0 Wiederholungen

Der affine Fall

(1) Sei K ein Körper, $\mathfrak{a} \subseteq R := K[x_1, \dots, x_n]$. Die Nullstellenmenge
$$V(\mathfrak{a}) := \left\{ P \in \mathbb{A}^n \,\middle|\, \forall f \in \mathfrak{a} : f(P) = 0 \right\} \subseteq \mathbb{A}^n$$
heißt eine *affine Varietät*, die durch $\mathfrak{a}$ definiert wird.

(2) Sei $W \subseteq \mathbb{A}^n$. $I(W) := \left\{ f \in R \,\middle|\, \forall P \in W : f(P) = 0 \right\}$ heißt das *Ideal von* W.

(3) Es gelten:

- (i) Ist $W \subseteq \mathbb{A}^n$ eine affine Varietät, so ist $V(I(W)) = W$.
- (ii) $\mathfrak{a} \subseteq I(V(\mathfrak{a}))$.
- (iii) $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b} \Rightarrow V(\mathfrak{b}) \subseteq V(\mathfrak{a})$, $W_1 \subseteq W_2 \Rightarrow I(W_2) \subseteq I(W_1)$.
- (iv) Sind $W_1, W_2 \subseteq \mathbb{A}^n$ affine Varietäten, so ist $W_1 \cap W_2 = V(I(W_1) + I(W_2))$, $W_1 \cup W_2 = V(I(W_1) \cap I(W_2))$.
- (v) *Hilbertscher Nullstellensatz*: Ist $K = \bar{K}$, so gilt für jede affine Varietät $W \subseteq \mathbb{A}^n$, die durch $\mathfrak{a}$ definiert wird:
$$I(W) = I(V(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}}.$$

Damit erhält man die Beziehung

$$\begin{array}{ccccc}
\{\text{Untervarietäten des } \mathbb{A}^n\} & \overset{1:1}{\longleftrightarrow} & \{\text{Radikalideale von } R\} & \overset{1:1}{\longleftrightarrow} & \{\text{Faktorringe von } R \text{ ohne nilpotente Elemente}\} \\
W & \longmapsto & I(W) & & \\
V(\mathfrak{a}) & \longleftarrow & \mathfrak{a} & & \\
 & & \mathfrak{a} & \longmapsto & R/\mathfrak{a} \\
 & & \mathrm{Kern}(R \to A) & \longleftarrow & A
\end{array}$$

Ist $P = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}^n$ ein Punkt, so ist $I(P) = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$ ein maximales Ideal in R. Es gelten $\dim P = 0$ und $\dim R/I(P) = 0$.

Der projektive Fall

Sei $P = (a_0 : \dots : a_n) \in \mathbb{P}^n$, $f \in R := K[x_0, \dots, x_n]$. Sagen wir, f habe eine Nullstelle in P, so meinen wir
$$\forall \lambda \in K : f(\lambda a_0, \dots, \lambda a_n) = 0.$$
Ist K unendlich, so folgt schon, daß für jede homogene Komponente f_p gelten muß $f_p(P) = 0$.
Daraus folgt für $\emptyset \neq W \subset \mathbb{P}^n$, daß $I(W) := \left\{ f \in R \,\middle|\, \forall P \in W : f(P) = 0 \right\}$ homogen ist. Ist $K = \bar{K}$, so haben wir die Beziehung

$$\{\text{Untervarietäten des } \mathbb{P}^n\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{\text{homogene Ideale } \mathfrak{a} \subseteq (x_0, \dots, x_n) \text{ mit } \sqrt{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}.\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{\text{Graduierte Faktorringe von } R \text{ ohne nilpotente Elemente}\}$$

Sei $P = (a_0 : \dots : a_n) \in \mathbb{P}^n$ ein Punkt. Wir nehmen $a_i \neq 0$ an. Wir haben die Beziehung
$$P \longleftrightarrow I(P) = (a_i x_j - a_j x_i),\ j \in \{0, \dots, n\} \setminus \{i\},$$
$I(P)$ hat n Erzeugende. Es gelten $\dim P = 0$, $\dim R/I(P) = 1$.

Sei $Q = (1 : 0 : \dots : 0)$, $I(Q) = (x_1, \dots, x_n)$, also ist $R/I(Q) \cong K[x]$.

$\emptyset \longleftrightarrow \mathfrak{m} = (x_0, \dots, x_n)$.

Graduierte Algebren

Eine K-Algebra heißt *graduiert*, wenn A eine Zerlegung $A = \bigoplus_{j \in \mathbb{N}_0} [A]_j$ besitzt, wobei $[A]_j$ K-Vektorräume sind, $K \subseteq [A]_0$ und $[A]_i \cdot [A]_j \subseteq [A]_{i+j}$. Die Elemente in $A_j := [A]_j$ heißen die *homogenen Elemente in A* von Grad j. $[A]_j$ wird die *Komponente von Grad j in A* genannt.

Beispiele:

(1) $A = R = K[x_0, \dots, x_n]$. $[R]_j$ ist die Menge der homogenen Polynome von Grad j.

(2) Ist $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein homogenes Ideal, so ist $A = R/\mathfrak{a}$ eine graduierte K-Algebra mit der Graduierung

$$(1) \qquad [A]_j := \{ f \bmod \mathfrak{a} \mid f \in [R]_j \}.$$

(3) Umgekehrt: Ist $\mathfrak{a}$ irgendein Ideal von R, so liefert (1) eine Graduierung von $R/\mathfrak{a}$ genau dann wenn $\mathfrak{a}$ homogen ist.