Übungen zur Algebraischen Geometrie (SoSe 2001)

Blatt 8

Aufgabe 23 (6 Punkte) Es sei $\varphi : M \to M'$ ein Epimorphismus endlich erzeugter R-Moduln M und M', wobei R ein noetherscher Ring sei. Man beweise:
(a) Ist N ein Untermodul von M mit $\ker \varphi \subset N$ und der reduzierten Primärzerlegung $N = Q_1 \cap \ldots \cap Q_s$, so ist $\varphi(N) = \varphi(Q_1) \cap \ldots \cap \varphi(Q_s)$ eine reduzierte Primärzerlegung von $\varphi(N)$.
(b) Ist N' ein Untermodul von M' mit der reduzierten Primärzerlegung $N' = Q'_1 \cap \ldots \cap Q'_s$, so ist $\varphi^{-1}(N') = \varphi^{-1}(Q'_1) \cap \ldots \cap \varphi^{-1}(Q'_s)$ eine reduzierte Primärzerlegung von $\varphi^{-1}(N')$.

Aufgabe 24 (3 Punkte) Es sei $A := K[x_1, \ldots, x_n]/\mathfrak{a}$. Zeigen Sie: Ist I ein Ideal von A, so gilt $\dim A/I = \dim(A/\operatorname{Rad} I)$.

Aufgabe 25 (3 Punkte) Berechnen Sie die Höhe der Ideale von $R = K[X_0, \ldots, X_3]$

$\mathfrak{a}_1 = (X_0^2, X_0X_1, X_0X_2)$

$\mathfrak{a}_2 = (X_0X_2, X_0X_3, X_1X_2, X_1X_3)$

sowie $\dim R/\mathfrak{a}_1$ und $\dim R/\mathfrak{a}_2$.

Aufgabe 22 (4 Punkte) Es sei

$$0 \to V_s \to \ldots \to V_1 \to V_0 \to 0$$

eine exakte Sequenz endlich-dimensionaler K-Vektorräume. Beweisen Sie, dass dann gilt:

$$\sum_{i=0}^{s} (-1)^i \dim_K V_i = 0.$$

Abgabe: Freitag, 15.6.2001, 11.00 Uhr im grünen Kasten 129 auf der Ebene D1.

Wichtig: Bitte Name, Vorname und Matrikelnummer angeben!