Übungen zur Algebraischen Geometrie (SoSe 2001)

Blatt 2

Aufgabe 3 (2 Punkte) Es sei $\mathfrak{a} \subset (x_0, \dots, x_n)$ ein homogenes Ideal des Polynomrings $R = K[x_0, \dots, x_n]$. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{a}^{sat}$ das kleinste saturierte homogene Ideal von R ist, das $\mathfrak{a}$ enthält.

Aufgabe 4 (6 Punkte) Es seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ Ideale eines Ringes R.
(a) Zeigen Sie: $\operatorname{Rad}(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \operatorname{Rad}(\mathfrak{a} + \mathfrak{c}) \cap \operatorname{Rad}(\mathfrak{b} + \mathfrak{c})$.
(b) Gilt immer $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} + \mathfrak{c} = (\mathfrak{a} + \mathfrak{c}) \cap (\mathfrak{b} + \mathfrak{c})$?
(c) Zeigen Sie, dass die Behauptung in (b) richtig ist, falls $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ monomiale Ideale eines Polynomrings sind.

Aufgabe 5 (4 Punkte) Im Ring $K[X_0, \dots, X_6]$ berechne man die Primärzerlegung folgender Ideale:
$I = (X_0X_2, X_1X_2, X_1X_3)$
$J = (X_0X_1X_4, X_0X_2X_3, X_0X_3X_6, X_1X_2X_3, X_1X_2X_4, X_5^3)$.

Aufgabe 6 (4 Punkte) Es sei L/K eine Körpererweiterung, und es seien $R = K[x_0, \dots, x_n]$, $S = L[x_0, \dots, x_n]$. Man zeige für jedes homogene Ideal $\mathfrak{a}$ von R, dass die Hilbertfunktionen von $R/\mathfrak{a}$ und $S/\mathfrak{a}S$ übereinstimmen.

Abgabe: Freitag, 4.5.2001, 11.00 Uhr im grünen Kasten 129 auf der Ebene D1.

Wichtig: Bitte Name, Vorname und Matrikelnummer angeben!