Übungen zur Algebraischen Geometrie (SoSe 2001)

Blatt 5

Aufgabe 12 (4 Punkte) Man bestimme (bis auf Isomorphie) alle Ringe R, für die es einen surjektiven Ringhomomorphismus $\mathbb{R}[x]/(x-1)(x-2) \to R$ gibt.

Aufgabe 13 (4 Punkte) Es sei $\varphi : M \to N$ ein Homomorphismus von R-Moduln. Zeigen Sie:
(a) It φ injektiv, so gilt $\operatorname{Ann}_R M \supset \operatorname{Ann}_R N$.
(b) Ist φ surjektiv, so gilt $\operatorname{Ann}_R M \subset \operatorname{Ann}_R N$.

Aufgabe 14 (4 Punkte) Es seien M und N R-Moduln. Beweisen Sie:
(a) Sind M und N isomorph, so ist $\operatorname{Ann}_R M = \operatorname{Ann}_R N$.
(b) Es ist $\operatorname{Ann}_R(M \oplus N) = \operatorname{Ann}_R M \cap \operatorname{Ann}_R N$.

Aufgabe 15 (4 Punkte)
(a) Es seien M, N Moduln über dem Ring R, und es sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal von R. Man zeige, daß es einen Isomorphismus von R-Moduln gibt

$$(M \oplus N)/\mathfrak{a}(M \oplus N) \cong M/\mathfrak{a}M \oplus N/\mathfrak{a}N.$$

(b) Man zeige, daß der Rang eines endlich erzeugten, freien Moduls eindeutig bestimmt ist, d.h., gilt für einen Ring R und $m, n \in \mathbb{N}$, daß $R^m \cong R^n$, so folgt $m = n$.
(Hinweis: Man verwende (a) und wähle $\mathfrak{a}$ dabei als ein maximales Ideal.)

Abgabe: Freitag, 25.5.2001, 11.00 Uhr im grünen Kasten 129 auf der Ebene D1.

Wichtig: Bitte Name, Vorname und Matrikelnummer angeben!