെ ഇവറ്റിന്റെ തന്നെ

---

10. 3. A. om. വൃത്തത്തെ സ്പർശിക്കുമാറ് കല്പിപ്പൂ. ഈ ചതുരശ്രത്തിന്റെ ഭുജകൾ നാലും അന്യോന്യം
4. B. C. D. F. add രണ്ടും
5. F. അതിന്റെ
6. B. D. വലിയത്
7. B. അടുത്ത അടുത്ത
8. B. ഈ കർണ്ണം രണ്ടു ത്ര്യശ്രങ്ങളുടേയും ഭൂമി
9. B. F. ഇക്കർണ്ണഭുജകൾ
10. B. തമ്മിലെ

അന്തരചാപത്തിന്റെ സമസ്തജ്യാവായിട്ടിരിക്കും ആബാധാന്തരം. പിന്നെ ഈ ആബാധായോഗമാകുന്ന ഇഷ്ടകർണ്ണത്തെ ഭൂമിയായി കല്പിച്ച് ആബാധാന്തരത്തെ മുഖമായിയും ചെറിയ ഭുജയോടു തുല്യമായിട്ടു വലിയ ഭുജയേയും കല്പിച്ചാൽ ഈ ഇഷ്ടകർണ്ണത്തിന്റെ ഒരു പാർശ്വത്തിങ്കൽ സമലംബമായിരിപ്പോരു ചതുരശ്രമുണ്ടാകും. ഇവിടെ ലംബാഗ്രാന്തരം ആബാധാന്തരമാകുന്നത്. എന്നാൽ ചാപാന്തരസമസ്തജ്യാവ് ആബാധാന്തരമായിട്ടിരിക്കും. ചതുരശ്രത്തിങ്കൽ പാർശ്വഭുജകൾ സമങ്ങൾ എങ്കിൽ ലംബങ്ങളും സമങ്ങളായിട്ടിരിക്കും. ഇവറ്റിന്റെ ആബാധകളും സമങ്ങളായിട്ടിരിക്കും. ആകയാൽ ഭൂമിയിങ്കലെ ലംബമൂലാന്തരം[11] ആബാധാന്തരമാകുന്നത്. ലംബാഗ്രാന്തരവും[12] ഇതുതന്നെ.

ആകയാൽ ചാപാന്തരസമസ്തജ്യാവ് ആബാധാന്തരമാകുന്നത്. ചാപയോഗസമസ്തജ്യാവ് ഭൂമി ആകുന്നത്. ഇതുതന്നെ ഇഷ്ടകർണ്ണമാകുന്നതും. ആകയാൽ ഇഷ്ടകർണ്ണത്തിന്റെ ഒരു പുറത്തെ ഭുജകൾ രണ്ടിന്റേയും വർഗ്ഗാന്തരം ഈ ജ്യാക്കളുടെ യോഗചാപജ്യാവും അന്തരചാപജ്യാവും തങ്ങളിലുള്ള[13] ഘാതമായിട്ടിരിക്കും. ഇവ്വണ്ണമിരിക്കയാലെ യോഗാന്തരചാപജ്യാക്കളുടെ ഘാതം യാതൊന്ന് ഇതു യോഗാന്തരചാപാർദ്ധജ്യാക്കളുടെ വർഗ്ഗാന്തരവുമായിട്ടിരിക്കും[14]. എന്നാലിതു വന്നുകൂടിയ ന്യായമാകുന്നത്. യാവചിലവ രണ്ടു ജ്യാക്കളുടേയും ഘാതം യാതൊന്ന് അത് അച്ചാപങ്ങൾ രണ്ടിന്റേയും യോഗാന്തരങ്ങളുടെ അർദ്ധങ്ങളെ സംബന്ധിച്ചുള്ള ജ്യാക്കൾ യാവചിലവ അവറ്റിന്റെ വർഗ്ഗാന്തരമായിട്ടിരിക്കും[15]. പിന്നെ രണ്ടു ജ്യാക്കളുടെ വർഗ്ഗാന്തരം യാതൊന്ന് അത് ഇജ്ജ്യാക്കളെ[16] സംബന്ധിച്ചുള്ള ചാപങ്ങളുടെ യോഗാന്തരങ്ങൾ യാവചിലവ അവറ്റെ സംബന്ധിച്ചുള്ള ജ്യാക്കളുടെ ഘാതമായിട്ടിരിക്കും. ഈ ന്യായത്തെ കർണ്ണാനയനത്തിൽ നടേ അറിയേണം.

10.11. F. add ഇതു തന്നെ
12. F. ലംബാഗ്രാന്തരവും ഇതു തന്നെ
13. B. തമ്മിലുള്ള
14. B. ചാപാർദ്ധാന്തരങ്ങളുടെ ജ്യാക്കളുടെ വർഗ്ഗമായിട്ടിരിക്കും, C. വർഗ്ഗാന്തരമായിരിക്കും, D. മായിട്ടും ഇരിക്കും
15. B. ആയിരിക്കും
16. F. ഭുജാജ്യാക്കളെ

10.ii. ആദ്യകർണ്ണാശ്രിത ഭുജാഘാതൈക്യം, ആദ്യതൃതീയ കർണ്ണഘാതസമം

അനന്തരം[17] ഈ ന്യായത്തെക്കൊണ്ടു കർണ്ണമുണ്ടാക്കും പ്രകാരത്തെ ചൊല്ലുന്നൂ. അവിടെ വൃത്താന്തർഗ്ഗതമായിരിക്കുന്ന വിഷമചതുരശ്രത്തിങ്കലെ എല്ലായിലും വലിയ ഭുജയെ പടിഞ്ഞാറെ ഭൂമി[18] എന്നും എല്ലായിലും ചെറിയ ഭുജയെ കിഴക്കുമുഖമെന്നും[19] പിന്നെ അവറ്റിൽ[20] വലിയതു ദക്ഷിണഭുജ, ചെറിയത് ഉത്തരഭുജ എന്നിങ്ങനെ മുമ്പിൽ[21] ചൊല്ലിയവണ്ണംതന്നെ കല്പിച്ച, പിന്നെ[22] ഭൂമീടെ തെക്കെ അഗ്രത്തിങ്കന്നു മുഖത്തിന്റെ വടക്കെ അഗ്രത്തോളം ഉള്ളതു നടേത്തെ കർണ്ണം, പിന്നെ ഭൂമിടെ വടക്കെ അഗ്രത്തിങ്കന്നു മുഖത്തിന്റെ തെക്കെ അഗ്രത്തിങ്കൽ സ്പർശിക്കുന്നതു രണ്ടാംകർണ്ണം എന്നും കല്പിച്ച്, പിന്നെ അടുത്ത് ഈ രണ്ടു കർണ്ണാഗ്രങ്ങളുടെ അന്തരങ്ങളിലെ വൃത്തഭാഗങ്ങളെ ഓരോ ഭുജകളുടെ ചാപങ്ങൾ എന്നും കല്പിച്ച്, ഇച്ചാപഖണ്ഡങ്ങളിൽ ചില ബിന്ദുക്കളെ ഉണ്ടാക്കൂ.

അവിടെ ഭൂമീടെ വടക്കെ അഗ്രത്തിങ്കന്നു സൌമ്യഭുജാചാപത്തിങ്കൽ മുഖചാപത്തോളം ചെന്നേടത്ത് ഒരു ബിന്ദുവിടൂ[23]. ഈ ബിന്ദുവിങ്കന്നു വൃത്തത്തിൽ[24] മുഖത്തിന്റെ വടക്കെ അഗ്രത്തോടിടയ്ക്കു 'മുഖസൌമ്യഭുജാചാപാന്തരം' എന്നു പേർ. ഇതിന്റെ നടുവിൽ സ്പർശിക്കും വ്യാസരേഖയുടെ ഒരു അഗ്രം. പിന്നെ ഭൂമീടെ വടക്കെ അഗ്രത്തിങ്കന്നു ഭൂചാപത്തിൽ[25] യാമ്യഭുജാചാപത്തോളം ചെന്നേടത്ത് ഒരു ബിന്ദുവിടൂ. ഈ ബിന്ദുവിങ്കന്നു[26] ഭൂമീടെ യാമ്യാഗ്രത്തോടിടയ്ക്കു 'ഭൂയാമ്യചാപാന്തരം'[27] എന്നു പേർ. ഇതിന്റെ മദ്ധ്യത്തിൽ[28] സ്പർശിക്കും വ്യാസരേഖയുടെ മറ്റെ അഗ്രം. ഇതു വ്യാസത്തിന്റെ മൂലം. പിന്നെ വ്യാസമൂലത്തിങ്കന്നു ഭൂമീടെ യാമ്യാഗ്രത്തോളമുള്ള പഴുതു ഭൂയാമ്യഭുജാചാപാന്തരാർദ്ധം. ആകയാൽ വ്യാസമൂലത്തിങ്കന്നു ഭൂമീടെ വടക്കെത്തലയും തെക്കെ ഭുജേടെ

10 17. B. om. അനന്തരം
18. B. പടിഞ്ഞാറെ ഭുജ – ഭൂമി
19. B.C.പിന്നത്തേതിൽവലിയത്,പിന്നത്തേത്ഉത്തരഭുജ എല്ലായിലും ചെറിയത്, കിഴക്കുമുഖം
20. C. D. ഇവറ്റിൽ
21. B. om. മുമ്പിൽ ചൊല്ലിയവണ്ണം
22. B. adds ഇങ്ങനെ
23. C. ബിന്ദുവിട്ട്
24. B. C. D. F. വൃത്തത്തിങ്കൽ
25. B. C. F. ചാപത്തിങ്കൽ
26. B. ഇതിങ്കന്നു
27. B. C. D യാമ്യഭുജ ചാപാന്തരമെന്നു
28. B. C. F മദ്ധ്യത്തിങ്കൽ

കിഴക്കെത്തലയും അകലമൊക്കും വൃത്തത്തിങ്കൽ.

പിന്നെ വ്യാസാഗ്രത്തിങ്കന്നും വടക്കെ ഭുജേടെ പടിഞ്ഞാറെ അഗ്രവും കിഴക്കെ ഭുജേടെ തെക്കെ അഗ്രവും അകലമൊക്കും. ഇങ്ങനെ ഇരിക്കുന്നേടത്തു മുഖവും സൌമ്യഭുജയും തങ്ങളിൽ[29] ഗുണിപ്പൂ. അതിനെ യാമ്യഭുജയും ഭൂമിയും തങ്ങളിൽ[30] ഗുണിച്ചതിൽ കൂട്ടൂ. എന്നാലതു രണ്ടു വർഗ്ഗാന്തരങ്ങളുടെ യോഗമായിട്ടിരിക്കും. ഇവിടേയും[31] മുഖസൌമ്യചാപങ്ങളെ തങ്ങളിൽ കൂട്ടിയും അന്തരിച്ചും അർദ്ധിച്ചിരിക്കുന്നവറ്റിന്റെ സമസ്തജ്യാക്കളുടെ വർഗ്ഗാന്തരം നടേത്തേത്. പിന്നെ ഭൂയാമ്യചാപങ്ങളുടെ[32] യോഗാന്തരാർദ്ധങ്ങളെ സംബന്ധിച്ചുള്ള സമസ്തജ്യാക്കളെ വർഗ്ഗിച്ച് അന്തരിച്ചത് രണ്ടാമത്. ഇതു മുമ്പിൽ ചൊല്ലിയ ന്യായംകൊണ്ടു വരും.

ഇവിടെ മുഖസൌമ്യചാപയോഗാർദ്ധവും ഭൂയാമ്യചാപയോഗാർദ്ധവും ഇവ രണ്ടും കൂട്ടിയാൽ പരിദ്ധ്യർദ്ധമായിട്ടിരിക്കും. ഈ യോഗാർദ്ധചാപങ്ങൾ രണ്ടിന്റേയും ജ്യാക്കളുടെ വർഗ്ഗയോഗം വ്യാസവർഗ്ഗമായിട്ടിരിക്കും, ഈ ജ്യാക്കൾ രണ്ടും[33] ഭുജാകോടികളാകയാൽ. യാതൊരുപ്രകാരം പരിധീടെ നാലൊന്നിനെ രണ്ടായി വിഭജിച്ചിരിക്കുന്ന ഖണ്ഡങ്ങളുടെ അർദ്ധജ്യാക്കൾ തങ്ങളിൽ ഭുജാകോടികൾ[34], വ്യാസാർദ്ധം കർണ്ണവും ആയിട്ടിരിക്കുന്നൂ, അവ്വണ്ണം പരിദ്ധ്യർദ്ധത്തെ രണ്ടായി ഖണ്ഡിച്ചവറ്റിന്റെ സമസ്തജ്യാക്കൾ തങ്ങളിൽ ഭുജാകോടികളായിട്ടിരിക്കും, വ്യാസം കർണ്ണവുമായിട്ടിരിക്കും. ആകയാൽ ഇച്ചൊല്ലിയ യോഗാർദ്ധജ്യാക്കളുടെ വർഗ്ഗയോഗം വ്യാസവർഗ്ഗമായിട്ടിരിക്കും[35]

ആകയാൽ[36] വ്യാസവർഗ്ഗത്തിങ്കന്നു രണ്ടു അന്തരാർദ്ധചാപങ്ങളുടെ സമസ്തജ്യാക്കളുടെ വർഗ്ഗങ്ങൾ രണ്ടും പോയതായിട്ടിരിക്കും ഇച്ചൊല്ലിയ ജ്യാക്കളുടെ ഘാതയോഗം. അവിടെ വ്യാസവർഗ്ഗത്തിങ്കന്നു നടേ ഒരു അന്തരാർദ്ധചാപജ്യാവർഗ്ഗം പോവൂ. അവിടെ ശേഷിച്ചത് ആയന്തരാർദ്ധജ്യാവിന്റെ കോടിവർഗ്ഗമായിട്ടിരിക്കും. ഇതു രണ്ടു ജ്യാക്കളുടെ

10.29.13. B. തമ്മിൽ
30. B. തമ്മിൽ
31. B. C. ഇവിടെ
32. C. F. ചാപാർദ്ധങ്ങളുടെ
33. B. adds തമ്മിൽ
34. B. കോടികളായിരിക്കും; വ്യാസം കർണ്ണവും ആയിരിക്കും
35. B. C. D. വ്യാസവർഗ്ഗമായിരിക്കും
36. B. adds വ്യാസാർദ്ധ

വർഗ്ഗാന്തരമാകയാൽ ഈ ജ്യാക്കൾ രണ്ടിനേയും സംബന്ധിച്ചുള്ള ചാപങ്ങളെ തങ്ങളിൽ[37] കൂട്ടുകയും അന്തരിക്കുകയും ചെയ്തിരിക്കുന്ന ചാപങ്ങൾ രണ്ടും യാവചിലവ അവറ്റെ സംബന്ധിച്ചുള്ള ജ്യാക്കൾ തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതായിട്ടിരിക്കും, മുമ്പിൽ ചൊല്ലിയ ന്യായത്തിന്നു തക്കവണ്ണം.

ഇവിടെ പിന്നെ വ്യാസത്തിന്നു ചാപമാകുന്നതു പരിധ്യർദ്ധമാകയാൽ, വ്യാസാഗ്രത്തിങ്കൽ ചൊല്ലിയ അന്തരാർദ്ധചാപത്തെ, പരിധ്യർദ്ധത്തിൽ കൂട്ടുകയും കളകയും ചെവൂ. ഇങ്ങനെ ഇരിക്കുന്ന ചാപങ്ങൾ രണ്ടിന്റേയും ജ്യാക്കൾ തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതായിട്ടു വരേണം ഈ വർഗ്ഗാന്തരം, യോഗാന്തരചാപജ്യാഘാതരൂപമായിട്ട് എല്ലൊ ഇരിപ്പൂ വർഗ്ഗാന്തരം, എന്നിട്ട്. ഇവിടെ പിന്നെ[38] യോഗാന്തരചാപങ്ങൾക്കു രണ്ടിന്നുമൊന്നേ ജ്യാക്കൾ, ശരത്തിന്നും ചാപത്തിന്നുമേ ഭേദമുള്ളൂ. വ്യാസരേഖയിങ്കന്നു ഇരുപുറവും തുല്യമായിട്ട് അകലുമ്പോൾ ജ്യാക്കൾ തുല്യങ്ങളായിട്ടിരിക്കും എന്നു[39] നിയതം. യാതൊരു പ്രകാരം 'അനന്തപുര' വൃത്തത്തിങ്കൽ അർദ്ധജ്യാക്കൾ പഠിക്കുന്നേടത്ത് ഇരുപത്തിനാലാകുന്ന പക്ഷത്തിങ്കൽ ഇരുപത്തിമൂന്നാമതും ഇരുപത്തിഅഞ്ചാമതും ഒന്നേ ആയിട്ടിരിക്കുന്നൂ, അവ്വണ്ണമിവിടേയും. ജ്യാക്കൾ[40] തുല്യങ്ങളാകയാൽ ഘാതം വർഗ്ഗമായിട്ടിരിക്കും. ഇവിടെ വ്യാസവർഗ്ഗത്തിങ്കന്നു മുഖോത്തരാഗ്രവും വ്യാസാഗ്രവും തങ്ങളിലുള്ള അന്തരചാപജ്യാവിന്റെ വർഗ്ഗത്തെ നടേ കളയുമ്പോൾ വ്യാസമൂലത്തിങ്കന്നു മുഖോത്തരാഗ്രത്തോളമുള്ള അന്തരചാപജ്യാവിന്റെ വർഗ്ഗം ശേഷിക്കുന്നത്.

പിന്നെ ഇതിങ്കന്നു വ്യാസമൂലത്തോടു ഭൂമീടെ ദക്ഷിണാഗ്രത്തോടുള്ള അന്തരചാപജ്യാവർഗ്ഗത്തെ കളകേ വേണ്ടുവത്. ഇതു രണ്ടാം അന്തരാർദ്ധ ചാപമാകുന്നത്. എന്നിട്ട് ഇതും രണ്ടു ജ്യാക്കളുടെ വർഗ്ഗാന്തരമാകയാൽ ഇവറ്റിന്റെ യോഗാന്തരചാപജ്യാഘാതമായിട്ടിരിക്കും. ഇവിടെ മുഖസൌമ്യാഗ്ര ത്തിങ്കന്നു വ്യാസമൂലത്തോടിടയിലുള്ള പരിധ്യംശം[41] ഒരു ചാപമാകുന്നത്. വ്യാസമൂലത്തിങ്കന്നു യാമ്യാഗ്രാന്തരം ഒരു ചാപമാകുന്നത്. ഇവറ്റിന്റെ അന്ത രമാകുന്നതു മുഖസൌമ്യാഗ്രത്തിങ്കന്നു ഭൂയാമ്യാഗ്രത്തോടിടയിലുള്ള പരി ധ്യംശം. ഇതു മുഖദക്ഷിണഭുജാചാപയോഗമായിട്ടിരിക്കും. ഇതിന്റെ ജ്യാവാ

10.37.B. സംബന്ധിച്ച ചാപങ്ങൾ തമ്മിൽ
38. F. adds വ്യാസത്തിന്ന്
39. B. C. F എന്നിതു
40. F. adds ഈ
41. B പരിധ്യാംശം ഇത് മുഖദക്ഷിണഭുജാചാപയോഗമായിരിക്കും.

കുന്നത് ആദ്യകർണ്ണം. എന്നാൽ ആദ്യകർണ്ണം അന്തരചാപജ്യാവാകുന്നത്. പിന്നെ മുഖസൌമ്യാഗ്രത്തിങ്കന്നു തുടങ്ങി വ്യാസമൂലം കഴിച്ചു ഭൂചാപത്തിങ്കലെ[42] ബിന്ദുവോളമുള്ളതു യോഗചാപമാകുന്നത്. ഇതിന്റെ ജ്യാവു മുഖഭൂചാപയോഗജ്യാവായിട്ടിരിക്കും. ദക്ഷിണഭുജാചാപത്തേക്കാൾ ഭൂദക്ഷിണാഗ്രത്തോടു ഭൂചാപത്തിങ്കലെ ബിന്ദുവോടുള്ള അന്തരമേറീട്ടിരിക്കും[43] ഭുചാപം. എന്നാൽ[44] അന്തരത്തെ ദക്ഷിണഭൂജാചാപത്തിൽ കൂട്ടിയാൽ ഭുചാപത്തോടു തുല്യമാകയാൽ ഭൂമുഖചാപയോഗജ്യാവു[45] യോഗജ്യാവാകുന്നത്.

എന്നിട്ടു മുഖയാമ്യചാപയോഗജ്യാവും മുഖഭൂചാപയോഗജ്യാവും തങ്ങളിൽ[46] ഗുണിച്ചതായിട്ടിരിക്കും, മുഖസൌമ്യഭുജാഘാതവും ഭൂയാമ്യഭുജാഘാതവും തങ്ങളിലെ യോഗം. ഇതിന്ന് 'ആദ്യകർണ്ണാശ്രിതഭുജാ[47]ഘാതൈക്യം' എന്നു പേർ. ആദ്യകർണ്ണമാകുന്നത് മുഖസൌമ്യാഗ്രത്തോടു ഭൂയാമ്യാഗ്രത്തോടു സ്പർശിച്ചുള്ള കർണ്ണം. ഇതിന്റെ[48] അഗ്രത്തെ സ്പർശിച്ചിരിപ്പോ ചിലവ മുഖസൌമ്യഭുജകൾ, മൂലത്തെ സ്പർശിപ്പോ ചിലവ ഭൂയാമ്യഭുജകൾ. ഇവററിന്റെ ഘാതയോഗമാകയാൽ[49] ആദ്യകർണ്ണാശ്രിതഭുജാഘാതൈക്യമിത്. ഇതു പിന്നെ ആദ്യതൃതീയകർണ്ണഘാതമായിട്ടിരിപ്പൊന്ന്. ഇവിടെ[50] ആദ്യകർണ്ണമാകുന്നത് ഭൂദക്ഷിണാഗ്രത്തിങ്കന്നു മുഖസൌമ്യാഗ്രത്തോളമുള്ളത്. തൃതീയ കർണ്ണമാകുന്നത് പിന്നെ ഭൂയാമ്യഭുജകളെ പകർന്നുവെച്ചാൽ അഗ്രം നടേത്തേതു[51] തന്നെയും മൂലം മറ്റൊരിടത്തും സ്പർശിച്ചിട്ടിരിക്കുന്ന[52] ഈ ആദ്യകർണ്ണം തന്നെ. ദ്വിതീയകർണ്ണം നടേത്തെപ്പോലെ ഇരിക്കും. മുഖസൌമ്യാഗ്രത്തിങ്കൽ സ്പർശിക്കുന്ന പ്രഥമകർണ്ണത്തിന്റെ മൂലം മറ്റൊരിടത്തായിരിക്കും എന്നു ചൊല്ലിയത്, ഭൂചാപത്തിങ്കൽ ഭൂദക്ഷിണാഗ്രത്തിങ്കന്നു ഭൂയാമ്യചാപാന്തരം ചെന്നേടത്തു യാതൊരു ബിന്ദു നടേ ചൊല്ലിയത് അതിങ്കലായിട്ടിരിക്കും. ഇവിടുന്നു മുഖസൌമ്യാഗ്രത്തോളമുള്ളതു തൃതീയകർണ്ണമാകുന്നത്. ഭൂയാമ്യഭുജകളെ പകർന്നുവെക്കുമ്പോളേ ഇത്

10.42. C. ഭൂചാപയോഗചാപമായിട്ടിരിക്കും
43. B. മേറിയിരിക്കും
44. F. ഇതു
45. B. മുഖ
46. D. F തങ്ങളിലുള്ള
47. D. കർണ്ണഭുജം
48. B. അതിന്റെ
49. C. ഘാതമാകയാൽ
50. B. C. D അവിടെ
51. E. നടേത്തേടുത്ത
52. B. F. സ്പർശിച്ചിരിക്കും നടേത്തെ ഈ ആദ്യകർണ്ണം തന്നെ

ഉണ്ടാവൂ. ഇതിനെ 'തൃതീയകർണ്ണം' എന്നു ചൊല്ലുന്നു.

10.iii. ഇരട്ടവ്യാസത്താൽ ഹരിച്ച ത്രിവർണ്ണഘാതം ചതുരശ്രക്ഷേത്രത്തിനു സമം

പിന്നെ ഈ കർണ്ണങ്ങൾ രണ്ടും ഭുജകളായി[53] ഇക്കർണ്ണമൂലാന്തരത്തിങ്കലെ ചാപത്തെ ഭൂചാപമെന്നും കല്പിപ്പൂ. അതാകുന്നതു ഭൂചാപത്തിങ്കലെ ബിന്ദുവും ഭൂയാമ്യാഗ്രവും തങ്ങളിലുള്ള അന്തരചാപം. ഇതിന്റെ ജ്യാവിനെ ഭൂമി എന്നും കല്പിച്ചിട്ട് ഒരു ത്ര്യശ്രത്തെ ഉണ്ടാക്കൂ. പിന്നെ ഈ ഭൂമിക്കു വിപരീതമായിട്ടു മുഖസൌമ്യാഗ്രത്തിങ്കന്ന് ഈ ഭൂമിയോളമുള്ളത് ഈ ത്ര്യശ്രത്തിങ്കലെ ലംബമാകുന്നത്. അവിടെ[54] ആദ്യതൃതീയകർണ്ണങ്ങളാകുന്ന ഭുജകളുടെ ഘാതത്തെ വ്യാസം കൊണ്ടു ഹരിച്ചാലുണ്ടാകും ഈ ലംബം. എല്ലായിടത്തും ജ്യാക്കളായിരിക്കുന്ന ത്ര്യശ്രഭുജകളുടെ[55] ഘാതത്തെ ആ വൃത്തവ്യാസംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ആ ഭുജാചാപയോഗത്തിന്റെ ജ്യാവു ഭൂമിയായിരിക്കുന്ന ത്ര്യശ്രത്തിന്റെ[56] ലംബമുണ്ടാകും എന്നു നിയതം[57]. ഇതു 'ജീവേ പരസ്പര' എന്നാദിയായുള്ള ശ്ലോകത്തിങ്കലെ ന്യായംകൊണ്ടു വരും.

ഇവിടെ പിന്നെ വിഷമചതുരശ്രത്തെ ദ്വിതീയകർണ്ണംകൊണ്ടു വിഭജിച്ചു രണ്ടു ത്ര്യശ്രങ്ങളായിട്ടു കല്പിച്ചാൽ രണ്ടിങ്കലും ഓരോ ലംബമുണ്ടാകും[58]. ഈ ലംബങ്ങൾ രണ്ടിന്നും സാധാരണമായിട്ടിരിക്കുന്ന ഭൂമിയായിട്ടിരിക്കും ഈ ദ്വിതീയകർണ്ണം. ഇക്കർണ്ണം ഭൂമിയായിട്ടിരിക്കുന്ന[59a] ത്ര്യശ്രങ്ങളിലെ ലംബങ്ങൾ രണ്ടിന്റേയും യോഗം യാതൊന്ന് ഇതിനോട് തുല്യമായിട്ടിരിക്കും ആദ്യതൃതീയകർണ്ണഘാതത്തിങ്കന്നു വ്യാസംകൊണ്ടു ഹരിച്ചുള്ള ലംബം. അത്[59b] എങ്ങനെ എന്നു പിന്നെ.

ഇവിടെ ആദ്യതൃതീയകർണ്ണങ്ങളുടെ അഗ്രം മുഖസൌമ്യാഗ്രത്തിങ്കൽ, മൂലം ഭൂയാമ്യാഗ്രത്തിങ്കലും ഭൂചാപബിന്ദുവിങ്കലും. ഈ മൂലാന്തരചാപജ്യാവ്[60] ഇക്കർണ്ണങ്ങളാകുന്ന ത്ര്യശ്രഭുജകൾക്കു ഭൂമി ആകുന്നത്. ഈ ഭൂമിക്കും ദ്വിതീയകർണ്ണത്തിന്നും ഒന്നേ ദിക്ക്, ദ്വിതീയകർണ്ണത്തിന്റെ രണ്ടഗ്രത്തിങ്കന്ന് ഈ ജ്യാഗ്രങ്ങൾ യാമ്യചാപത്തോടു തുല്യങ്ങളാകയാൽ. ദ്വിതീയകർണ്ണ

10.53. B. C ഭുജകളായിരിക്കും മൂലാന്തരത്തിങ്കലെ
54. B. C. D. F ഇവിടെ
55. F. add ആയിട്ടിരിക്കുന്ന ഭൂമി ആയിട്ടിരിക്കും. ഈ ദ്വിതീയ ത്ര്യശ്രഭുജകളുടെ
56. B. C. D.F. ത്ര്യശ്രത്തിങ്കലെ
57. C. എന്ന് അറിയണം
58 D. Adds. എന്നു നിയതം
59a. B.C.D.F. ആയിരിക്കുന്ന
59b. C. അത് എന്നിങ്ങനെ എന്ന
60. B.C. F. add മൂലാന്തരാള ഭൂചാപജ്യാവ്

ത്തിന്റെ ചാപത്തിന്നും ഈ ത്ര്യശ്രഭൂമിചാപത്തിന്നും മദ്ധ്യമാകുന്നതു മുമ്പിൽ ചൊല്ലിയ വ്യാസമൂലത്തിങ്കൽ ആയിട്ടിരിക്കും. ആകയാൽ ദ്വിതീയകർണ്ണ ത്തിന്നും ഈ ത്ര്യശ്രഭൂമിക്കും ദിക്ക് ഒന്നെ ആകയാൽ ദ്വിതീയകർണ്ണം ഭൂമി യായിട്ടുള്ള ലംബങ്ങൾ രണ്ടിന്നും വലിയ ലംബത്തിന്നും ദിക്ക് ഒന്നെ. പിന്നെ ദ്വിതീയകർണ്ണം ഭൂമിയായി[61] ആദ്യതൃതീയകർണ്ണം[62] ഭുജകളായിരിക്കുന്ന ത്ര്യശ ത്തിന്റെ ഭൂമി മുഖമായി ഇരിപ്പോരു ചതുരശ്രം സമലംബമായിട്ടിരിക്കും. ഇവ്വണ്ണം കല്പിക്കുമ്പോൾ ലംബയോഗതുല്യം വലിയ ലംബമെന്നു സ്പഷ്ട മാകും.

പിന്നെ ഈ ലംബയോഗത്തെ ദ്വിതീയകർണ്ണത്തിന്റെ അർദ്ധംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ ദ്വിതീയകർണ്ണം ഭൂമിയായിട്ടിരിക്കുന്ന ത്ര്യശ്രങ്ങൾ രണ്ടിലേയും ഫലയോഗമായിട്ടു വൃത്താന്തർഗ്ഗതചതുരശ്രക്ഷേത്രഫലമുണ്ടാകും. ആക യാൽ കർണ്ണങ്ങൾ മൂന്നും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതിങ്കന്നു[63] വ്യാസംകൊണ്ടു ഹരിച്ച് അർദ്ധിച്ചതു ചതുരശ്രക്ഷേത്രഫലമായിട്ടിരിക്കും[64]. കർണ്ണത്രയഘാ തത്തെ ക്ഷേത്രഫലം കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ഇരട്ടിച്ച വ്യാസമായിട്ടിരിക്കും. കർണ്ണവർഗ്ഗങ്ങളുടെ ഘാതത്തെ ക്ഷേത്രഫലവർഗ്ഗംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ദ്വിഗു ണവ്യാസവർഗ്ഗമുണ്ടാകും[65] ലംബയോഗം, വ്യാസം, ക്ഷേത്രഫലമെന്നിവ എല്ലാം ഇവിടെ പ്രസംഗാൽ പറഞ്ഞു. എന്നിട്ട് ഇതിന്റെ ശേഷം മേലിൽ പറയുന്നുണ്ട്.

10. iv. കർണ്ണങ്ങളെ വരുത്തും പ്രകാരം

ഇവിടെ കർണ്ണങ്ങളെ വരുത്തുംപ്രകാരത്തെ ചൊല്ലുന്നൂത്[66]. അവിടെ ആദ്യ കർണ്ണാശ്രിതഭുജാഘാതൈക്യം ആദ്യതൃതീയകർണ്ണാഘാതമായിട്ടിരിക്കും എന്നു വിസ്തരിച്ചു ചൊല്ലീ[67]. ഈ ന്യായംകൊണ്ടുതന്നെ ദ്വിതീയ കർണ്ണാശ്രിതഭുജാഘാതൈക്യം ദ്വിതീയതൃതീയകർണ്ണാഘാതമെന്നും വരും. ഇതു മുഖയാമ്യഭുജാഘാതവും ഭൂസൌമ്യഭുജാഘാതവും കൂടിയത്. പിന്നെ ഭൂയാമ്യഭുജകളെ പകർന്നു കല്പിച്ചാലുള്ള[68] ദ്വിതീയകർണ്ണാശ്രിതഭുജകളുടെ ഘാതം, തദൈക്യത്തേയും ഉണ്ടാക്കൂ. അതു ഭൂമുഖഘാതവും സൌമ്യയാമ്യ

10.61. B. ഭൂമിയായിട്ട്
62. D. om. തൃതീയ
63. F. ഗുണിച്ചാലതിങ്കന്ന്
64. F. adds കർണ്ണത്രയഘാതത്തെ ക്ഷേത്രഫലമായിട്ടിരിക്കും
65. C. വർഗ്ഗമുണ്ടാകും
66. B. F. ചൊല്ലുന്നു
67. F. ചൊല്ലിയ
68. F. വെച്ചാലുള്ള

ഭുജാഘാതവും കൂടിയത്. ഇതിന്നു 'ഭുജാപ്രതിഭുജാഘാതയോഗം' എന്നു[69] പേർ.

ഇതു പ്രഥമദ്വിതീയകർണ്ണഘാതമായിട്ടിരിക്കും. ഇനി ഈ ഭുജകളെ പകർന്നുവെച്ചാൽ നാലാമത് ഒരു കർണ്ണമുണ്ടാവുകയില്ല, പ്രസ്താരം ഒടുങ്ങിപ്പോകയാൽ. ഇവിടെ ഇവ്വണ്ണമുണ്ടാക്കിയ ആദ്യതൃതീയകർണ്ണഘാതത്തെ ആദ്യദ്വിതീയകർണ്ണഘാതം കൊണ്ടു ഗുണിച്ച് ദ്വിതീയതൃതീയകർണ്ണഘാതം കൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ. ഫലം ആദ്യകർണ്ണവർഗ്ഗം. പിന്നെ ദ്വിതീയതൃതീയകർണ്ണഘാതത്തെ ആദ്യദ്വിതീയകർണ്ണഘാതം കൊണ്ടു ഗുണിച്ച് ആദ്യതൃതീയകർണ്ണഘാതം കൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ. ഫലം ദ്വിതീയകർണ്ണവർഗ്ഗം. ഇങ്ങനെ കർണ്ണങ്ങൾ വരുത്തും പ്രകാരം. തൃതീയകർണ്ണത്തെ വരുത്തേണ്ടാ, കല്പിതമെത്രെ അത്, എന്നിട്ട്. ഇവ്വണ്ണം തന്നെ ഉണ്ടാക്കുകയുമാം വേണ്ടുകിൽ[70].

11. ജീവേ പരസ്പരന്യായവും വൃത്താന്തർഗ്ഗത ചതുരശ്രകർണ്ണഘാതവും

അനന്തരം ഭുജാപ്രതിഭുജാഘാതയോഗം ആദ്യദ്വിതീയകർണ്ണഘാതമായിട്ടിരിക്കും എന്നു ചൊല്ലിയതിനെ[1] പഠിതജ്യാക്കളിൽ കാട്ടുന്നൂ. അവിടെ രണ്ടു ജ്യാക്കളെ പരസ്പരകോടികളെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ത്രിജ്യകൊണ്ടു ഹരിച്ചു കൂട്ടിയാൽ ആ ജ്യാക്കളുടെ യോഗചാപത്തിന്റെ ജ്യാവുണ്ടാകും എന്നു[2] മുമ്പിൽ ചൊല്ലീ. ഇവിടെ ത്രിജ്യാവ് പ്രഥമകർണ്ണമായിട്ടിരിക്കും[3], യോഗചാപജ്യാവ് ദ്വിതീയകർണ്ണമായിട്ടിരിക്കും. ഇതരേതരകോടി മറ്റേതിന്നു പ്രതിഭുജയായിട്ടിരിക്കും.

അത്[4] എങ്ങനെ എന്ന്[5]. അവിടെ ദ്വിതീയജ്യാഗ്രത്തിങ്കൽ ത്രിജ്യാകർണ്ണത്തിന്റെ അഗ്രം. ദ്വിതീയതൃതീയചാപങ്ങൾ രണ്ടിന്നും കൂടീട്ട് ഒരു സമസ്തജ്യാ

10.69. B. C ഘാതമെന്നു
70. B. C അത് കല്പിതമെത്രെ. വേണ്ടുകിൽ ഈ ന്യായം കൊണ്ടു തന്നെ ഉണ്ടാക്കാം
11.1. F. എന്നതിനെ
2. B. C. D. Fഎന്നതിനെ
3. B. D. മായിരിക്കും
4. F. ഇത്
5. B. എങ്ങിനെയെന്നാൽ
6. C. സ്പർശിക്കുന്ന
7. B. തമ്മിലുള്ള

വും. ഈ ജ്യാവിന്റെ മദ്ധ്യത്തിങ്കൽ സ്പർശിക്കും[6] ത്രിജ്യാകർണ്ണം. ഇക്കർണ്ണവും സമസ്തജ്യാവും തങ്ങളിലുള്ള[7] സംപാതത്തിങ്കന്നു തൃതീയജ്യാഗ്രത്തോളമുള്ള സമസ്തജ്യാർദ്ധം ഒരു ഭുജാ. ദ്വിതീയജ്യാവിനെ പിന്നെ ഇസ്സംപാതത്തിങ്കലും തൃതീയജ്യാവും പൂർവ്വാപരസൂത്രവും തങ്ങളിലുള്ള സംപാതത്തിങ്കലും സ്പർശിച്ചിട്ടു കല്പിക്കാം. എന്നാലതൊരു ഭുജാ. തൃതീയജ്യാവ് ഒരു ഭുജാ. ഇങ്ങനെ ഇരിപ്പോരു ത്ര്യശ്രമുണ്ട്. ഇവിടെ സമസ്തജ്യാർദ്ധം പ്രഥമജ്യാവ്. ഇതിനേയും ദ്വിതീയജ്യാവിനേയും ഇതരേതര കോടികളെക്കൊണ്ടു[8] ഗുണിച്ച് തങ്ങളിൽകൂട്ടി ത്രിജ്യകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ തൃതീയജ്യാവായിട്ടുവരും. എന്നിതെല്ലാം മുമ്പിൽ ചൊല്ലീ.

പിന്നെ ഇവിടെ ക്ഷേത്രകല്പനത്തെ പ്രകാരാന്തരേണ നിരൂപിക്കാം. ഇവിടെ ദ്വിതീയജ്യാഗ്രത്തിങ്കലും ചതുർത്ഥജ്യാഗ്രത്തിങ്കലും സ്പർശിക്കുമാറു സമസ്തജ്യാവിനെ കല്പിപ്പൂ. ഇസ്സമസ്തജ്യാമദ്ധ്യത്തിങ്കൽ സ്പർശിക്കുമാറു വ്യാസാർദ്ധകർണ്ണത്തേയും, ദ്വിതീയജ്യാവിനെ യഥാസ്ഥാനമായിട്ടും കല്പിച്ച് പിന്നെ ദ്വിതീയജ്യാവും പൂർവ്വാപരസൂത്രത്തിങ്കലെ ദ്വിതീയജ്യാകോടിയും, പിന്നെ സമസ്തജ്യാർദ്ധങ്ങളിൽ ദ്വിതീയജ്യാഗ്രത്തെ സ്പർശിക്കുന്ന[9] ഭാഗവും, ഇതിന്റെ കോടി[10] വ്യാസാർദ്ധത്തിങ്കലെ ഭാഗവും[11] ഇങ്ങനെ ഒരു വിഷമചതുരശ്രം. ഇവിടെ പൂർവ്വാപരസൂത്രവും ദ്വിതീയജ്യാവുമുള്ള സംപാതത്തിങ്കലും സമസ്തജ്യാമദ്ധ്യത്തിങ്കലും സ്പർശിച്ചിട്ട് ഒരു കർണ്ണം. ഇതു തൃതീയജ്യാവായിട്ടിരിക്കും, മുമ്പിൽ ചൊല്ലിയ[12] ന്യായംകൊണ്ട്; സംസ്ഥാനഭേദം തോന്നുമെത്രെ. മറ്റേ കർണ്ണം ദ്വിതീയജ്യാഗ്രത്തിങ്കൽ[13] സ്പർശിച്ചിരിക്കുന്ന വ്യാസാർദ്ധം. ഇവിടെ ദ്വിതീയജ്യാവും പ്രഥമജ്യാകോടിയും തങ്ങളിൽ പ്രതിഭുജകളായിട്ടിരിക്കും. മറ്റേവ തങ്ങളിലും. എന്നാൽ [14]ഭുജാപ്രതിഭുജാഘാതം[15] കർണ്ണഘാതമെന്നത് ഇവിടേയും വരും.

11.8. D. F കോടികൊണ്ടു ഗുണിച്ച്
9. B. C. D. സ്പർശിച്ചിരിക്കുന്ന
10. D. കോടിയും; F. adds കർണ്ണത്തിങ്കലെ
11. B. ഭാഗം
12. B. മുൻ ചൊല്ലിയ
13. B. ജ്യാഗ്രത്തിൽ
14. B. ഭുജാപ്രതിഭുജ
15. F. ഘാതയോഗം

12. വ്യാസാർദ്ധം ഇല്ലാതെ ജീവാനയനം

പിന്നെ പ്രഥമജ്യാവും ദ്വിതീയജ്യാവും തങ്ങളിലുള്ള വർഗ്ഗാന്തരം പ്രഥമ ജ്യാവും തൃതീയജ്യാവും തങ്ങളിലുള്ള ഘാതമായിട്ടിരിക്കും. പിന്നെ പ്രഥമ ജ്യാവും തൃതീയജ്യാവും തങ്ങളിലുള്ള വർഗ്ഗാന്തരം ദ്വിതീയജ്യാവും ചതുർത്ഥ ജ്യാവും തങ്ങളിലുള്ള ഘാതമായിട്ടിരിക്കും. ഇങ്ങനെ രണ്ടു ജ്യാക്കളുടെ വർഗ്ഗാന്തരം അവറ്റിന്റെ ചാപയോഗത്തിന്റേയും അന്തരത്തിന്റേയും ജ്യാക്കൾ രണ്ടും തങ്ങളിലെ ഘാതമായിട്ടിരിക്കും[1], മുമ്പിൽ[2] ചൊല്ലിയ ന്യായംകൊ ണ്ട്. എന്നാൽ അതതു ജ്യാവർഗ്ഗത്തിങ്കന്നു പ്രഥമജ്യാവർഗ്ഗത്തെ കളഞ്ഞ് അടുത്തു കീഴെ ജ്യാവിനെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ അടുത്തു മീത്തെ ജ്യാവു ണ്ടാകും. ഇവ്വണ്ണം വ്യാസാർദ്ധംകൂടാതെ പഠിതജ്യാക്കളെ വരുത്താം. പിന്നെ പ്രഥമതൃതീയജ്യാഘാതത്തിൽ പ്രഥമജ്യാവർഗ്ഗത്തെ കൂട്ടി മൂലിച്ചാൽ ദ്വിതീ യജ്യാവുണ്ടാകും. ഇങ്ങനെ ജ്യാവർഗ്ഗം[3] ക്രമേണ ഉണ്ടാക്കാം വ്യാസാർദ്ധം കൂടാതെ. ഇവറ്റെ എല്ലാം സമസ്തജ്യാക്കളായിട്ട്[4] കല്പിക്കിലുമാം. ഇങ്ങനെ ഒരു പരിഷ ജീവാനയനന്ന്യായങ്ങൾ.

13. സമസ്തജ്യാഘാതത്തെ വ്യാസം കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ ലംബമുണ്ടാകും

അനന്തരം രണ്ടു ജ്യാക്കളുടെ ഘാതത്തെ വ്യാസാർദ്ധംകൊണ്ടു ഹരി ച്ചാൽ തച്ചാപയോഗജ്യാവ് ഭൂമി ആയിരിക്കുന്നേടത്തെ ലംബമുണ്ടാകും എന്നു ചൊല്ലിയതിന്റെ ഉപപത്തിയെ കാട്ടുന്നൂ, 'അനന്തപുര' വൃത്തത്തിങ്കലെ സമ സ്തജ്യാക്കളെക്കൊണ്ട്. അവിടെ പൂർവ്വസൂത്രത്തിന്റെ[1] കിഴക്കെ തലക്കെന്ന് ഇരുപുറവും പതുപ്പത്തു ചാപഖണ്ഡങ്ങളെ കഴിച്ചു നേരെ തെക്കുവടക്ക് ഒരു ജ്യാവിനെ കല്പിപ്പൂ. ഇതു പത്താംജ്യാവാകുന്നത്. പിന്നെ ഇതിന്റെ തെക്കെ തലക്കെന്നു തുടങ്ങി പന്ത്രണ്ടു ചാപഖണ്ഡത്തിന്ന് ഒരു സമസ്ത ജ്യാവിനെ കല്പിപ്പൂ. ഇതിന്റെ അഗ്രം പൂർവ്വാപരസൂത്രത്തിന്റെ വടക്കെപു റത്തു രണ്ടു ചാപഖണ്ഡം കഴിഞ്ഞേടത്തു പരിധിയെ സ്പർശിക്കും. ഇത്

---

12. 1. B. ആയിരിക്കും
    2. B. മുൻ
    3. F. വർഗ്ഗങ്ങൾ
    4. B. C. D. എല്ലാറ്റേയും സമസ്തജ്യാവായിട്ടു

13. 1. B. C. D പൂർവ്വാപര

ആറാം ജ്യാവ്. പിന്നെ ഇതിന്റെ വടക്കെ തലക്കലും പത്താം ജ്യാവിന്റെ വടക്കെ തലക്കലുംകൂടി ഒരു സമസ്തജ്യാവിനെ കല്പിപ്പൂ. ഇതു നാലാം ജ്യാവ്. പിന്നെ ആറാം ജ്യാവിന്റെ നടുവിലും വൃത്തകേന്ദ്രത്തിങ്കലും സ്പർശിച്ചിട്ടു രണ്ടഗ്രങ്ങളും പരിധിയെ[2] സ്പർശിക്കുമാറ് ഒരു വ്യാസസൂത്രത്തെ കല്പിപ്പൂ. ഇതും ആറാം ജ്യാവും തങ്ങളിൽ വിപരീതദിക്കുകൾ, ഇതിങ്കലൂ[3] ശരമെന്നിട്ട്. പിന്നെ ഈ വ്യാസസൂത്രത്തിന്റെ കിഴക്കെ തലക്കേന്നു നേരെ പടിഞ്ഞാറോട്ട് ഒരു സമസ്തജ്യാവിനെ കല്പിപ്പൂ, നേരെ വടക്കോട്ടും. ഇതിൽ[4] നടേത്തേതു കോടി, രണ്ടാമതു ഭുജ. ഈ ഭുജ നാലാം ജ്യാവായിട്ടിരിപ്പൊന്ന്. ഇവിടെ പൂർവ്വാപരസൂത്രാഗ്രത്തോടു പത്താം ജ്യാവിന്റെ തെക്കെ അഗ്രത്തോട് ഇടയിൽ പത്തു ചാപഖണ്ഡമുള്ളൂ. അവിടെ ദശമജ്യാഗ്രത്തിങ്കന്ന്[5] ആറുചാപഖണ്ഡം കഴിഞ്ഞിട്ടു വ്യാസാഗ്രം പരിധിയെ സ്പർശിക്കുന്നൂ[6]. ഇവിടുന്നു പൂർവ്വസൂത്രം[7] നാലു ചാപഖണ്ഡം; ഇവിടുന്നും നാലു ചാപഖണ്ഡം വടക്കു ചെന്നേടത്തു ഭുജാഗ്രം പരിധിയെ[8] സ്പർശിക്കും. ഇങ്ങനെ എട്ടു ചാപഖണ്ഡത്തിങ്കൽ കൂടിയുള്ളോരു സമസ്തജ്യാവ് ആകകൊണ്ടു നാലാം ജ്യാവ് എന്നു വന്നൂ.

പിന്നെ ദശമജ്യാവിന്റെ ഉത്തരാഗ്രത്തിങ്കൽ സ്പർശിച്ചിരിക്കുന്ന ചതുർത്ഥജ്യാമദ്ധ്യത്തിങ്കൽ സ്പർശിച്ചിട്ടും ഒരു വ്യാസസൂത്രത്തെ കല്പിപ്പൂ. ഇതിന്റേയും കിഴക്കെ തലക്കേന്നു തെക്കു വടക്ക് ഒരു ഭുജാജ്യാവിനെ കല്പിപ്പൂ. ഇതു പന്ത്രണ്ടു ഖണ്ഡത്തിന്റെ[9] സമസ്തജ്യാവാകയാൽ ആറാം ജ്യാവായിട്ടിരിക്കും. ഇവിടെ യാതൊരു ജ്യാവിന്റെ മദ്ധ്യത്തിങ്കൽ വ്യാസമാകുന്ന കർണ്ണം സ്പർശിക്കുന്നൂ അതിന്റെ ഭുജ ഇതരജ്യാവായിട്ടിരിക്കും. ഇവിടെ പൂർവ്വാപരസൂത്രാഗ്രവും[10] യോഗചാപജ്യാവാകുന്ന[11] ഭൂമ്യഗ്രവും തങ്ങളിൽ, യോഗചാപാർദ്ധം അന്തരമാകുന്നൂ. ഇതിങ്കന്ന് ഇഷ്ടചാപാർദ്ധം കളഞ്ഞാൽ ഇതരചാപാർദ്ധം[12] ശേഷിക്കും എന്നു ഹേതുവാകുന്നത്[13].

---

13. 2. F. പരിധിയിങ്കൽ
3. F. ഇതിലു ശരം
4. B. ഇതിന്റെ
5. C. ജ്യാവിങ്കന്ന്; F. സമസ്തജ്യാഗ്രത്തിങ്കന്ന്
6. F. അവിടുന്ന് പൂർവാപരസൂത്രം നാലാം
7. B. C. പൂർവ്വാപരസൂത്രം
8. B. C. D. F. പരിധിയിങ്കൽ
9. C. D. F ചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ
10. D. പൂർവ്വാപരസൂത്രവും
11. F. ജ്യാവായിരിക്കുന്ന

ഇവിടെ വ്യാസമാകുന്ന[14] കർണ്ണം പ്രമാണം, ഇതിന്റെ ഭുജ പ്രമാണഫലം, വ്യാസത്തിങ്കന്നു[15] വിപരീതമായിരിക്കുന്ന ജ്യാവ് ഇച്ഛാ, വിപരീതജ്യായോഗത്തിങ്കന്നു യോഗചാപജ്യായോഗത്തോളം ഉള്ള ലംബം ഇച്ഛാഫലമായിട്ടുണ്ടാകും[16]. ഇവിടെ ഇഷ്ടജ്യാക്കളിൽ ഒന്ന് ഇച്ഛയാകുമ്പോൾ മറ്റേതു[17] പ്രമാണഫലമായിട്ടിരിക്കും[18]. ആകയാൽ ചതുർത്ഥഷഷ്ഠജ്യാക്കൾ രണ്ടിന്നും ഒന്നുതന്നെ ഇച്ഛാഫലമാകുന്നത്, ലംബം വരുത്തുന്നേടത്ത്. പിന്നെ കോടി[19] വരുത്തുന്നേടത്തു ചാപമദ്ധ്യസ്പൃഷ്ടമായിരിക്കുന്ന വ്യാസസൂത്രത്തിന്റെ കോടി പ്രമാണഫലമാകുന്നത്. ഇവിടെ ഇച്ഛാപ്രമാണഫലഘാതം രണ്ട് ആകയാൽ ഇച്ഛാഫലങ്ങളായി ആബാധകളായി ദശമജ്യാഖണ്ഡങ്ങളായിരിക്കുന്ന അവ രണ്ടും ജ്യാക്കൾക്കും രണ്ടായിട്ടിരിക്കും. ഇവിടെ ഇച്ഛാപ്രമാണങ്ങൾ രണ്ടും തങ്ങളിൽ വിപരീതദിക്കുകളാകയാൽ ഇവറ്റിന്റെ ഫലങ്ങൾ തങ്ങളിലും വിപരീതദിക്കുകളായിട്ടിരിക്കും. ഇങ്ങനെ ഭുജകളെക്കൊണ്ടു ലംബഭൂമികളെ വരുത്തുംപ്രകാരത്തെ ചൊല്ലീതായി.

14. ഉപസംഹാരം

ഇവിടെ രണ്ട് ഇഷ്ടജ്യാക്കളെ ഇതരേതരകോടികളെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ചു തങ്ങളിൽ കൂട്ടിയത് ഇഷ്ടജ്യാചാപങ്ങളുടെ യോഗജ്യാവും വ്യാസാർദ്ധവും തങ്ങളിലുള്ള ഘാതമായിട്ടിരിക്കും എന്നു ചൊല്ലിയതുകൊണ്ടുതന്നെ നിയതകർണ്ണമായിട്ടിരിക്കുന്ന യാതൊരു ചതുരശ്രത്തിങ്കലും ഭുജാപ്രതിഭുജാഘാതയോഗം കർണ്ണഘാതമായിട്ടിരിക്കും എന്നു വന്നു. ഈ ന്യായംകൊണ്ടുതന്നെ അടുത്തുള്ള ഭുജകൾ തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചു കൂട്ടിയതും ചില കർണ്ണഘാതമായിട്ടിരിക്കും എന്നതിനേയും ചൊല്ലീ. പിന്നെ ഈ ന്യായംകൊണ്ടു യോഗാന്തരചാപജ്യാക്കളെ വരുത്താമെന്നും ചൊല്ലീ. തദ്വാരാ പഠിതജ്യാക്കളെ ഒക്ക വരുത്താമെന്നും ചൊല്ലീ. പിന്നെ പ്രഥമകർണ്ണാശ്രിതഭുജാഘാത

13. 12. D. ഇതരേതരാർദ്ധം
13. F. എന്നത് ഹേതുവായിട്ട് ആകുന്ന
14. B. വ്യാസാർദ്ധമാകുന്ന
15. F. വ്യാസത്തിന്ന്
16. B. ഇച്ഛാഫലം
17. C. D. F. add അതിന്റെ മറ്റേതിന്റെ മറ്റേത്
18. B. C. ആയിരിക്കും
19. F. ആബാധകളെ; for കോടി

യോഗം പ്രഥമതൃതീയകർണ്ണഘാതം എന്നും വന്നേടത്ത് ഇക്കർണ്ണചാപയോഗജ്യാവ് ഭൂമിയാകുന്ന ത്ര്യശ്രത്തിങ്കലെ ലംബം വരും, ഈ കർണ്ണഘാതത്തെ വ്യാസം കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ. പിന്നെ ദ്വിതീയകർണ്ണം ഭൂമിയാകുന്ന ത്ര്യശ്രങ്ങൾ രണ്ടിങ്കലെ ലംബയോഗമാകിലുമാം ഈ ലംബം. അപ്പോൾ കർണ്ണഘാതമെന്നു വിവക്ഷിക്കേണ്ടാ; ഭുജാഘാതങ്ങൾ എന്നേ വേണ്ടൂ. പിന്നെ ഈ ലംബം കൊണ്ടു ദ്വിതീയകർണ്ണാർദ്ധത്തെ ഗുണിച്ചാൽ ചതുരശ്രക്ഷേത്രഫലം വരും എന്നു സാമാന്യന്യായംകൊണ്ടു വന്നിരിക്കുന്നു.

15. വൃത്താന്തർഗ്ഗതചതുരശ്രക്ഷേത്രഫലാനയനം

അനന്തരം ഈ ന്യായംകൊണ്ടു പരിധികൂടാതെ നിയതകർണ്ണമായിരിക്കുന്ന ചതുരശ്രബാഹുക്കളെക്കൊണ്ടുതന്നെ വ്യാസത്തെ വരുത്താം എന്നതിനെ കാട്ടുവാനായിക്കൊണ്ടു കർണ്ണവും വ്യാസവും[1] കൂടാതെ ചതുരശ്രക്ഷേത്രഫലത്തെ വരുത്തുംപ്രകാരത്തെ കാട്ടുന്നൂ. ഇങ്ങനെ ത്രിഭുജക്ഷേത്രത്തിങ്കലെ ഫലത്തിന്റെ വർഗ്ഗമുണ്ടാക്കുന്ന പ്രകാരത്തെ ചൊല്ലി[2] അനന്തരം ഇവ്വണ്ണം തന്നെ ചതുരശ്രക്ഷേത്രഫലത്തിന്റെ[3] വർഗ്ഗവുമുണ്ടാകും[4] എന്നതിനെ ചൊല്ലുന്നൂ.

അവിടെ ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ[5] അന്തർഭാഗത്തിങ്കൽ കല്പിപ്പൂ ചതുരശ്രം. അപ്പോൾ ചതുരശ്രത്തിന്റെ നാലുകോണും വൃത്തത്തെ സ്പർശിച്ചിരിക്കേണം[6]. അപ്പോൾ ആ[7] വൃത്തത്തിന്റെ നാലു ജ്യാക്കളായിട്ടിരിക്കും ഇച്ചതുരശ്രബാഹുക്കൾ. ഇന്നാലു ജ്യാക്കളെക്കൊണ്ടു വൃത്തം മുഴുവൻ തികഞ്ഞിട്ടുമിരിക്കും[8]. പിന്നെ ഇച്ചതുരശ്രത്തിങ്കൽ ഇഷ്ടമായിട്ട് ഒരു കർണ്ണത്തെ കോണോടുകോണു സ്പർശിക്കുമാറു കല്പിപ്പൂ. എന്നാലിച്ചതുരശ്രത്തിന്റെ അന്തർഭാഗത്തിങ്കൽ രണ്ടു ത്ര്യശ്രങ്ങളുണ്ടാകും. ഇവിടെ രണ്ടു ത്ര്യശ്രങ്ങൾക്കും സാധാരണമായിട്ടിരിപ്പോരു ഭൂമിയായിട്ടിരിക്കും ഇക്കല്പിച്ച കർണ്ണം. ഇവ്വണ്ണം നിയതമായിരിക്കുന്ന ചതുരശ്രത്തിങ്കലെ ഫലത്തെ 'സർവ്വ

15 1. B. D. കർണ്ണങ്ങളും വ്യാസങ്ങളും; C. F. വ്യാസങ്ങളും കർണ്ണങ്ങളും
2. C. ചൊല്ലുന്നു
3. B. ക്ഷേത്രത്തിന്റെ
4. C. വർഗ്ഗമുണ്ടാകും
5. B. വൃത്താന്തർഭാഗത്തെ
6. B. സ്പർശിക്കണം
7. B. om. ആ
8. B. തികഞ്ഞുമിരിക്കും

ദോർയ്യുതിദളം' എന്നാദിയായിരിക്കുന്നതിനെക്കൊണ്ടു വരുത്തുന്നൂ. അവിടെ പിന്നെ ഈ ഇഷ്ടകർണ്ണത്തിന്റെ ഒരു പുറത്തെ ചതുരശ്രബാഹുക്കൾ രണ്ടിനേയും ത്ര്യശ്രബാഹുക്കൾ എന്നും ഇഷ്ടകർണ്ണത്തെ ഭൂമി എന്നും കല്പിച്ച് മുമ്പിൽ ചൊല്ലിയവണ്ണം ലംബത്തെ ഉണ്ടാക്കൂ. പിന്നെ ഇഷ്ടകർണ്ണത്തിന്റെ മറ്റെ പുറത്തെ ത്ര്യശ്രത്തിങ്കലെ ലംബത്തേയും ഉണ്ടാക്കൂ. പിന്നെ ഇഷ്ടകർണ്ണാർദ്ധത്തെക്കൊണ്ട് ലംബയോഗത്തെ[9] ഗുണിപ്പൂ. അത് ഈ ചതുരശ്രക്ഷേത്രത്തിങ്കലെ ഫലമാകുന്നത്. ലംബം കൊണ്ടു ഭൂമ്യർദ്ധത്തെ ഗുണിച്ചാൽ ത്ര്യശ്രഫലമുണ്ടാകും എന്നിട്ട്. ഇതുണ്ടു ചൊല്ലീട്ട്

"ലംബഗുണം ഭൂമ്യർദ്ധം സ്പഷ്ടം ത്രിഭുജേ ഫലം ഭവതി"

എന്ന്. ഇവിടെ ഇസ്സംഖ്യകളെക്കൊണ്ടു കല്പിപ്പൂ ചതുരശ്രക്ഷേത്രത്തെ.

"പഞ്ചാശദേകസഹിതാ വദനം യദീയം
ഭൂഃ പഞ്ചസപ്തതിമിതാ ച മിതോഽഷ്ടഷഷ്ട്യാ |
സവ്യോ ഭുജോ ദ്വിഗുണവിംശതിസമ്മിതോഽന്യ-
സ്തസ്മിൻ ഫലശ്രവണലംബമിതി പ്രചക്ഷ്വ" ||

ലീലാവതി. 97

അത്ര ഈശകോണഗാമീഷ്ടഃ കർണ്ണഃ സപ്തസപ്തതിസംഖ്യാഃ"

ഇവിടെ പടിഞ്ഞാറെ പുറത്തെ ബാഹുവിനെ ഭൂമി എന്നും കിഴക്കേതിനെ മുഖമെന്നും ചൊല്ലി[10]. ഈശാനകോണോടു നിരൃതികോണോടുള്ള[11] കർണ്ണം എഴുപത്തേഴ്. അതിനെ ഇഷ്ടകർണ്ണമെന്നും ഇതിനെ ചതുരശ്രത്തിന്നകത്തൂടെ രണ്ടു ത്ര്യശ്രങ്ങൾക്കും ഭൂമിയായിട്ടിരിപ്പൊന്ന് എന്നും കല്പിക്കുന്നൂ[12]. ഇങ്ങനെ ഒരു സംഖ്യാനിയമത്തെ ആശ്രയിച്ചുകൊണ്ടാൽ ഓർപ്പാനെളുത്.

15. i. ലംബനിപാതാന്തരവും ലംബയോഗവും കൊണ്ട് ക്ഷേത്രഫലം

ഇവിടെ അഗ്നികോണിങ്കന്ന് ഉണ്ടാകുന്ന ലംബം ഇഷ്ടകർണ്ണത്തിന്റെ[13] നടുവിൽനിന്നു തെക്കു നീങ്ങി സ്പർശിക്കും; വായുകോണിങ്കന്ന് ഉണ്ടാകുന്നതു വടക്കു നീങ്ങിയും സ്പർശിക്കും. ഇവിടെ ഇക്കർണ്ണത്തിങ്കൽ രണ്ടു ലംബങ്ങളും സ്പർശിക്കുന്നതിന്റെ നടുപ്രദേശത്തിന്നു 'ലംബനിപാതാന്തരം'

15.9. B. C. ലംബത്തെ
10. B. ഇവിടെ പടിഞ്ഞാറ് ഭൂമി, കിഴക്കു മുഖം
11. B. ഈശനിരൃതികോണോടുള്ള കർണ്ണം ഇഷ്ടം
12. B. ഈ കർണ്ണം ചതുരശ്രാന്തർഭാഗത്തുള്ള രണ്ടു ത്ര്യശ്രങ്ങളുടേയും ഭൂമിയാകുന്നു.
13. B. C. ഇഷ്ടകർണ്ണത്തിങ്കൽ

എന്നു പേർ. ഇതു ഭൂമീടെ ഏകദേശമാകയാൽ രണ്ടു ലംബത്തിന്നും ഒരു ദിക്കായിട്ടിരിക്കും[14]. ആകയാൽ ഒരു ലംബത്തിന്നു ശേഷമായി[15] നീട്ടി കല്പിപ്പൂ മറ്റെ ലംബത്തെ[16], അതിന്നു ശേഷമായിട്ടു[17] ഇങ്ങേ ലംബത്തേയും കല്പിപ്പൂ[18]. ഇപ്പോളിതരേതരാഗ്രത്തിങ്കലോളം[19] നീളം രണ്ടു ലംബങ്ങളും[20]. പിന്നെ ലംബാഗ്രങ്ങളിൽ രണ്ടേടത്തും ലംബനിപാതാന്തരത്തേയും കല്പിപ്പൂ. എന്നാൽ ഒരായതചതുരശ്രമുണ്ടാകും.

പിന്നെ ലംബയോഗവർഗ്ഗവും ലംബനിപാതാന്തരവർഗ്ഗവും കൂട്ടി മൂലിച്ചാൽ ഈ ആയതചതുരശ്രത്തിന്റെ കർണ്ണമുണ്ടാകും, ലംബാഗ്രങ്ങളെ സ്പർശിച്ചിട്ട്. ഇക്കർണ്ണം[21] വൃത്താന്തർഭാഗത്തിങ്കലെ ചതുരശ്രത്തിങ്കൽ കല്പിച്ചിരിക്കുന്ന ഇഷ്ടകർണ്ണത്തിന്റെ മറ്റെ കർണ്ണമായിട്ടിരിക്കുമത്. ഇതിന്ന് 'ഇതരകർണ്ണം' എന്നു പേർ. എന്നാലിതരകർണ്ണവർഗ്ഗത്തിങ്കന്നു ലംബനിപാതാന്തരവർഗ്ഗം പോയ ശേഷം ഈ ലംബയോഗവർഗ്ഗം. ഈ ലംബയോഗവർഗ്ഗവും ഇഷ്ടകർണ്ണാർദ്ധവർഗ്ഗവും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതു ചതുരശ്രക്ഷേത്രഫല വർഗ്ഗമായിട്ടിരിക്കും.

15. ii. ലംബനിപാതാന്തരം വരുത്തും പ്രകാരം

ഇവിടെ 'പഞ്ചാശദേകസഹിതാ' എന്നതുകൊണ്ടു ചൊല്ലിയ സംഖ്യാവിശേഷം കൊണ്ടു കല്പിച്ച ചതുരശ്രത്തിങ്കൽ മുഖവും ദക്ഷിണബാഹുവും തങ്ങളിലുള്ള യോഗത്തിങ്കന്നുണ്ടാകുന്ന ലംബം ഭൂമദ്ധ്യത്തിങ്കന്നു തെക്കു നീങ്ങി സ്പർശിക്കും, മുഖത്തേക്കാൾ ദക്ഷിണബാഹു ചെറിയത്, എന്നിട്ട്. ലംബാഗ്രത്തിങ്കൽ സ്പർശിക്കുന്ന ബാഹുക്കൾ രണ്ടിൽവെച്ച് യാതൊരു ബാഹു ചെറിയത് ഭൂമീടെ നടുവിൽ നിന്ന് അതിന്റെ ദിക്കിൽ നീങ്ങീട്ടു ഭൂമിയെ സ്പർശിക്കും ലംബം എന്നു നിയതം. ലംബസ്പർശത്തിങ്കന്ന് ഇരുപുറവുമുള്ള ഭൂഖണ്ഡങ്ങൾക്ക് 'ആബാധകൾ' എന്നു പേർ. ആ ലംബത്തെ സംബന്ധിച്ചിരിപ്പോ ചിലവ അവ രണ്ടും. പിന്നെ 'ഭൂമി' എന്നു ചൊല്ലിയ ചതുരശ്രബാഹുവും ഉത്തരബാഹുവും തങ്ങളിലെ യോഗത്തിങ്കന്നുണ്ടാകുന്ന ലംബം

15.14. B. വിപരീതദിക്ക്
15. F. ശേഷമായിട്ട്
16. F. ശേഷത്തെ
17. B. ശേഷമായി
18. B. om. കല്പിപ്പൂ
19. F. രേഖാഗ്രത്തിങ്കലോളം
20. F. ലംബങ്ങളിൽ
21. F. അക്കർണ്ണം

നിരതീശകോണു[22] നോക്കിയുള്ള ഇഷ്ടകർണ്ണമാകുന്ന[23] ഭൂമിയിങ്കൽ നേരെ നടുവിൽ നിന്ന് വടക്കു നീങ്ങി സ്പർശിക്കും, ഭൂമിയേക്കാൾ ഉത്തരബാഹു ചെറിയത്, എന്നിട്ട്. ഇവ്വണ്ണം ഇരിക്കയാൽ[24] രണ്ടു ലംബത്തെ സംബന്ധിച്ചുള്ള ആബാധകളിൽ വടക്കെ പുറത്തെ ആബാധകൾ രണ്ടും തങ്ങളിലുള്ള അന്തരം ഇവിടെ ലംബനിപാതാന്തരമാകുന്നത്. ഇവിടെ ഇഷ്ടകർണ്ണമാകുന്ന ഭൂമീടെ നടുവിന്ന് തെക്ക് ഒരു ലംബസംപാതം, വടക്ക് മറ്റേത് ആകയാൽ ഭൂമദ്ധ്യത്തോട് ലംബസംപാതത്തോടുള്ള അന്തരാളങ്ങൾ[25] രണ്ടും കൂടിയത് ഇവിടെ ലംബനിപാതാന്തരമാകുന്നത്. ആകയാൽ രണ്ടു ലംബത്തേയും സംബന്ധിച്ചിട്ട് ഒരു ദിക്കിലെ ആബാധകൾ രണ്ടിനേയും വരുത്തി തങ്ങളിൽ അന്തരിച്ചാലും വരും ഈ ലംബനിപാതാന്തരം. ഭൂമദ്ധ്യ ലംബസംപാതാന്തരങ്ങൾ രണ്ടും വരുത്തി തങ്ങളിൽ കൂട്ടിയാലും വരും ഈ ലംബനിപാതാന്തരം.

പിന്നെ ദക്ഷിണബാഹുവിനെ മുഖമാക്കി മുഖത്തെ ദക്ഷിണബാഹുവാക്കി പകർന്നുവെച്ചാലും ഇഷ്ടകർണ്ണം ഭൂമിയായിട്ടിരിക്കും. ഭൂമദ്ധ്യത്തിങ്കന്നു വടക്കു നീങ്ങീട്ടു രണ്ടു ലംബവും ഭൂമിയെ സ്പർശിക്കുന്നൂ. ആകയാൽ രണ്ടു ലംബത്തേയും സംബന്ധിച്ചുള്ള ഭൂമദ്ധ്യലംബസംപാതാന്തരങ്ങൾ രണ്ടും തങ്ങളിലുള്ള അന്തരം ഇവിടെ ലംബനിപാതാന്തരമാകുന്നത്. ആബാധകൾ കൊണ്ടു വരുത്തുകിൽ ഇവിടേയും വിശേഷമില്ല. ഒരു ദിക്കിലെ ആബാധകൾ രണ്ടും തങ്ങളിലുള്ള[26] അന്തരം തന്നെ അത്രേ ലംബനിപാതാന്തരമാകുന്നത്.

പിന്നെ ഇവിടെ ഇഷ്ടകർണ്ണത്തെക്കൊണ്ടു ചതുരശ്രത്തെ രണ്ടു ത്ര്യശ്രമാക്കി കല്പിക്കുമ്പോൾ[27] ഈ രണ്ടു ത്ര്യശ്രങ്ങൾ രണ്ടിലും[28] ഈരണ്ടു ഭുജകളുള്ളതിൽ ചെറിയവ രണ്ടും ഇഷ്ടകർണ്ണത്തിന്റെ ഒരഗ്രത്തെ സ്പർശിക്കുന്നൂ. വലിയ ഭുജകൾ രണ്ടും മറ്റൊറ് അറ്റത്തെ[29] സ്പർശിക്കുന്നൂ[30], എന്നിരിക്കിൽ ഭൂമിയായി കല്പിച്ചിരിക്കുന്ന ഇഷ്ടകർണ്ണത്തിന്റെ നടുവിങ്കന്നു ചെറിയ ഭുജകൾ ഉള്ള ദിക്കു നോക്കി നീങ്ങീട്ടിരിക്കും[31] രണ്ടു ലംബങ്ങളുടേയും ഭൂസ്പർശം. ആകയാൽ ഭൂമദ്ധ്യവും ലംബസംപാതവും

15.22. B. F. നിരൃതികോൺ
23. B. കർണ്ണമായ
24. B. ആകയാൽ
25. C. അന്തരങ്ങൾ
26. B. തമ്മിലുള്ള; C. തങ്ങളിൽ
27. B. ത്ര്യശ്യമാക്കുമ്പോൾ
28. F. ത്ര്യശ്യങ്ങളിൽ
29. B. അഗ്രത്തെ
30. F. സ്പർശിച്ചിരിക്കുന്ന
31. F. നീങ്ങിക്കൊണ്ടിരിക്കും

ഉള്ള അന്തരങ്ങൾ രണ്ടിന്റേയും തങ്ങളിലുള്ള അന്തരം ലംബനിപാതാന്തരമായിട്ടിരിക്കും. യാതൊരിടത്തു പിന്നെ രണ്ടു ത്ര്യശ്രങ്ങളിൽ വെച്ച് ഒന്നിന്റെ വലിയ ഭുജയും ഒന്നിന്റെ ചെറിയ ഭുജയും കൂടി കർണ്ണത്തിന്റെ ഒരഗ്രത്തെ സ്പർശിച്ചിരിക്കും, മറ്റെ അഗ്രത്തേയും ഒന്നിന്റെ വലിയ ഭുജയും ഒന്നിന്റെ ചെറിയ ഭുജയും കൂടി സ്പർശിച്ചിരിക്കുന്നൂ, അവിടെ ഇഷ്ടകർണ്ണമാകുന്ന ഭൂമീടെ മദ്ധ്യത്തിങ്കന്ന് ഇരുപുറവും സ്പർശിക്കും ലംബങ്ങൾ ഭൂമദ്ധ്യത്തിങ്കന്നു ചെറിയ ഭുജകളുള്ള[32] ദിക്കുനോക്കി നീങ്ങി ഇരിക്കും ഭൂലംബങ്ങളുടെ സംപാതം എന്നു നിയതമാകയാൽ. ഇവിടെ ഭൂമദ്ധ്യലംബസംപാതാന്തരങ്ങളുടെ യോഗം ലംബനിപാതാന്തരമാകുന്നത്[33].

ഭൂമദ്ധ്യലംബസംപാതാന്തരമാകുന്നതു പിന്നെ ആബാധാന്തരാർദ്ധം. വലിയ ആബാധേടെ അഗ്രത്തിങ്കലും ചെറിയ ആബാധയോളം വേർപെടുത്താൽ[34] നടുവിൽ[35] ആബാധാന്തരം ശേഷിക്കും. ഇതിന്റെ നടുവിൽ ഭൂമദ്ധ്യമാകുന്നത്[36]. ആകയാൽ ആബാധാന്തരാർദ്ധം ഭൂമദ്ധ്യലംബസംപാതാന്തരമാകുന്നത് എന്നു വന്നൂ[37]. ആകയാൽ ആബാധാന്തരാർദ്ധങ്ങളുടെ യോഗം താൻ അന്തരം താൻ[38] ലംബനിപാതാന്തരമാകുന്നത്[39].

പിന്നെ ഒരു ലംബത്തെ സംബന്ധിച്ചുള്ള[40] ആബാധകൾ രണ്ടിന്റേയും വർഗ്ഗാന്തരത്തെ ഈ ആബാധകളുടെ യോഗമാകുന്ന ഭൂമിയെക്കൊണ്ട് ഹരിച്ച ഫലം ആബാധാന്തരമാകുന്നത്[41]. വർഗ്ഗാന്തരാർദ്ധത്തെ ഹരിച്ച ഫലം ആബാധാന്തരാർദ്ധമാകുന്നത്. ആബാധാവർഗ്ഗാന്തരവും ത്ര്യശ്രത്തിങ്കൽ ഭൂമിയെ ഒഴിച്ചുള്ള ഭുജകൾ രണ്ടും തങ്ങളിലുള്ള വർഗ്ഗാന്തരവും തുല്യം, ആബാധാലംബങ്ങളാകുന്ന ഭുജാകോടികൾക്കു കർണ്ണങ്ങളായിട്ടിരിപ്പോ ചിലവയെല്ലൊ ത്ര്യശ്രത്തിങ്കലെ രണ്ടു ഭുജകളും, എന്നിട്ട്. ഇവിടെ ത്ര്യശ്രഭുജകൾ രണ്ടിൽ വലിയതിന്റെ വർഗ്ഗത്തിങ്കന്നു ചെറിയതിന്റെ വർഗ്ഗം പോയാൽ ലംബത്തിന്റേയും ചെറിയ ആബാധയുടേയും വർഗ്ഗം പോയിട്ടിരിക്കും. ഇതിൽ

15.
32. C. F. ഭുജയുള്ള
33. D. F ലംബനിപാതാന്തമാകുന്നത്
34. F. വേറെ വന്നാൽ
35. F. om. നടുവിൽ
36. B. D. F ആകുന്നു
37. F. വരുന്നു
38. B. D. F അന്തരം താൻ യോഗം താൻ
39. D. add ആബാധാന്തരമാകുന്നു
40. B. C.D. ലംബത്തിനെ സംബന്ധിച്ച
41. B. C. D. F. ആബാധാന്തരമാകുന്നത്

ലംബവർഗ്ഗം വലിയ ഭുജേടെ വർഗ്ഗത്തിൽ നടേ ഉണ്ടായിട്ടിരുന്നതു[42] പോയത്. പിന്നെ[43] വലിയ ആബാധേടെ വർഗ്ഗം ശേഷിച്ചിട്ടുള്ളത്. അതിങ്കന്നു ചെറിയ ആബാധേടെ വർഗ്ഗം പോകുന്നു. ആകയാൽ ആബാധാവർഗ്ഗാന്തരവും ഭുജാവർഗ്ഗാന്തരവും ഒന്നേ. എന്നാൽ ഇഷ്ടകർണ്ണമാകുന്ന ഭൂമീടെ ഒരു പുറത്തെ ഭുജകൾ രണ്ടിലും വച്ച് വലിയതിന്റെ വർഗ്ഗത്തിങ്കന്നു ചെറിയതിന്റെ വർഗ്ഗത്തെ കളഞ്ഞ ശേഷത്തിന്റെ അർദ്ധവും ഈ ഇഷ്ടകർണ്ണത്തിന്റെ മറ്റെ പുറത്തെ ത്ര്യശ്രഭുജകൾ രണ്ടിന്റേയും വർഗ്ഗാന്തരാർദ്ധവും തങ്ങളിൽ കൂട്ടുകതാൻ അന്തരിക്കതാൻ ചെയ്ത് അതിനെ ആബാധായോഗമാകുന്ന ഇഷ്ടകർണ്ണംകൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലം ലംബനിപാതാന്തരമാകുന്നത്.

ആകയാൽ ഇഷ്ടകർണ്ണത്തിന്റെ ഒരു പാർശ്വത്തിങ്കലെ ഭുജകളുടെ വർഗ്ഗാന്തരത്തിൽ മറ്റേ പാർശ്വത്തിങ്കലെ ഭുജകളുടെ വർഗ്ഗാന്തരം കൂട്ടുക വേണ്ടുവത് എങ്കിൽ ഇഷ്ടകർണ്ണത്തിന്റെ രണ്ടു പാർശ്വത്തിങ്കലേയും ഈരണ്ടു ത്ര്യശ്രഭുജകൾ ഉള്ളതിൽ ഒരു ത്ര്യശ്രത്തിങ്കലെ വലിയ ഭുജാവർഗ്ഗത്തോട് മറ്റെ ത്ര്യശ്രത്തിങ്കലെ വലിയ ഭുജാവർഗ്ഗത്തെ കൂട്ടൂ. ഇതിങ്കന്നു രണ്ടേടത്തേയും ചെറിയ ഭുജകളുടെ വർഗ്ഗയോഗത്തെ കളയൂ. ശേഷം ഭുജാവർഗ്ഗാന്തരങ്ങൾ രണ്ടിന്റേയും യോഗമായിട്ടിരിക്കും. ഇവിടെ രണ്ടേടത്തേയും വലിയ ഭുജകളിൽ ഒട്ടൊട്ടു ശേഷിക്കുന്നു. അശ്ശേഷങ്ങൾ രണ്ടും ധനഭൂതങ്ങളാകയാൽ വലിയ ഭുജകൾ രണ്ടും ധനഭൂതങ്ങൾ എന്നു കല്പിക്കാം. ആകയാൽ ധനങ്ങളുടെ യോഗത്തിങ്കന്ന് ഋണങ്ങളുടെ യോഗം കളയാം എന്നു ഹേതുവാകുന്നത്.

യാതൊരിടത്തു[44] പിന്നെ വർഗ്ഗാന്തരങ്ങൾ രണ്ടിന്റേയും അന്തരത്തെ ഉണ്ടാക്കേണ്ടൂ, അവിടെ രണ്ടുവർഗ്ഗാന്തരങ്ങളിൽ വെച്ചു ചെറിയ വർഗ്ഗാന്തരം യാതൊരു ഭുജാവർഗ്ഗത്തിലെ ശേഷം ആ ഭുജാവർഗ്ഗം മുഴുവനെ ഋണഭൂതമെന്നിരിക്കും. ഇവിടെ ശേഷിച്ചതിനേയും മറ്റെ ത്ര്യശ്രത്തിങ്കലെ[45] വലിയ ഭുജാവർഗ്ഗത്തിങ്കന്നു കളകയല്ലോ ചെയ്യുന്നത്, എന്നിട്ട്. ആകയാൽ ഇച്ചൊല്ലിയ ഋണഭൂതഭുജാവർഗ്ഗത്തെ, തന്നെ സംബന്ധിച്ചുള്ള ചെറിയ ഭുജേടെ വർഗ്ഗത്തിങ്കന്നും മറ്റെ ത്ര്യശ്രത്തിങ്കലെ വലിയ ഭുജേടെ വർഗ്ഗത്തി

15.42.F. ഉണ്ടായിരിക്കുന്നത്
43. C. seven # missing from പിന്നെ
44. F. മറ്റൊരിടത്ത്
45. B. C. D. F ത്ര്യശ്രങ്ങളിലെ

ങ്കന്നും കൂടി കളയുന്നൂ എന്നു വന്നിരിക്കും. ആകയാൽ ഇച്ചൊല്ലിയ[46] ഋണഭൂതഭുജാവർഗ്ഗവും മറ്റെ ത്ര്യശ്രത്തിങ്കലെ ചെറിയ ഭുജേടെ വർഗ്ഗവും കൂടിയത് ഋണരാശി, മറ്റെ ഭുജാവർഗ്ഗങ്ങൾ രണ്ടും കൂടിയതു ധനരാശി. തങ്ങളിലന്തരിച്ച ശേഷം ധനം. ഇങ്ങനെ ഭുജാവർഗ്ഗാന്തരങ്ങളെ അന്തരിക്കുന്നേടത്തെ പ്രകാരം.

'അന്തരയോഗേ കാര്യേ രാശിദ്വയയോർമ്മഹദ്യുതേസ്ത്യാജ്യാ |

ഇതരയുതിരന്തരേ ചേന്ന്യൂനാധികയോഗതോ f ന്യയുതി' ||

എന്നും ഉണ്ട്.

യാതൊരിടത്ത്[47] കർണ്ണത്തിന്റെ ഇരുപുറത്തുമുള്ള ലംബങ്ങളെ സംബന്ധിച്ചുള്ള ഈരണ്ടു ഭുജകളിൽ വലിയ ഭുജകൾ രണ്ടും ലംബങ്ങളുടെ ഒരു ദിക്കിലൂ, ചെറിയവ രണ്ടും ഒരു ദിക്കിലൂ, രണ്ടും തെക്ക് എന്നുതാൻ[48] വടക്ക് എന്നുതാൻ ഈവ്വണ്ണമിരിക്കുന്നൂ, അവിടെ ഇച്ചൊല്ലിയ ന്യായത്തിന്നു തക്കവണ്ണം ഭൂമുഖങ്ങളുടെ വർഗ്ഗയോഗവും ദക്ഷിണോത്തരബാഹുക്കളുടെ വർഗ്ഗയോഗവും ഉണ്ടാക്കി തങ്ങളിൽ അന്തരിപ്പൂ. എന്നാൽ വർഗ്ഗാന്തരങ്ങളുടെ അന്തരമുണ്ടാകും. യാതൊരിടത്തു പിന്നെ ഒരു ലംബത്തിന് ഒരു ദിക്കിലെ ഭുജ വലിയത്, മറ്റെ ലംബത്തിന്നു മറ്റെ ദിക്കിലെ ഭുജ വലിയത് എന്നിരിക്കുന്നൂ, ഇവിടെ[49] ചൊല്ലിയ ന്യായംകൊണ്ട് വർഗ്ഗാന്തരങ്ങളുടെ[50] യോഗം ഉണ്ടാക്കുവാൻ[51] വലിയ ഭുജകൾ രണ്ടിന്റേയും വർഗ്ഗം തങ്ങളിൽ കൂട്ടേണ്ടുകയാൽ ഭൂമുഖവർഗ്ഗവും ദക്ഷിണോത്തരബാഹുക്കളുടെ വർഗ്ഗവും തങ്ങളിൽ കൂട്ടേണ്ടൂ. ആകയാൽ എല്ലാടവും[52] പ്രതിഭുജകളുടെ വർഗ്ഗയോഗം ചെയ്ക വേണ്ടുവത് എന്നു നിയതം. ഇങ്ങനെ പ്രതിഭുജാവർഗ്ഗയോഗങ്ങൾ രണ്ടിന്റേയും അന്തരത്തിന്റെ അർദ്ധത്തെ ഇഷ്ടകർണ്ണം കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ലംബനിപാതാന്തരമുണ്ടാകും.

15. iii. നടേത്തെ ക്ഷേത്രഫലം

15.46.F. ഇച്ചൊന്ന
47. C. D. F add ഇങ്ങനെ
48. B. add രണ്ടും
49. B. C. D F അവിടെ
50. B. C വർഗ്ഗാന്തരങ്ങളിൽ
51. C. ഉണ്ടാവാൻ
52. F. മുൻ For എല്ലാടവും

ഈ അന്തരാർദ്ധത്തിന്റെ വർഗ്ഗത്തെ ഇഷ്ടകർണ്ണത്തെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ലംബനിപാതാന്തരവർഗ്ഗമുണ്ടാകും. പിന്നെ ഇതരകർണ്ണവർഗ്ഗത്തിങ്കന്നു ലംബനിപാതാന്തരവർഗ്ഗം പോയശേഷം ലംബയോഗവർഗ്ഗമാകുന്നത്. പിന്നെ ലംബയോഗവർഗ്ഗവും ഇഷ്ടകർണ്ണവർഗ്ഗവും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ച് നാലിൽ ഹരിച്ചഫലം ചതുരശ്രക്ഷേത്രഫലവർഗ്ഗമാകുന്നത്.

ഇവിടെ ലംബനിപാതാന്തരവർഗ്ഗം കൂടിയിരിക്കുന്ന[53] ലംബയോഗവർഗ്ഗമാകുന്നത് ഇതരകർണ്ണ വർഗ്ഗമായിട്ടിരിക്കും. അതിനെ തന്നെ ഇഷ്ടകർണ്ണവർഗ്ഗം കൊണ്ടു ഗുണിക്കുന്നൂതാകിൽ ശോദ്ധ്യമായിരിക്കുന്ന ലംബനിപാതാന്തര വർഗ്ഗത്തേയും ഇഷ്ടകർണ്ണവർഗ്ഗത്തെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ചിട്ടു കളയണം, സമച്ഛേദങ്ങൾക്കേ യോഗവിയോഗയോഗ്യത്വമുള്ളൂ, എന്നിട്ട്. ആകയാൽ കർണ്ണവർഗ്ഗങ്ങൾ തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതിങ്കന്ന് ഇതിനെ കളയേണ്ടൂ[54] എന്നു വരും. ഇവിടെ പ്രതിഭുജാവർഗ്ഗയോഗങ്ങളുടെ അർദ്ധങ്ങൾ രണ്ടിന്റേയും അന്തരം യാതൊന്ന് ഇതിന്റെ വർഗ്ഗത്തെ ഇഷ്ടകർണ്ണവർഗ്ഗം കൊണ്ടു ഹരിച്ചിട്ട് ലംബനിപാതാന്തരവർഗ്ഗത്തെ ഉണ്ടാക്കുന്നൂ[55]. ഇതിനെ തന്നെ പിന്നെ ഇഷ്ടകർണ്ണവർഗ്ഗത്തെക്കൊണ്ടു ഗുണിക്കുന്നൂ. ആകയാൽ പ്രതിഭുജാവർഗ്ഗയോഗാർദ്ധങ്ങളുടെ അന്തരവർഗ്ഗത്തെ തന്നെ ഇഷ്ടകർണ്ണവർഗ്ഗവും ഇതരകർണ്ണവർഗ്ഗവും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതിങ്കന്നു കളയേണ്ടുവത്.

പിന്നെ ഇതിന്റെ നാലൊന്ന് ഫലവർഗ്ഗമാകുന്നത്. ഇവിടെ ഇവ രണ്ടിന്റേയും[56] വർഗ്ഗാന്തരത്തെ നാലിൽ ഹരിക്കേണ്ടുന്നു[57]. അവ രണ്ടിനേയും അർദ്ധിച്ചു വർഗ്ഗിച്ച് അന്തരിച്ചാൽ ആ[58] വർഗ്ഗാന്തരചതുരംശം വരും. ആകയാൽ കർണ്ണഘാതാർദ്ധത്തേയും പ്രതിഭുജാവർഗ്ഗയോഗാർദ്ധങ്ങളുടെ അന്തരാർദ്ധത്തേയും വർഗ്ഗിച്ചു അന്തരിക്കാം. അത് ഫലവർഗ്ഗം.

ഈ ന്യായം കൊണ്ടു തന്നെ പ്രതിഭുജാർദ്ധങ്ങളുടെ വർഗ്ഗയോഗങ്ങളെ അന്തരിക്കിലുമാം[59] എന്നുവരും.

15.53. F. adds ഫലം
54. C. കളയേണ്ടൂതും
55. B. C വർഗ്ഗം
56. C. ഈ രണ്ടിന്റേയും
57. B. ഹരിക്കേണ്ടൂ
58. C.D. om. ആ
59. F. അന്തരിക്കയുമാം

'പ്രതിഭുജദളകൃതിയുത്യോര്യദന്തരം യച്ച കർണ്ണഘാതദളം |

വർഗ്ഗാന്തരപദമനയോശ്ചതുർഭുജക്ഷേത്രഫലമധികം' ||

എന്നുണ്ട്.

15. iv. രണ്ടാം ക്ഷേത്രഫലം

ഇവിടെ പിന്നെ കർണ്ണാശ്രിതഭുജാഘാതൈക്യം എന്നതിനെക്കൊണ്ടു കർണ്ണവർഗ്ഗങ്ങളെ വരുത്തുന്നൂ എന്നു മുമ്പിൽ ചൊല്ലീ. യാതൊരിടത്തു രണ്ടു ഫലങ്ങളുടെ ഘാതത്തെ ഉണ്ടാക്കേണ്ടുന്നൂ, അവിടെ ഗുണ്യങ്ങൾ രണ്ടും ഗുണകാരങ്ങൾ രണ്ടും ഇവ നാലും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതിങ്കന്ന് രണ്ടിന്റേയും ഹാരകങ്ങൾ[60] തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതിനെക്കൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ. ഫലം ഫലങ്ങൾ തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചൂതായിട്ടിരിക്കും.

ഇവിടെ ഇഷ്ടകർണ്ണത്തിന്റെ അഗ്രത്തെ സ്പർശിക്കുന്ന ഭുജകൾ രണ്ടും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതും മൂലത്തെ സ്പർശിച്ചിരിക്കുന്ന ഭുജകൾ രണ്ടും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതും ഈ ഘാതങ്ങൾ രണ്ടും തങ്ങളിൽ കൂട്ടിയത് ഇഷ്ടകർണ്ണത്തിന് ഗുണ്യമാകുന്നത്. പിന്നെ ഇതരകർണ്ണാശ്രിത ഭുജാഘാതൈക്യം ഇതരകർണ്ണത്തിന്നു ഗുണ്യമാകുന്നത്. പിന്നെ ഇഷ്ടകർണ്ണത്തിന്റെ ഗുണ്യം ഇതരകർണ്ണത്തിന്റെ[61] ഹാരകമാകുന്നത്. ഇതര കർണ്ണത്തിന്റെ ഗുണ്യം ഇഷ്ടകർണ്ണത്തിന്റെ[62] ഹാരകമാകുന്നത്. ആകയാൽ ഗുണ്യങ്ങൾ തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതും ഹാരകങ്ങൾ തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതും ഒന്നു തന്നെ. ആകയാൽ രണ്ടേടത്തെ ഗുണകാരങ്ങൾ തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതു തന്നെ ഫലങ്ങൾ തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതാകുന്നത്. ഇവിടെ രണ്ടു കർണ്ണത്തിങ്കലും[63] ഗുണകാരമാകുന്നത് ഭുജാപ്രതിഭുജകൾ. ഈ രണ്ടു തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചു കൂട്ടിയതാകയാൽ ഇതിന്റെ വർഗ്ഗം കർണ്ണങ്ങളുടെ വർഗ്ഗങ്ങൾ തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതായിട്ടിരിക്കും. വർഗ്ഗിക്കുംമുമ്പെ കർണ്ണങ്ങൾ തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതായിട്ടിരിക്കും. ഗുണിച്ചിട്ടു പിന്നെ[64] വർഗ്ഗിച്ചതും വർഗ്ഗിച്ചിട്ടു പിന്നെ[65] ഗുണിച്ചതും തുല്യം. എന്നാലൊരു ഭുജാപ്രതിഭുജാഘാതത്തിൽ മറ്റെ ഭുജാപ്രതിഭുജാഘാതത്തെ കൂട്ടി വർഗ്ഗിച്ചതു കർണ്ണവർഗ്ഗഘാതമായിട്ടിരിക്കും

15.60.C. ഹാരങ്ങൾന്ന്
62. D. ഇഷ്ടകർണ്ണത്തിന്ന്
63. B. കർണ്ണത്തിലും
64. F.om. പിന്നെ
65. F. om. പിന്നെ

എന്നു നിയതമാകയാൽ ലംബനിപാതാന്തരവർഗ്ഗത്തെ ഇഷ്ടകർണ്ണവർഗ്ഗം കൊണ്ടു ഗുണിച്ചതിനെ കർണ്ണവർഗ്ഗഘാതത്തിങ്കന്നു കളഞ്ഞശേഷം ഇഷ്ട കർണ്ണവർഗ്ഗവും ലംബയോഗവർഗ്ഗവും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതായിട്ടിരിക്കും. ഇതിൽ നാലൊന്ന് ക്ഷേത്രഫലവർഗ്ഗമാകുന്നത്.

ഇവിടെ ലംബനിപാതാന്തരവർഗ്ഗത്തെ ഇഷ്ടകർണ്ണവർഗ്ഗം കൊണ്ടു ഗുണിച്ചതാകുന്നത് പിന്നെ ചതുരശ്രത്തിങ്കലെ പൂർവ്വാപരഭുജകളുടെ വർഗ്ഗയോഗവും ദക്ഷിണോത്തരഭുജകളുടെ വർഗ്ഗയോഗവും ഇവ രണ്ടിന്റേയും അന്തരാർദ്ധവും അർദ്ധാന്തരവും ഒന്നേ എന്നിട്ട്, അർദ്ധാന്തരങ്ങളുടെ വർഗ്ഗമായിട്ടിരിക്കും. ഇതിനെ കർണ്ണവർഗ്ഗഘാതത്തിങ്കന്നു കളഞ്ഞു നാലിൽ ഹരിക്കേണ്ടുകയാൽ[66] രണ്ടിനേയും നാലിൽ ഹരിച്ചിട്ട് അന്തരിക്കാം. വർഗ്ഗരൂപങ്ങളായിരിക്കുന്ന ഇവ രണ്ടിനേയും നാലിൽ ഹരിക്കേണ്ടുകയാൽ ഇവറ്റിന്റെ അർദ്ധങ്ങളെ വർഗ്ഗിച്ച് അന്തരിക്കിലുമാം, വർഗ്ഗചതുരംശവും അർദ്ധവർഗ്ഗവും തുല്യമാകയാൽ. എന്നാൽ ഭൂമ്യർദ്ധത്തിന്റെ വർഗ്ഗവും മുഖാർദ്ധത്തിന്റെ[67] വർഗ്ഗവും തങ്ങളിൽ കൂട്ടൂ[68]. പിന്നെ ദക്ഷിണബാഹ്വർദ്ധത്തിന്റെ വർഗ്ഗവും ഉത്തരബാഹ്വർദ്ധത്തിന്റെ വർഗ്ഗവും തങ്ങളിൽ കൂട്ടൂ. പിന്നെ ഈ വർഗ്ഗയോഗങ്ങൾ രണ്ടിന്റേയുമന്തരം യാതൊന്ന്, ഇഷ്ടേതരകർണ്ണങ്ങൾ തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ച് അർദ്ധിച്ചതും യാതൊന്ന്, ഇവ രണ്ടിന്റേയും വർഗ്ഗാന്തരവും ചതുരശ്രക്ഷേത്രഫലവർഗ്ഗം. ഇതിനെച്ചൊല്ലീ "പ്രതിഭുജദള കൃതിയുത്യോർയ്യദന്തരം" എന്നതിനെക്കൊണ്ട്.

ഈ വർഗ്ഗാന്തരത്തെ പിന്നെ ഇവ രണ്ടും തങ്ങളിലെ യോഗത്തെ തങ്ങളിലെ അന്തരം കൊണ്ട് ഗുണിച്ചിട്ടും ഉണ്ടാക്കാം. "യോഗാന്തരാഹതിർവ്വർഗ്ഗാന്തരം" എല്ലോ എന്നിട്ട്. യോഗാന്തരങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കും പ്രകാരം പിന്നെ. ഭൂമുഖങ്ങളാകുന്ന ബാഹുക്കളുടെ ഘാതവും ദക്ഷിണോത്തരബാഹുക്കളുടെ ഘാതവും തങ്ങളിൽ കൂട്ടി അർദ്ധിച്ചതിനെ രണ്ടേടത്തു വെച്ച് ഒന്നിൽ കൂട്ടൂ വർഗ്ഗയോഗാന്തരം[69], ഒന്നിങ്കന്നു കളയൂ. ഇവ യോഗാന്തരങ്ങളാകുന്നത്. ഇച്ചൊല്ലിയ വർഗ്ഗയോഗാന്തരയോഗമാകുന്നത്, ഭൂമുഖങ്ങളുടെ അർദ്ധങ്ങളുടെ വർഗ്ഗയോഗവും ദക്ഷിണോത്തരബാഹുക്കളുടെ അർദ്ധങ്ങളുടെ വർഗ്ഗയോഗവും തങ്ങളിൽ അന്തരിച്ചത്. പിന്നെ യാതൊരിടത്ത് ഒരു രാശിയിൽ

15. 66. B. ഹരിക്കുകയാൽ
67. C. F ഭൂമ്യർദ്ധത്തിന്റെ
68. B. D. F വർഗ്ഗാന്തരം
69. B. adds ഒന്നിനെ

മറ്റു രണ്ടു രാശികളുടെ അന്തരത്തെ കൂട്ടേണ്ടൂ, അവിടെ അന്തരിക്കുന്ന രാശികളിൽ വച്ചു വലിയതിനെ കൂട്ടൂ, ചെറിയതിനെ കളയൂ[70]. എന്നാൽ അത് ആ[71] അന്തരത്തെ കൂട്ടിയതായിട്ടുവരും. യാതൊന്നിങ്കന്നു[72] പിന്നെ അന്തരം കളയേണ്ടൂ, അതിങ്കൽ ചെറിയ രാശിയെ കൂട്ടൂ, വലിയ രാശിയെ കളയൂ[73]. അത് ആ[74] അന്തരം കളഞ്ഞതായിട്ടിരിക്കും.

ഇവിടെ പിന്നെ ഇവ്വണ്ണമാകിലുമാം യോഗാന്തരമുണ്ടാക്കുവാൻ. ഭൂമുഖഘാതാർദ്ധത്തെ വേറെ വച്ച് അവറ്റിന്റെ അർദ്ധങ്ങളുടെ വർഗ്ഗയോഗത്തെ അതിങ്കൽ സംസ്ക്കരിപ്പൂ. പിന്നെ ദക്ഷിണോത്തരബാഹുഘാതാർദ്ധത്തിൽ അവറ്റിന്റെ അർദ്ധങ്ങളുടെ വർഗ്ഗയോഗത്തെ സംസ്കരിപ്പൂ. പിന്നെ ഇങ്ങനെ സംസ്കൃതങ്ങളായിരിക്കുന്ന ഘാതാർദ്ധങ്ങൾ രണ്ടും തങ്ങളിൽ കൂട്ടൂ. അതു യോഗാന്തരങ്ങളിൽ ഒന്നായിട്ടിരിക്കും. ഇവിടെ ഭൂമുഖാർദ്ധവർഗ്ഗയോഗത്തെ കൂട്ടൂ. ആ ഘാതത്തിൽ, ദക്ഷിണോത്തരബാഹ്വർദ്ധവർഗ്ഗയോഗത്തെ കളയൂ ആ ഘാതത്തിങ്കന്ന്. ഇവ[76] തങ്ങളിലെ യോഗം ഒരു രാശി. ഭൂമുഖാർദ്ധവർഗ്ഗയോഗം തൽഘാതത്തിങ്കന്നു കളഞ്ഞു ദക്ഷിണോത്തരബാഹ്വർദ്ധവർഗ്ഗയോഗം തൽഘാതത്തിങ്കൽ കൂട്ടി, ഇവ[77] രണ്ടും തങ്ങളിൽ കൂട്ടിയതു രണ്ടാം രാശി. ഇവിടെ യാതൊരു[78] പ്രതിഭുജാഘാതാർദ്ധത്തിങ്കന്ന് ഇവറ്റിന്റെ അർദ്ധവർഗ്ഗയോഗം കളയേണ്ടുന്നൂ[79], അവിടെ ഘാതാർദ്ധം അർദ്ധങ്ങളുടെ ഘാതത്തിലിരട്ടിയായിരിക്കും. ഇവറ്റിന്റെ വർഗ്ഗയോഗം പിന്നെ അന്തരവർഗ്ഗം കൊണ്ട് അധികമായിട്ടിരിക്കും. ആകയാൽ വർഗ്ഗയോഗം ദ്വിഘ്നഘാതത്തിങ്കന്നു കളയരുത്. ആകയാൽ ഈ പ്രതിബാഹുക്കളുടെ അർദ്ധങ്ങളുടെ അന്തരവർഗ്ഗം ഋണമായിട്ടിരിക്കും[80]. മറ്റെ ഘാതത്തിങ്കൽ മറ്റേതു പിന്നെ പ്രതിബാഹ്വർദ്ധങ്ങളുടെ യോഗവർഗ്ഗമായിട്ടിരിക്കും, ദ്വിഘ്നഘാതവും വർഗ്ഗയോഗവും കൂട്ടുകയാൽ.

"വർഗ്ഗയോഗോ ദ്വയോ രാശ്യോർദ്വിഘ്നഘാതേന സംയുതഃ |

---

15. 70. F. വലിയതീന്ന് ചെറിയ രാശിയെ
71. F. om. ആ; D.അതതു അന്തരത്തെ കൂട്ടുന്നതായിട്ടിരിക്കും
72. B. യാതൊന്നിനെ
73. F. കളയുന്നു
74. D. F. om. ആ
75. B. C. D. F പിന്നെ
76. F. അവ
77. B. adds പ്രകാരം
78. F.om. യാതൊരു
79. F. കളയുന്നു
80. B. ആയിരിക്കും

ഹീനോ വാ തൽപദേ രാശ്യോർയ്യോഗഭേദൌ പ്രകീർത്തിതൌ" ||

എന്നുണ്ടാകയാൽ. ഇവിടെ പിന്നെ ഭൂമ്യർദ്ധവും മുഖാർദ്ധവും ഇവ രണ്ടിന്റേയും യോഗത്തിന്റെ വർഗ്ഗത്തിങ്കന്നു ദക്ഷിണോത്തരബാഹ്വർദ്ധങ്ങളുടെ അന്തരവർഗ്ഗത്തെ കളഞ്ഞതായിട്ടിരിക്കും ഒന്ന്. പിന്നെ ദക്ഷിണോത്തര ബാഹ്വർദ്ധങ്ങളുടെ യോഗവർഗ്ഗത്തിങ്കന്നു ഭൂമുഖാർദ്ധങ്ങളുടെ അന്തര വർഗ്ഗത്തെ കളഞ്ഞതു രണ്ടാമത്. ഇവ തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതു ക്ഷേത്രഫല വർഗ്ഗമാകുന്നത്.

15. v. അന്തിമക്ഷേത്രഫലം

ഇവിടേയും ഇവ രണ്ടും ഓരോ വർഗ്ഗാന്തരങ്ങളായിട്ടിരിക്കയാൽ[81] രണ്ടിനേയും യോഗാന്തരഘാതം കൊണ്ട് ഉണ്ടാക്കാം. പിന്നെ ഈ വർഗ്ഗാന്തരങ്ങൾ തങ്ങളിൽ ഗുണിക്കേണ്ടുകയാൽ രണ്ടു യോഗവും രണ്ട് അന്തരവും ഇവ നാലും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതായിട്ടിരിക്കും ക്ഷേത്രഫലവർഗ്ഗം. എന്നാലിവിടെ ഭൂമുഖാർദ്ധങ്ങളുടെ യോഗത്തെ രണ്ടേടത്തുവെച്ച് ഒന്നിൽ ദക്ഷിണോത്തരബാഹ്വർദ്ധങ്ങളുടെ അന്തരത്തെ കളയൂ. ഒന്നിൽ കൂട്ടൂ. ഇങ്ങനെ ഇവ രണ്ടു രാശികളാകുന്നത്. പിന്നെ ദക്ഷിണോത്തരബാഹ്വർദ്ധങ്ങളുടെ യോഗത്തേയും രണ്ടേടത്തുവച്ച് ഒന്നിൽ ഭൂമുഖാർദ്ധങ്ങളുടെ അന്തരത്തെ കൂട്ടൂ, ഒന്നിൽ കളയൂ ഇതിനെ. ഇവ മറ്റെ രണ്ടു രാശികളാകുന്നത്. ഇവ നാലും തങ്ങളിൽ ഗുണിക്കേണ്ടൂ ക്ഷേത്രഫലവർഗ്ഗവമുണ്ടാവനായിക്കൊണ്ട്.

ഇവിടെ ഇച്ചൊല്ലിയ നാലു രാശികളേയും ഇവ്വണ്ണമുണ്ടാക്കുന്നൂ. ചതുരശ്രക്ഷേത്രത്തിന്റെ ബാഹുക്കൾ നാലിനേയും കൂട്ടിയ സംഖ്യ യാതൊന്ന് അതിന്റെ അർദ്ധത്തെ നാലേടത്തുവെച്ച് നാലിൽ നിന്നും ഓരോ ബാഹുക്കളെ കളയൂ ക്രമേണ. അവിടെ ശേഷിച്ച രാശികൾ നാലും ഇച്ചൊല്ലിയവ നാലുമാകുന്നത്. ഇവിടെ ബാഹുയോഗാർദ്ധമാകുന്നത് ബാഹ്വർദ്ധങ്ങൾ നാലിന്റേയും യോഗം. ഇതിങ്കന്ന് ഒരു ബാഹുവിനെ മുഴുവനെ കളയുന്നൂ. അതിൽ തന്റെ അർദ്ധം കൂടി ഉണ്ടാകയാൽ അതിങ്കന്നു പോകും. മറ്റെ അർദ്ധം. പ്രതിബാഹ്വർദ്ധത്തിങ്കന്നും പോവും[82]. അവിടെ പ്രതിബാഹ്വർദ്ധം വലുത്[83] എന്നിരിക്കിൽ അവറ്റിന്റെ[84] അന്തരം ശേഷിക്കും. പ്രതിബാഹ്വർദ്ധം ചെറുത് എന്നിരിക്കിൽ ഇവറ്റിന്റെ അന്തരം കൂടി പോയിട്ടിരിക്കും[85] മറ്റെ

15. 81. B. ആയിരിക്കയാൽ
82. B. C.F പോവു
83. B. വലുതായി എന്നിരിക്കിൽ
84. F. ഇവറ്റിന്റെ

ബാഹ്വർദ്ധങ്ങൾ രണ്ടിന്റേയും യോഗത്തിങ്കന്ന്. ഇവിടെ സർവ്വദോർയ്യുതിദളത്തിങ്കന്നു മുഖമാകുന്ന ബാഹുവിനെ കളഞ്ഞാൽ ശേഷം ദക്ഷിണോത്തരബാഹ്വർദ്ധങ്ങളുടെ യോഗവും ഭൂമുഖാർദ്ധങ്ങളുടെ അന്തരവും കൂടിയതായിട്ടിരിക്കും. പിന്നെ ഈ അന്തരം പോയതായിട്ടിരിക്കും ഭൂമിയാകുന്ന ബാഹുവിനെ കളഞ്ഞിരിക്കുന്നത്. പിന്നെ സർവ്വദോർയ്യുതിദളത്തിങ്കന്നു ദക്ഷിണോത്തരബാഹുക്കളിൽ ചെറിയതിനെ കളഞ്ഞാൽ ഭൂമുഖാർദ്ധങ്ങളുടെ യോഗവും ദക്ഷിണോത്തരബാഹ്വർദ്ധങ്ങളുടെ അന്തരവും കൂടിയതായിട്ടിരിക്കും. വലിയതിനെ കളഞ്ഞത് ഈ അന്തരം പോയതായിട്ടിരിക്കും[86]. പിന്നെ ഇവ നാലും തങ്ങളിൽ ഗുണിപ്പൂ. എന്നാൽ ക്ഷേത്രഫലവർഗ്ഗമത്. ഇതുണ്ട് ചൊല്ലീട്ട്-

സർവ്വദോർയ്യുതിദളം ചതുഃസ്ഥിതം ബാഹുഭിർവ്വിരഹിതം ച തദ്ധതേഃ/
മൂലമത്ര നിയതശ്രുതൌ ഫലം ത്ര്യശ്രബാഹുജമപി സ്ഫുടം ഭവേത്//
(ലീലാവതീ 167)

15. vi. ത്ര്യശ്രക്ഷേത്രഫലം

ഇവ്വണ്ണംതന്നെ ത്ര്യശ്രക്ഷേത്രത്തിങ്കലെ ഫലവർഗ്ഗവുമുണ്ടാകും. അവിടെ ഭൂമ്യർദ്ധവും ബാഹുയോഗാർദ്ധവും കൂടിയതു സർവ്വദോർയ്യുതിദളമാകുന്നത്. ഇതിനെ നാലേടത്ത് ഉണ്ടാക്കൂ. ഇവറ്റിൽ മൂന്നിൽ[87] നിന്നും ഓരോ ബാഹുക്കളെ കളയൂ. ഒന്നിങ്കന്ന് ഏതും കളയാ.[88]

ഇക്കേവലമായിരിക്കുന്ന[89] സർവ്വദോർയ്യുതിദളവും ഭൂമിയാകുന്ന ബാഹുവിനെ കളഞ്ഞ സർവ്വദോർയ്യ്യുതിദളവും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതു മിക്കതും ലംബവർഗ്ഗത്തോടു സമമായിട്ടിരിക്കും. ആബാധായോഗാർദ്ധവും ഭുജായോഗാർദ്ധവും തങ്ങളിൽ ഉള്ള വർഗ്ഗാന്തരമായിട്ടിരിക്കുമത്. ആബാധയും ഭുജയും തങ്ങളിലുള്ള വർഗ്ഗാന്തരം ലംബവർഗ്ഗമാകുന്നത് എന്നു ലംബവർഗ്ഗത്തോടു സാമ്യമുണ്ടാവാൻ ഹേതുവാകുന്നത്. പിന്നെ രണ്ടു സർവ്വദോർയ്യുതിദളങ്ങളിൽ നിന്ന് ഓരോ ബാഹുക്കളെ കളഞ്ഞ ശേഷങ്ങൾ രണ്ടിനേയും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതു ഭൂമ്യർദ്ധവർഗ്ഗമായിട്ടിരിക്കും മിക്കതും. പിന്നെ ഇതും

15.85. A. പോയിരിക്കും
86. C. പോയതായിട്ടുമിരിക്കും
87. C. D. F മൂന്നിന്നും
88. F. കളവൂ
89a. D. F. om. ഇക്കേവല

മുമ്പിലെ ലംബവർഗ്ഗപ്രായമാകുന്നതും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചാൽ ത്ര്യശ്രക്ഷേത്രഫലവർഗ്ഗമുണ്ടാകും. ഇവിടെ ഭൂമദ്ധ്യവർഗ്ഗത്തിൽ കുറയുന്ന അംശം തന്നെ ലംബവർഗ്ഗത്തിൽ ഏറുന്നത്. എന്നിട്ട് ക്ഷേത്രഫലവർഗ്ഗം തന്നെ വരുന്നൂ.

ഇതിന്റെ പ്രകാരത്തെ ചൊല്ലുന്നൂ. ഇവിടെ ത്ര്യശ്രത്തിങ്കലെ രണ്ടു ബാഹുക്കളുടേയും വർഗ്ഗങ്ങളാകുന്നത്, ഇക്കർണ്ണങ്ങളായിട്ടിരിക്കുന്ന ഈ രണ്ടു ഭുജകൾക്കും സാധാരണമായിട്ടിരിക്കുന്ന കോടി ലംബമാകുന്നതു യാതൊന്ന് ഇതിന്റെ വർഗ്ഗവും[90] തന്റെ തന്റെ ആബാധയുടെ വർഗ്ഗവും കൂടിയതായിട്ടിരിക്കും. ആകയാൽ ആബാധാവർഗ്ഗാന്തരത്തോടു തുല്യം കർണ്ണങ്ങളാകുന്ന ഭുജകളുടെ വർഗ്ഗാന്തരം. ആകയാൽ ഭുജാവർഗ്ഗയോഗാർദ്ധത്തിങ്കന്ന് ആബാധാവർഗ്ഗയോഗാർദ്ധത്തെ കളഞ്ഞാൽ ശേഷം കേവലലംബവർഗ്ഗം.

പിന്നെ ഭുജായോഗാർദ്ധവർഗ്ഗത്തിങ്കന്ന് ആബാധായോഗാർദ്ധവർഗ്ഗത്തെ കളഞ്ഞാൽ ശേഷം ലംബവർഗ്ഗത്തേക്കാൾ ഏറീട്ടിരിക്കും. ഇവിടെ ബാഹുക്കൾ രണ്ടിന്റേയും അന്തരത്തിന്റെ അർദ്ധം യാതൊന്ന് ആബാധകൾ രണ്ടിന്റേയും അന്തരത്തിന്റെ അർദ്ധവും യാതൊന്ന് ഇവ രണ്ടിനേയും വർഗ്ഗിച്ച് അന്തരിച്ചതിനോടു തുല്യം ലംബവർഗ്ഗത്തിൽ[91] ഏറുന്ന അംശം എന്നു നിയതം.

ഇവിടെ രണ്ടു ഘാതവും ഒരു അന്തരവർഗ്ഗവും കൂടിയതു വർഗ്ഗയോഗമാകയാൽ ഒരു ഘാതവും ഒരു അന്തരവർഗ്ഗാർദ്ധവും കൂടിയത് വർഗ്ഗയോഗാർദ്ധമാകുന്നത്. യോഗാർദ്ധവർഗ്ഗത്തിങ്കൽ പിന്നെ ഒരു ഘാതവും അന്തരവർഗ്ഗത്തിൽ നാലൊന്നും ഉണ്ടായിട്ടിരിക്കും. ആകയാൽ യോഗാർദ്ധവർഗ്ഗത്തേക്കാൾ വർഗ്ഗയോഗാർദ്ധം അന്തരാർദ്ധവർഗ്ഗത്തെക്കൊണ്ട് അധികമായിട്ടിരിക്കും എന്നു വന്നൂ. എന്നാൽ ഇവിടെ[92] ഭുജായോഗാർദ്ധവർഗ്ഗത്തിങ്കൽ ഭുജാന്തരാർദ്ധവർഗ്ഗം കുറയും[93], ആബാധായോഗാർദ്ധമാകുന്ന ഭൂമ്യർദ്ധവർഗ്ഗത്തിങ്കൽ ആബാധാന്തരാർദ്ധവർഗ്ഗം കുറയും, വർഗ്ഗയോഗാർദ്ധത്തെ അപേക്ഷിച്ച്. ഇവിടെ ഭുജാന്തരാർദ്ധവർഗ്ഗത്തേക്കാൾ ആബാധാന്തരാർദ്ധവർഗ്ഗം വലിയത്. ആബാധായോഗാർദ്ധവർഗ്ഗത്തെ മറ്റേതിങ്കന്നു കളയേണ്ടൂതും. കളയേണ്ടുന്ന രാശിയിൽ കുറയുന്ന അംശം കളഞ്ഞു ശേഷിച്ച രാശിയിങ്കൽ ഏറീട്ടിരിക്കും. തങ്കൽ കുറയുന്ന അംശംകൊണ്ട് ഊനമായിട്ടുമിരിക്കും[94]. ആക

15. 90. B. C. D ഫലവർഗ്ഗവും
91. D. വർഗ്ഗത്തിങ്കന്ന്, F. ത്തിങ്കൽ
92. C. om. ഇവിടെ
93. B. കൂറയുന്നു

യാൽ ആബാധാന്തരാർദ്ധവർഗ്ഗവും ഭുജാന്തരാർദ്ധവർഗ്ഗവും തങ്ങളിലുള്ള അന്തരം കൊണ്ട് അധികമായിട്ടിരിക്കും ലംബവർഗ്ഗം, യോഗാർദ്ധവർഗ്ഗങ്ങൾ തങ്ങളിലന്തരിക്കുന്ന പക്ഷം.

ഈവ്വണ്ണം, ഇവിടെ ത്ര്യശ്രഭുജകൾ തങ്ങളിൽ ഉള്ള വർഗ്ഗാന്തരവും ആബാധകൾ തങ്ങളിലുള്ള വർഗ്ഗാന്തരവും ഒന്നേ ആകയാൽ, ഭുജായോഗത്തെ ഭുജാന്തരം കൊണ്ടു ഗുണിച്ചാലും ആബാധായോഗത്തെ ആബാധാന്തരം കൊണ്ടു ഗുണിച്ചാലും തുല്യമായിട്ടുവരും[95] എന്നും വരും. യോഗാന്തരഘാതം വർഗ്ഗാന്തരമാകയാൽ ഇങ്ങനെ രണ്ടു ഘാതങ്ങളും തുല്യങ്ങളാകയാൽ ഈ നാലു രാശികളിലും കൂടീട്ടു പ്രമാണേച്ഛാതൽഫലങ്ങൾ എന്നപോലെ ഒരു സംബന്ധത്തെ കല്പിക്കാം. അവിടെ പ്രമാണഫലവും ഇച്ഛയും ഉള്ള ഘാതവും, ഇച്ഛാഫലവും പ്രമാണവുമുള്ള ഘാതവും ഒന്നേ അത്രേ എന്നു സിദ്ധമെല്ലോ. എന്നാൽ ഭുജായോഗത്തെ പ്രമാണം എന്നപോലെ കല്പിക്കുമ്പോൾ ആബാധാന്തരം പ്രമാണഫലം, ആബാധായോഗം ഇച്ഛാ, ഭുജാന്തരം ഇച്ഛാഫലം എന്നപോലെ ഇരിക്കും. ഇവ്വണ്ണമിവറ്റിന്റെ[96] വർഗ്ഗങ്ങൾ തങ്ങളിലും വർഗ്ഗാന്തരങ്ങൾ തങ്ങളിലും സംബന്ധമുണ്ടായിട്ടിരിക്കും. ഇവിടെ ഭുജായോഗത്തേക്കാൾ ആബാധായോഗം എത്ര കുറയും. ആബാധാന്തരത്തേക്കാൾ ഭുജാന്തരം അത്ര കുറഞ്ഞിരിക്കുമെന്നു നിയതം. ഇവറ്റിന്റെ അർദ്ധങ്ങൾക്കുമിവ്വണ്ണം തന്നെ സംബന്ധം. അർദ്ധങ്ങളുടെ വർഗ്ഗങ്ങൾക്കും ഇങ്ങനെ തന്നെ സംബന്ധം. ഇവിടെ ഭുജായോഗാർദ്ധവർഗ്ഗത്തിൽ പാതി ആബാധായോഗാർദ്ധവർഗ്ഗമെങ്കിൽ ആബാധാന്തരാർദ്ധവർഗ്ഗത്തിൽ പാതിയായിട്ടിരിക്കും ഭുജാന്തരാർദ്ധവർഗ്ഗം. ഇവ്വണ്ണംതന്നെ യോഗാർദ്ധങ്ങളുടെ വർഗ്ഗാന്തരവും അന്തരാർദ്ധങ്ങളുടെ വർഗ്ഗാന്തരവും തങ്ങളിലുള്ള സംബന്ധം.

എന്നാൽ ഇവിടെ ഇങ്ങനെത്തൊരു ത്രൈരാശികത്തെ കല്പിക്കാം. ആബാധായോഗാർദ്ധവർഗ്ഗം പ്രമാണം, ഭുജാന്തരാർദ്ധവർഗ്ഗം പ്രമാണഫലം, ഭുജായോഗാർദ്ധവും ആബാധായോഗാർദ്ധവും ഇവ രണ്ടിന്റേയും വർഗ്ഗാന്തരം ഇച്ഛാ. പിന്നെ ആബാധാന്തരാർദ്ധവും ഭുജാന്തരാർദ്ധവും ഇവ രണ്ടിന്റേയും വർഗ്ഗാന്തരം ഇച്ഛാഫലം. ഈ ഇച്ഛാഫലം ഇവിടെ ലംബവർഗ്ഗത്തിൽ[97] ഏറുന്ന അംശമാകുന്നത്.

ആകയാൽ ഇഗ്ഗുണഹാരങ്ങളെക്കൊണ്ടുതന്നെ ഭൂമ്യർദ്ധവർഗ്ഗത്തിങ്കന്ന്

15. 94. D. ആയിട്ടിരിക്കും
95. B. C. D. F തുല്യമായിട്ടിരിക്കും
96. F. om. ഇവ്വണ്ണം
97. D. ലംബവർഗ്ഗത്തിങ്കൽ

ഉണ്ടാകുന്ന ഫലം ഭൂമ്യർദ്ധവർഗ്ഗത്തിൽ കുറയേണ്ടുവത്. ഇവിടെ ഭൂമ്യർദ്ധവർഗ്ഗം ഗുണ്യം, ഭുജാന്തരാർദ്ധവർഗ്ഗം ഗുണകാരം, ആബാധായോഗാർദ്ധവർഗ്ഗം ഹാരകം. എന്നിട്ട് ഇവിടെ ഗുണ്യവും ഹാരകവും ഒന്നേ ആകയാൽ ഗുണകാരവും ഫലവും ഒന്നേ ആയിട്ടിരിക്കും. അതു ഭുജാന്തരാർദ്ധവർഗ്ഗം. എന്നിട്ട് ഭുജാന്തരാർദ്ധവർഗ്ഗം ഭൂമ്യർദ്ധവർഗ്ഗത്തിങ്കന്നു പോകേണ്ടുവത്. ഇങ്ങനെ ഇരിക്കുന്ന ഭൂമ്യർദ്ധവർഗ്ഗംകൊണ്ട് അന്തരാർദ്ധവർഗ്ഗാന്തരം കൂടി ഇരിക്കുന്ന ലംബവർഗ്ഗത്തെ ഗുണിച്ചാൽ ത്ര്യശ്രക്ഷേത്രഫലവർഗ്ഗം ഉണ്ടാകുന്നു. ഇവിടെ ഭുജാന്തരാർദ്ധവർഗ്ഗം കുറഞ്ഞ ഭൂമ്യർദ്ധവർഗ്ഗം ഉണ്ടാകുന്നു. പിന്നെ സർവ്വദോർയ്യുതിദളങ്ങൾ രണ്ടിങ്കൽ നിന്ന് ഓരോ ത്ര്യശ്രഭുജകൾ വാങ്ങിയ ശേഷങ്ങൾ രണ്ടിൽ വച്ചു ചെറിയ ഭുജയെ കളഞ്ഞ[98] ശേഷത്തിങ്കൽ ഭുജാന്തരാർദ്ധം കൂടിയ ഭൂമ്യർദ്ധം ഉണ്ടായിരിക്കും. വലിയ ഭുജയെ കളഞ്ഞ സർവ്വദോർയ്യുതിദളത്തിങ്കൽ ഭുജാന്തരാർദ്ധം കുറഞ്ഞ ഭൂമ്യർദ്ധം ശേഷിക്കും. പിന്നെ ഭുജാന്തരാർദ്ധം കുറഞ്ഞിട്ടും ഏറീട്ടും ഇരിക്കുന്ന ഭൂമദ്ധ്യങ്ങൾ രണ്ടും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചത് ഭുജാന്തരാർദ്ധവർഗ്ഗം കുറഞ്ഞ ഭൂമ്യർദ്ധവർഗ്ഗമായിരിക്കും.

> ഇഷ്ടോനയുഗ്രാശിവധഃ കൃതിഃ സ്യാദ്-
>
> ഇഷ്ടസ്യ വർഗ്ഗേണ സമന്വിതോ വാ/ (ലീലാവതീ, 20)

എന്ന ന്യായംകൊണ്ടു വരുമത്.[99]

അവിടെ[100] അന്തരാർദ്ധവർഗ്ഗാന്തരം കൂടിയിരിക്കുന്ന ലംബവർഗ്ഗത്തിങ്കന്ന് അന്തരാർദ്ധവർഗ്ഗാന്തരത്തെ വേറെയാക്കുവാൻ യാതൊന്നു ഗുണഹാരങ്ങളായത് അതു തന്നെ കേവലഭൂമ്യർദ്ധവർഗ്ഗത്തിനു ഗുണഹാരങ്ങളാകേണ്ടുവത്, കേവല ലംബവർഗ്ഗത്തിങ്കലെ ഗുണഹാരങ്ങളെ അല്ല. യാതൊരു പ്രകാരം മൂന്നിനെക്കൊണ്ടു അഞ്ചിനെ ഗുണിക്കേണ്ടുമ്പോൾ തന്നിലെ അഞ്ചൊന്നു കൂടിയിരിക്കുന്ന ആറിനെ ഗുണിക്കുന്നൂതാകിൽ മൂന്നാകുന്ന ഗുണഹാരകത്തിങ്കന്നു തന്നിൽ ആറൊന്നു പോയിരിക്കുന്ന രണ്ടരയെക്കൊണ്ടു ഗുണിക്കേണ്ടൂ. ഇവ്വണ്ണമിവിടേയും കേവല ഭൂമ്യർദ്ധവർഗ്ഗത്തിങ്കന്നു കളയേണ്ടുന്ന ഫലത്തെ വരുത്തേണ്ടൂ എന്നാൽ സർവ്വദോർയ്യുതിദളം എന്ന ന്യായംകൊണ്ടു വരുത്തുന്ന

15. 98. F. കളഞ്ഞ്
99. B.C.D.F വരുമിത്
100. B.C.F. ഇവിടെ

ത്രിഭുജക്ഷേത്രവർഗ്ഗം സൂക്ഷ്മമത്രേ എന്നു വന്നൂ.

16. സംപാതശരാനയനം

പിന്നെ ഇതിനോടു തുല്യന്യായമായിട്ടിരിപ്പോന്നു—

ഗ്രാസോനേ ദ്വേ വൃത്തേ ഗ്രാസഗുണേ ഭാജയേൽ പൃഥക്ത്വേന

ഗ്രാസോനയോഗലബ്ധൗ സംപാതശരൌ പരസ്പരതഃ//

എന്നിതു, ഇവിടെ ചെറിയൊരു വൃത്തത്തിന്റെ കുറഞ്ഞൊരു പ്രദേശം വലിയൊരു വൃത്തത്തിന്റെ അകത്തു പുക്കിരിക്കുമാറു കല്പിപ്പൂ. പിന്നെ രണ്ടിന്റേയും കേന്ദ്രത്തിങ്കൽ സ്പർശിച്ചു പുറത്ത് നേമിയോളം ചെല്ലുമാറ് ഒരു വ്യാസരേഖ കല്പിപ്പൂ. പിന്നെ രണ്ടു വൃത്തത്തിന്റേയും നേമികൾ തങ്ങളിൽ സ്പർശിക്കുന്നേടത്തു തട്ടുമാറ് ഈ വ്യാസരേഖയ്ക്ക് വിപരീതമായിട്ടിരിപ്പോരു രേഖ കല്പിപ്പൂ. ഇതു രണ്ടു വൃത്തത്തിന്നും[1] സാധാരണമായിട്ടിരിപ്പോരു ജ്യാവായിട്ടിരിക്കും. ഈ ജ്യാവും വ്യാസസൂത്രവും തങ്ങളിലുള്ള സംപാതത്തിങ്കന്നു അടുത്ത വൃത്തനേമിയോളമുള്ള വ്യാസഖണ്ഡങ്ങൾ ശരങ്ങൾ. അവിടെ ചെറിയ വൃത്തത്തിങ്കലെ ശരം വലുതായിട്ടിരിക്കും, വലിയ വൃത്തത്തിങ്കലേതു ചെറുതായിട്ടിരിക്കും. ശരോനവ്യാസങ്ങൾ പിന്നെ മറിച്ചും ചെറിയ വൃത്തത്തിങ്കൽ ചെറുതു വലിയ വൃത്തത്തിങ്കൽ വലുത്.

ഇവിടെ അതതു ശരോനവ്യാസവും ശരവും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചത് രണ്ടു വൃത്തത്തിന്നു സാധാരണമായിട്ടിരിക്കുന്ന[2] അർദ്ധജ്യാവിന്റെ വർഗ്ഗമായിട്ടിരിക്കും.

വ്യാസാച്ഛരോനാച്ഛരസംഗുണാച്ച

മൂലം ദ്വിനിഘ്നം ഭവതീഹ ജീവാ | (ലീലാവതീ, 204)

എന്നുണ്ടാകയാൽ. എന്നാൽ വലിയ ശരോനവ്യാസത്തേക്കാൾ എത്ര ചെറുത് ചെറിയ ശരോനവ്യാസം ചെറിയ വൃത്തത്തിങ്കലെ ശരത്തേക്കാൾ അത്ര ചെറുത് വലിയ വൃത്തത്തിങ്കലെ ശരം എന്നിരിക്കും,ഘാതം സമമാകയാൽ. യാതൊരു പ്രകാരം ത്ര്യശ്രക്ഷേത്രത്തിങ്കലെ ഭുജായോഗവും

16\. 1. B. C. കൂടിയ; F. കൂടി
2. F. ഇരിപ്പൊന്ന്

ആബാധായോഗവും എന്നപോലെ ഇരിക്കുന്ന ആബാധാന്തരവും ഭുജാന്തരവും,എന്നിട്ടു തുല്യന്യായമാകുന്നൂ. ഇവിടെ ശരയോഗത്തെ 'ഗ്രാസം' എന്നു ചൊല്ലുന്നൂ. ഗ്രാസോനവ്യാസങ്ങൾ തങ്ങളിലും ഇങ്ങനെ സംബന്ധം. യാതൊരുപ്രകാരം ശരോനവ്യാസങ്ങൾ തങ്ങളിൽ. ഇവിടെ വലിയ ശരോനവ്യാസത്തിങ്കന്നു വലിയ ശരവും ചെറിയ ശരോനവ്യാസത്തിങ്കന്നു ചെറിയ ശരവും പോയ ശേഷം ഗ്രാസോനവ്യാസങ്ങളാകുന്നവ. എന്നിട്ടു ശരോനവ്യാസങ്ങളെപ്പൊലെ ഇരിപ്പോ ചില ഗ്രാസോനവ്യാസങ്ങളും. ഇവിടെ ശരങ്ങളെ വെവ്വേറെ അറിഞ്ഞീലാ എന്നിരിക്കുമ്പോൾ ഗ്രാസോനവ്യാസങ്ങൾ പ്രമാണഫലങ്ങളായി, ഗ്രാസോനവ്യാസയോഗം പ്രമാണമായി ഗ്രാസമിച്ഛയായിട്ടുണ്ടാകും ശരങ്ങൾ. മറ്റെ ഗ്രാസോനവ്യാസത്തിങ്കന്നു തന്റെ ശരമുണ്ടാം, തന്റേതിങ്കന്നു മറ്റെ ശരവും ഉണ്ടാകും[3]. ഇങ്ങനെ ഗ്രാസത്തിങ്കന്നു ശരവിഭാഗത്തെ അറിയും പ്രകാരം.

17. ഛായാനയനം

ഇതിനോടു തുല്യന്യായമായിട്ടിരുന്നൊന്ന്—

ഛായയോഃ കർണ്ണയോരന്തരേ യേ തയോർ-

വ്വർഗ്ഗവിശ്ലേഷഭക്താ രസാദ്രീഷവഃ/

സൈകലബ്ധേഃ പദഘ്നം തു കർണ്ണാന്തരം

ഭാന്തരേണോനയുക്തം ദളേ സ്തഃ പ്രഭേ// (ലീലാവതീ, 232)

എന്നിതും. ഇവിടെ സമനിലത്തു ദ്വാദശാംഗുലശങ്കുവിനേക്കാൾ ഇയർന്നൊരു വിളക്കു വെച്ചു പിന്നെ ഇവിടുന്ന് ഒട്ട് അകലത്തു പന്ത്രണ്ടംഗുലം നീളമുള്ളൊരു ശങ്കുവിനെ വെച്ച്[1] പിന്നെ ഇശ്ശങ്കുവിങ്കന്നും ഒട്ട് അകലത്തു ഇത്രതന്നെ നീളമുള്ളൊരു ശങ്കുവിനെ വെച്ചാൽ വിളക്കിന്റെ അണയത്തെ ശങ്കുവിന്ന് ഛായ ചെറുതായിട്ടിരിക്കും, അകലത്തേതിന്നു വലുതായിട്ടിരിക്കും. ഇവിടെ ഛായാഗ്രത്തിങ്കന്നു ശങ്കുവിന്റെ മീത്തെ

16.3. C. D. om. ഉണ്ടാകും
17.1. B. വെച്ചാൽ

തലയ്ക്കലോളമുള്ള അന്തരാളം ഛായാകർണ്ണമാകുന്നത്. ഛായ വലിയതിന്ന് ഛായാകർണ്ണം വലുത്, ശങ്കു തുല്യമാകയാൽ.

പിന്നെ ഈ രണ്ടു ഛായകളുടേയും[2] യോഗത്തെ ഭൂമി എന്നും ഛായാകർണ്ണങ്ങളെ ബാഹുക്കളെന്നും ശങ്കുവിനെ ലംബമെന്നും കല്പിച്ചു പിന്നെ ഛായാന്തരമാകുന്നത് ആബാധാന്തരമെന്നും, കർണ്ണാന്തരമാകുന്നതു ഭുജാന്തരമെന്നും, ഇവ രണ്ടിന്റേയും വർഗ്ഗാന്തരത്തെ പ്രമാണമെന്നും, ഛായായോഗവും കർണ്ണയോഗവും ഉള്ള വർഗ്ഗാന്തരത്തെ പ്രമാണഫലമെന്നും, കർണ്ണാന്തരവർഗ്ഗത്തെ ഇച്ഛാ എന്നും കല്പിച്ച് ത്രൈരാശികം ചെയ്താൽ ഛായായോഗവർഗ്ഗം ഇച്ഛാഫലമായിട്ടുണ്ടാകും. ഇവിടെ പ്രമാണത്തെക്കൊണ്ടു പ്രമാണഫലത്തെ ഹരിച്ച് മൂലിച്ച് ഗുണിക്കുന്നതാകിൽ കർണ്ണാന്തരത്തെതന്നെ ഗുണിക്കേണ്ടൂ. എന്നാൽ ഛായായോഗമുണ്ടാകും. ഇവ്വണ്ണമിവിടെ ഉണ്ടാക്കുന്നു[3]. യോഗവർഗ്ഗമാകുന്നതു[4] പിന്നെ ശങ്കുവർഗ്ഗത്തെ നാലിൽ ഗുണിച്ചതിങ്കൽ അന്തരവർഗ്ഗാന്തരം കൂട്ടി ഇരിക്കുന്നത്. ഇവിടെ ഹാർയ്യത്തിൽ ഹാരകം കൂട്ടേണ്ടുകയാൽ ഹരിച്ചുണ്ടായ ഫലത്തിൽ ഒന്നു കൂട്ടിയാലും ഫലസാമ്യം വരും. എന്നിട്ടു കേവലം ചതുർഗ്ഗുണശങ്കുവർഗ്ഗത്തെ ഹരിക്കുന്നൂ. ഇത്രൈരാശികന്യായം മുമ്പിൽ ചൊല്ലിയ പ്രകാരംകൊണ്ടു സിദ്ധിക്കും. ഇങ്ങനെ ഇതിന്നു ക്ഷേത്രഫലവർഗ്ഗന്യായത്തിനോടു സാമ്യം.

18. ഗോളപൃഷ്ഠക്ഷേത്രഫലാനയനം

അനന്തരം പിന്നെ[1] പിണ്ഡജ്യായോഗത്തിങ്കന്നു ഖണ്ഡാന്തരയോഗം ഉണ്ടാകും എന്നിതും[2], വൃത്തവ്യാസങ്ങളെ ഒരിടത്തു അറിഞ്ഞാൽ ഇഷ്ടത്തിങ്കലേയ്ക്കു ത്രൈരാശികം ചെയ്യാം എന്നിച്ചൊല്ലിയ രണ്ടു ന്യായവും കൂടിയാൽ ഗോളപൃഷ്ഠത്തിങ്കലെ ചതുരശ്രക്ഷേത്രഫലം ഉണ്ടാകും എന്നതിനെ ചൊല്ലുന്നൂ.

അവിടെ നേരെ[3] ഉരുണ്ടിരിക്കുന്ന വസ്തുവിന്നു 'ഗോളം' എന്നു പേർ.

---

17. 2. B.C. D കർണ്ണങ്ങളെ ബാഹുക്കൾ എന്നും ശംകുവിനെ ലംബം എന്നും
 3. B. ഉണ്ടാകുന്നു
 4. F. യോഗവർഗ്ഗാന്തര

18. 1. B.C.D.F. om. പിന്നെ
 2. B.C.F. om. എന്നിതും to ഉണ്ടാകും,

ഇങ്ങനെ ഇരിന്നോരു ഗോളത്തിന്റെ നേരെ നടുവേ സമപൂർവ്വാപരമായിട്ടും ദക്ഷിണോത്തരമായിട്ടും ഓരോ വൃത്തത്തെ കല്പിപ്പൂ. പിന്നെ ഇസ്സമപൂർവ്വാപരത്തിങ്കന്നു കുറഞ്ഞൊന്നു തെക്കും വടക്കും നീങ്ങീട്ടു ഓരോ വൃത്തത്തെ കല്പിപ്പൂ. ഇവറ്റിന്നു സമപൂർവ്വാപരത്തിങ്കന്നുള്ള അകലം എല്ലാ അവയവത്തിങ്കന്നും തുല്യമായിരിക്കേണം[4]. ആകയാൽ ഇവ രണ്ടും നടേത്തേതിനേക്കാൾ കുറഞ്ഞൊന്നു ചെറുതായിട്ടിരിക്കും[5]. പിന്നേയും ഇച്ചൊല്ലിയവണ്ണം തന്നെ ഇവറ്റിങ്കന്നും[6] തുടങ്ങി കുറഞ്ഞൊന്നു ചെറുതായി ചെറുതായി നാനാപ്രമാണങ്ങളായി, പഴുത്[7] എല്ലാറ്റിനും അന്യോന്യം അകലം ഒത്ത്, തെക്കേയും വടക്കേയും പാർശ്വത്തിങ്കൽ ഒടുങ്ങുമാറു ചില വൃത്തങ്ങളെ കല്പിപ്പൂ. ഇവറ്റിന്റെ അകലം ദക്ഷിണോത്തരവൃത്തത്തിങ്കൽ തുല്യമായിട്ടു കാണായിരിക്കേണം. ഇവ്വണ്ണമിരിക്കുന്നേടത്തു രണ്ടു വൃത്തങ്ങളുടെ പഴുതു വൃത്താകാരേണ ഇരിക്കുന്നതിനെ ഒരിടത്തു മുറിച്ച് ചുറ്റു അഴിച്ചു നിവർത്തുമാറു കല്പിപ്പൂ. അപ്പോൾ ഈ പഴുതിന്റെ ഇരുപുറവും ഉള്ള വൃത്തങ്ങളിൽ വലിയ വൃത്തം ഭൂമി, ചെറിയ വൃത്തം മുഖം, പിന്നെ ദക്ഷിണോത്തരവൃത്തത്തിങ്കലെ വൃത്താന്തരാളമായിട്ടിരിക്കുന്ന ചാപഖണ്ഡം പാർശ്വഭുജയായി[8], സമലംബമായി ഇരിപ്പോരു ചതുരശ്രമായിട്ടിരിക്കും. പിന്നെ ഒരു പാർശ്വത്തിങ്കലെ ലംബത്തിങ്കന്നു പുറവാ മുറിച്ചു മറ്റെ പാർശ്വത്തിങ്കൽ മേൽ കീഴു പകർന്നു കൂട്ടൂ. അപ്പോൾ മുഖഭൂയോഗാർദ്ധം നീളമായി ലംബമിടയായി, ഇരിപ്പോരു ആയതചതുരശ്രമായിട്ടിരിക്കും. പിന്നെ ഈവണ്ണമെല്ലാ അന്തരാളങ്ങളേയും ആയതചതുരശ്രങ്ങളായിട്ടു കല്പിപ്പൂ. അപ്പോൾ ഇടമെല്ലാറ്റിന്നും തുല്യമായിട്ടിരിക്കും. നീളം നാനാപ്രമാണങ്ങളായിട്ടിരിക്കും. ഇവിടെ നീളവുമിടവും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതു ക്ഷേത്രഫലം. അവിടെ വിസ്താരമെല്ലാറ്റിന്നും തുല്യമാകയാൽ നീളമെല്ലാറ്റിന്റേയും[9] കൂട്ടി വിസ്താരംകൊണ്ടു ഗുണിപ്പൂ. എന്നാൽ ഗോളപൃഷ്ഠഫലം വരും.

---

18. 3. B.C.F നേരെ
4. F. ആയിട്ടിരിക്കണം
5. B. ആയിരിക്കും
6. F. ഇവേങ്കന്നും
7. C.D.F പഴുതുകൾ
8. D.F ഭുജയായി
9. D. എല്ലാറ്റിന്റേതും

ഇവിടെ അന്തരാളങ്ങൾ എത്ര ഉള്ളൂ എന്നും ഇവറ്റിന്റെ ആയാമവിസ്താരങ്ങൾ എത്ര എന്നുമറിവാൻ എന്തു ഉപായം എന്നു പിന്നെ. ഇവിടെ[10] ഇഗ്ഗോളവ്യാസാർദ്ധവൃത്തത്തിങ്കലെ അർദ്ധജ്യാക്കളായിട്ടിരിക്കും[11] ഇക്കല്പിച്ച വൃത്തങ്ങളുടെ വ്യാസാർദ്ധങ്ങൾ. ആകയാൽ ഈ ജ്യാക്കളെ ഗോളപരിധിയെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ഗോളവ്യാസാർദ്ധത്തെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ അതതു ജ്യാവു വ്യാസാർദ്ധമായിരിക്കുന്ന വൃത്തങ്ങളുണ്ടാം[12]. ഇവ ദീർഘചതുരശ്രങ്ങളുടെ[13] നീളമായിട്ടിരിക്കും, അന്തരാളമദ്ധ്യത്തിങ്കലെ ജ്യാക്കളെ കല്പിച്ചുകൊണ്ടാൽ. പിന്നെ ഈ അർദ്ധജ്യായോഗത്തെ ഗുണിക്കിൽ എല്ലാ ക്ഷേത്രായാമങ്ങളുടേയും യോഗമുണ്ടാകും[14]. ഇതിനെ വിസ്താരം കൊണ്ടു ഗുണിപ്പൂ. അപ്പോൾ ക്ഷേത്രഫലയോഗമുണ്ടാകും. മുമ്പിൽ[15] ചൊല്ലിയ ദക്ഷിണോത്തരവൃത്തത്തിങ്കലെ വൃത്താന്തരാളഭാഗങ്ങൾ യാവ ചിലവ അവ ഗോളപരിധിയിങ്കലെ ചാപഖണ്ഡമായിട്ടിരിക്കും. ഇതിന്റെ ജ്യാവ് ഇവിടെ ക്ഷേത്രവിസ്താരമാകുന്നത്.

പിന്നെ ജ്യായോഗത്തെ വരുത്തും പ്രകാരം. അവിടെ ഖണ്ഡാന്തരയോഗത്തെക്കൊണ്ടു ഗോളവ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗത്തെ ഗുണിച്ച് ചാപഖണ്ഡസമസ്തജ്യാവർഗ്ഗം കൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ. ഫലം അർദ്ധജ്യായോഗം. പിന്നെ ഇതിനെ ക്ഷേത്രവിസ്താരംകൊണ്ടു ഗുണിക്കേണം. വിസ്താരമാകുന്നത് ചാപഖണ്ഡത്തിന്റെ ജ്യാവ്. ഖണ്ഡാന്തരയോഗമാകുന്നത് ആദ്യഖണ്ഡജ്യാവ്. ഇവറ്റിന്നു മിക്കവാറും അല്പത്വം കൊണ്ടു സമസ്തജ്യാതുല്യങ്ങളായിട്ടിരിക്കും. ഇവ രണ്ടും ഗുണകാരങ്ങൾ, സമസ്തജ്യാവർഗ്ഗം ഹാരകം. എന്നാൽ ഗുണനവും ഹരണവും വേണ്ടാ. വ്യാസാർദ്ധവർഗ്ഗം തന്നെ ശേഷിപ്പൂ. പിന്നെ പരിധിയെക്കൊണ്ടു[16] ഗുണിച്ചാൽ വ്യാസാർദ്ധംകൊണ്ടു ഹരിക്കേണം. അപ്പോൾ വ്യാസാർദ്ധം തന്നെ ശേഷിക്കും. പിന്നെ ഗോളത്തിന്റെ രണ്ട് അർദ്ധത്തിങ്കലെ ഫലവും ഉണ്ടാക്കേണ്ടുകയാൽ വ്യാസാർദ്ധത്തെ ഇരട്ടിക്കേണം. ആകയാൽ ഗോളവ്യാസത്തെ ഗോളപരിധിയെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ ഗോളപൃഷ്ഠത്തിങ്കലെ ചതുരശ്രഫലമുണ്ടാകും[17].

18. 10. B. F. അവിടെ
11. B. വ്യാസാർദ്ധത്തെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ വൃത്തത്തിങ്കലെ അർദ്ധജ്യാക്കളായിരിക്കും
12. F. ഉണ്ടാകും
13. B.C.D.F. ചതുരശ്രക്ഷേത്രഫലങ്ങളുടെ നീളമായിട്ടിരിക്കും
14. B.F. ക്ഷേത്രഫലയോഗമുണ്ടാകും
15. F. മുമ്പ്
16. F. പരിധികൊണ്ട്
17. B.C.D.F.സമചതുരശ്രക്ഷേത്രഫലമുണ്ടാകും

19. ഗോളഘനക്ഷേത്രഫലം

അനന്തരം ഗോളത്തിങ്കലെ[1] അന്തർഭാഗത്തിങ്കലെ[2] ഘനക്ഷേത്രഫലത്തെ ചൊല്ലുന്നൂ. ഇവിടെ[3] ഗോളപൃഷ്ഠഫലത്തെ[4] അറിവാനായിക്കൊണ്ടു കല്പിപ്പാൻ ചൊല്ലിയ വൃത്തമാർഗ്ഗേണ മുറിപ്പൂ. അപ്പോൾ നേരെ പരന്നു[5] വൃത്തങ്ങളായിരിപ്പോ ചിലവ ഖണ്ഡങ്ങളായിട്ടിരിക്കും. അവിടെ[6] പൃഷ്ഠഫലത്തിങ്കൽ പൂർവ്വാപരങ്ങളായിട്ടു വൃത്തങ്ങളെ കല്പിക്കുന്നൂ എങ്കിൽ ദക്ഷിണോത്തരവൃത്തത്തിങ്കലെ പരിധിഖണ്ഡത്തിന്റെ നീളമൊത്തിരിക്കേണം എന്നു നിയതമാകുന്നത്. ഇവിടെ പിന്നെ എല്ലാ മുറികളും മുഴുപ്പ് ഒത്തിരിക്കേണമെന്നു നിയതമാകുന്നത്. പിന്നെ എല്ലാ വൃത്തത്തിങ്കലേയും വർഗ്ഗക്ഷേത്രഫലമുണ്ടാക്കി[7] ഓരോ മാനം മുഴുപ്പൂ എന്നു കല്പിച്ചു തങ്ങളിൽ കൂട്ടിയാൽ ഗോളത്തിന്റെ ഘനമുണ്ടാകും[8]

19. i. വൃത്തക്ഷേത്രഫലാനയനം

വൃത്തക്ഷേത്രത്തിങ്കലെ വർഗ്ഗഫലത്തെ ഉണ്ടാക്കുംപ്രകാരം പിന്നെ. വൃത്തക്ഷേത്രത്തെ വ്യാസമാർഗ്ഗേണ രണ്ടു പെളിപ്പൂ[9] സമമായിട്ട്. പിന്നെ രണ്ടു പെളിയിങ്കലും[10] കേന്ദ്രത്തിങ്കന്നു തുടങ്ങി നേമിയിങ്കലോളം കീറൂ; നേമിയിങ്കലേടം എല്ലാറ്റിലും പരന്ന്, കേന്ദ്രത്തിങ്കലേടം കൂർത്ത് ഇങ്ങനെ ഇരിക്കും. പിന്നെ രണ്ടു വൃത്തഖണ്ഡങ്ങളേയും നേമീടെ രണ്ടു തലയും പിടിച്ചു[11] നിവർത്തി തങ്ങളിൽ കൂട്ടൂ, കേന്ദ്രത്തിലെ[12] കൂർത്ത പ്രദേശം മറ്റേതിങ്കലെ പഴുതിൽ ചെല്ലുമാറ്. അപ്പോൾ വൃത്താർദ്ധം നീളമായി വ്യാസാർദ്ധം ഇടയായി ഇരിപ്പോരു ആയതചതുരശ്രക്ഷേത്രം ഉണ്ടാകും. എന്നാൽ വൃത്താർദ്ധവും വ്യാസാർദ്ധവും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചാൽ വൃത്തക്ഷേത്രത്തിങ്കലെ ചതുരശ്രഫലം ഉണ്ടാകും.

---

19. 1. C.D ഗോളത്തിന്റെ
2. B.ഗോളാന്തർഭാഗത്തിങ്കലെ ഫലം ചൊല്ലുന്ന
3. B. അവിടെ
4. F. ഫലം
5. B.F. പരന്ന
6. C.D.ഇവിടെ
7. D. F. ഫലത്തെയുണ്ടാക്കി
8. D. ഗോളത്തിങ്കലെ ഘനഫലമുണ്ടാകാം
9. F. പൊളിപ്പൂ
10. F. പൊളിയെങ്കിലും
11. D. പിമ്പെ
12. C. F കേന്ദ്രത്തിങ്കലെ

19. ii. ഗോളക്ഷേത്രഫലാനയനം

എന്നാൽ അതതു അർദ്ധജ്യാവർഗ്ഗത്തെ[13] ഗോളപരിധി കൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ഗോളവ്യാസംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ അതതു ക്ഷേത്രഫലമുണ്ടാകും. പിന്നെ ഇവറ്റിന്റെ യോഗം ഗോളക്ഷേത്രഘനഫലമായിട്ടിരിക്കും[14].

അർദ്ധജ്യാവർഗ്ഗങ്ങളെ ഉണ്ടാക്കുംപ്രകാരം. അവിടെ ശരവും ശരോനവ്യാസവും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചാൽ അർദ്ധജ്യാവർഗ്ഗമായിട്ടിരിക്കും, കോടികർണ്ണയോഗം ശരോനവ്യാസം, അന്തരം ശരം, എന്നിട്ട്. അവിടെ ശരത്തേയും ശരോനവ്യാസത്തേയും വർഗ്ഗിച്ചു കൂട്ടി വ്യാസവർഗ്ഗത്തിങ്കന്നു കളഞ്ഞാൽ അതിനെ അർദ്ധിച്ചതും അർദ്ധജ്യാവർഗ്ഗമായിട്ടിരിക്കും, യോഗവർഗ്ഗവും വർഗ്ഗയോഗവും തങ്ങളിലന്തരം ദ്വിഗുണഘാതമായിട്ടിരിക്കും,

എന്നിട്ട് അവിടെ വൃത്തക്ഷേത്രങ്ങൾ പെരികെ കുറഞ്ഞ് അണുപ്രായമാത്രം[15] മുഴുപ്പായിട്ട് ഈ[16] വൃത്തങ്ങളെ[17] കല്പിക്കേണ്ടൂ. അവിടെ ഒരണുവായിട്ടിരിപ്പൊന്ന് നടേത്തെ ശരം. ഈ ശരത്തിൽ ഓരോരോ അണുക്കൾ ഏറ[18]ക്കൂടിയതു പിന്നെ പിന്നത്തെ ശരമാകുന്നത്. എന്നാലണുക്കളുടെ ഏകാദ്യേകോത്തരസംകലിതങ്ങൾ പ്രഥമദ്വിതീയാദി ശരങ്ങളാകുന്നത്. ആകയാൽ ഏകാദ്യേകോത്തരവർഗ്ഗസംകലിതം ശരവർഗ്ഗയോഗമാകുന്നത്. വ്യാസം [19]ഗച്ഛമായിട്ടിരിപ്പോരു രാശി ഇത്. വ്യാസത്തെ അണുവായി ഖണ്ഡിച്ചിട്ടു വർഗ്ഗസംകലിതം ചെയ്യുന്നൂ. ഇതിനെ ഇരട്ടിച്ചതു ശരവർഗ്ഗയോഗവും ശരോനവ്യാസവർഗ്ഗയോഗവും കൂടിയതായിട്ടിരിക്കും. ഇവിടെ ഒന്നു തുടങ്ങി വ്യാസാർദ്ധതുല്യമാവോളം കുറഞ്ഞതു ശരം, വ്യാസാർദ്ധത്തിങ്കലേറിയതു ശരോനവ്യാസം. പിന്നെ ഏറിയതു ശരം, കുറഞ്ഞതു ശരോനവ്യാസം എന്നു[20] കല്പിക്കുമ്പോൾ ശരവർഗ്ഗയോഗവും ശരോനവ്യാസവർഗ്ഗയോഗവും തുല്യമായിട്ടിരിക്കും. എന്നിട്ട് ഏകാദ്യേകോത്തരസംകലിതത്തെ ഇരട്ടിപ്പാൻ ചൊല്ലീ.

രണ്ടും തന്നെ ശരമത്രേ; വലിയ ശരം ഒന്ന്, ചെറിയ ശരം ഒന്ന്, രണ്ടിന്നും കൂടി[21] ജ്യാവ് ഒന്ന്[22] എന്നിങ്ങനെ കല്പിക്കിലുമാം. അവിടേ ശരവും ശരോനവ്യാസവും തങ്ങളിൽ ഗുണിച്ചതു അർദ്ധജ്യാവർഗ്ഗമാകുന്നത്

---

19. 13. D. എന്നാൽ ജ്യായോഗത്തെ അതതു ജ്യാവർഗ്ഗത്തെ
14. D. F. add അവിടെ
15. B.C.D.F അണുമാത്രം
16. B.C.D.F om. ഈ
17. F. വൃത്തക്ഷേത്രങ്ങളെ
18. E.F.om. ഏറ
19. F. ശര; For ഗച്ഛ
20. C. D എന്നിങ്ങനെ
21. F. കൂടീട്ട്
22. B. ഒന്നാകുന്നു

വൃത്തേ ശരസംവര്ഗ്ഗോര്ദ്ധജ്യാവര്ഗ്ഗഃ സ ഖലു ധനുഷോഃ/

(ആര്യഭടീയം ഗണിതപാദം 17)

എന്നുണ്ട്.

പിന്നെ ശരവര്ഗ്ഗവും ശരോനവ്യാസവര്ഗ്ഗവും കൂടി വ്യാസവര്ഗ്ഗത്തിങ്കന്നു പോയശേഷത്തിന്റെ അര്ദ്ധവും അര്ദ്ധജ്യാവര്ഗ്ഗ മായിട്ടിരിക്കും, വര്ഗ്ഗയോഗവും യോഗവര്ഗ്ഗവും തങ്ങളില് അന്തരം ദ്വിഗുണഘാതം എന്നിട്ട്. ഇവ്വണ്ണമാകുമ്പോള് എത്ര അര്ദ്ധജ്യാവര്ഗ്ഗത്തെ ഉണ്ടാക്കേണം, അത്രയില് ഗുണിക്കേണം വ്യാസവര്ഗ്ഗത്തെ. ആകയാല് അണുച്ഛേദംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചിരിക്കുന്ന വ്യാസത്തിന്റെ ഘനമായിട്ടിരിക്കുമത്. അവിടെ അണുച്ഛേദംകൊണ്ട് പിന്നെ ഹരിക്കേണ്ടുകയാല് കേവലം വ്യാസഘനമായിട്ടേ ഇരിക്കു ഇത്[23]. പിന്നെ[24] അതിങ്കന്നു[25] വര്ഗ്ഗ സംകലിതത്തെ ഇരട്ടിച്ച് അതിനെ കളയേണം. വര്ഗ്ഗസംകലിതമാകുന്നതു ഘനത്ര്യംശം. ഇതിനെ ഇരട്ടിച്ചു കളയേണ്ടുകയാല് ശിഷ്ടം ഘനത്ര്യംശം. പിന്നെ ഇതിനെ അര്ദ്ധിക്കേണ്ടുകയാല് ഘനഷഷ്ഠാംശം. ആകയാല് വ്യാസത്തെ ഘനിച്ച് ആറില് ഹരിച്ചതു ഗോളത്തിങ്കലെ നിരന്തരം ഉള്ള അര്ദ്ധജ്യാക്കളുടെ വര്ഗ്ഗയോഗമായിട്ടിരിക്കും. പിന്നെ ഇതിനെ പരിധികൊണ്ടു ഗുണിച്ചു വ്യാസം കൊണ്ടു ഹരിക്കേണം. ആകയാല് വ്യാസത്തെ നടേ തന്നെ ഘനിക്കേണ്ടാ, വര്ഗ്ഗിക്കേ വേണ്ടൂ, പിന്നെ ഹരിക്കേണ്ടുകയാല്. എന്നാല് വ്യാസവര്ഗ്ഗത്തെ ഗോളപരിധിയെക്കൊണ്ടു[26] ഗുണിച്ച് ആറില് ഹരിച്ച ഫലം ഗോളത്തിങ്കലെ ഘനഫലമായിട്ടിരിക്കും. ഇങ്ങനെ ജ്യാവര്ഗ്ഗസംകലിതപ്രസംഗാല് ശരവര്ഗ്ഗസംയോഗദ്വാരാ ഉണ്ടാകുന്ന ഘനഗോളഫലത്തെ ചൊല്ലി, പൃഷ്ഠഫലത്തേയും.[27]

[ഗണിതയുക്തിഭാഷയില് ജ്യാനയനമെന്ന ഏഴാമദ്ധ്യായം സമാപ്തം]

---

19. 23. F. ഇരിക്കുമത്
24. D. adds അതില് ഗുണിക്കേണം വ്യാസവര്ഗ്ഗത്തെ ആകയാല്
25. F. ഇതിങ്കന്നു
26. F. പരിധികൊണ്ടു
27. C. add യുക്തിഭാഷാ പൂര്വ്വാദ്ധം സമാപ്തം

cover 3.psd

Gaṇita-yukti-bhāṣā (Rationales in Mathematical Astronomy) of Jyeṣṭhadeva (c.1530) is a seminal text of the Kerala School of Astronomy. It is composed in the Malayalam language and presents detailed *yuktis* or explanations and demonstrations for the results and processes of Mathematical Astronomy. The text comprising fifteen chapters is naturally divided into two parts, Mathematics and Astronomy, and purports to give an exposition of the techniques and theories employed in the computation of planetary motions as set forth in the great treatise *Tantrasaṅgraha* (c.1500) of Nīlakaṇṭha Somayājī. Even though the importance of *Gaṇita-yukti-bhāṣā* was brought to the notice of modern scholarship by C.M. Whish in 1830s, a critical edition of the entire Malayalam text is being brought out for the first time along with an English translation and detailed explanatory notes.

The Mathematics part is divided into seven chapters and the topics covered are *Parikarma* (logistics), *Daśapraśna* (ten problems), *Bhinnagaṇita* (fractions), *Trairāśika* (rule of three), *Kuṭṭākāra* (linear indeterminate equations), *Paridhi* and *Vyāsa* (infinite series and approximations for the ratio of the circumference and diameter of a circle) and *Jyānayana* (infinite series and approximations for sines). A distinguishing feature of the work is that it presents detailed demonstrations of the famous results attributed to Mādhava (c.1340-1420), such as the infinite series for π, the arc-tangent and the sine functions, the estimation of correction terms and their use in the generation of faster convergent series. Demonstrations are also presented for some of the classical results of Āryabhaṭa (c.499) on *Kuṭṭākāra* or the process of solution of linear indeterminate equations, of Brahmagupta (c.628) on the diagonals and the area of a cyclic quadrilateral and of Bhāskara (c.1150) on the surface area and volume of a sphere.

The work should be of interest to the historians of Mathematics and Astronomy and to philosophers of Science.

HINDUSTAN BOOK AGENCY
www.hindbook.com

ISBN 81-85931-83-6
9 788185 931838