1 Schemata

Wir wollen nun den Begriff einer Varietät verallgemeinern:

1.1. Beispiel. Betrachte

$$J_1 = (x(x-y)),\ J_2 = (y) \subseteq R = K[x,y]$$

und $W_1 = V(J_1),\ W_2 = V(J_2)\ \in \mathbb{A}^2$. W_2 ist die y-Achse, W_1 ist die x-Achse vereinigt mit der Winkelhalbierenden des ersten bzw. dritten Quadranten. $W_1 \cap W_2$ ist als Varietät gerade $(0,0)$, denn

$$I(W_1 \cap W_2) = \sqrt{J_1 + J_2} = \sqrt{x^2 - xy, y} = \sqrt{x^2, y} = (x,y).$$

Intuitiv sollte der Schnittpunkt doppelt gezählt werden, was in dem Ideal $(x^2,y) = J_1 + J_2$ besser beschrieben wird.

1.2. Definition. Ein *affines Unterschema* $X \subseteq \mathbb{A}^n$ ist gegeben durch einen Faktorring A von $R = K[x_1,\dots,x_n]$. Dieser Ring A heißt der *Koordinatenring* von X. Ist $A = R/\mathfrak{a}$, so heißt $\mathfrak{a}$ das *definierende Ideal* von X und man schreibt

affine Unterschemata
Koordinatenring
definierendes Ideal I_X

$$I_X = \mathfrak{a}.$$

Sind $X,Y \subseteq \mathbb{A}^n$ affine Unterschemata, so heißt X ein *Unterschema von Y*, falls $I_Y \subseteq I_X$ (Inklusionsumkehrend)

X und Y heißen *isomorph*, falls R/I_X und R/I_Y als K-Algebren isomorph sind. Isomorphie

Das *reduzierte Schema* X_{red} ist das durch $\sqrt{I_X}$ definierte Schema. (Ist K algebraisch abgeschlossen, so ist X_{red} also die Varietät $V(\sqrt{I_X})$.)

reduziertes Schema X_{red}

1.3. Bemerkung. (i) Statt Unterschema sagen wir oft nur *Schema*, obwohl obige Definition nur ein Spezialfall des allgemeinen Begriffes eines Schemas ist. Schema

(ii) Intuition: Die Punkte des Schemas X sind die Punkte der Varietät X_{red}. Deren "Vielfachheit" wird im Ideal I_X widergespiegelt.

1.4. Beispiel. (i) $\mathfrak{a}_j = (x^j, y) \subseteq K[x,y]$ definert ein Unterschema $X_j \subseteq \mathbb{A}^2$. Es ist $(X_j)_{\text{red}} = P$, wobei $P = (0,0)$. (X_j ist ein "*dicker* Punkt.")

(ii) X_{j-1} ist ein Unterschema von X_j, denn $(x^j,y) \subseteq (x^{j-1},y)$.

(iii) Ist $Y \subseteq \mathbb{A}^2$ der Punkt $(1,1)$, so sind Y und X_1 isomorph als Schemata.

1.5. Definition. (i) Sind $X,Y \subseteq \mathbb{A}^n$ affine Schemata, so ist der Durchschnitt $X \cap Y$ das durch $I_X + I_Y$ definierte Schema, und die Vereinigung $X \cup Y$ das durch $I_X \cap I_Y$ definierte Schema.

(ii) Das Schema $X \subseteq \mathbb{A}^n$ heißt *irreduzibel*, wenn gilt: Ist $X = X_1 \cup X_2$ für affine Unterschemata $X_1, X_2 \subseteq X$, so folgt $X = X_1$ oder $X = X_2$ oder $X_{\text{red}} = (X_1)_{\text{red}} = (X_2)_{\text{red}}$. Irreduzibilität

X heißt *reduziert*, falls $X = X_{\text{red}}$. reduzierte Schemata

1.6. Lemma. *Es sei $X \in \mathbb{A}^n$ ein Schema mit definierendem Ideal I_X. Dann gilt*

(a) X ist irreduzibel genau dann, wenn I_X ein Primärideal ist,

(b) X ist irreduzibel und reduziert genau dann, wenn I_X ein Primideal ist.

Beweis. (a) "$\Rightarrow$" Es sei $\text{Ass}(R/I_X) = \{\mathfrak{p}_1,\dots,\mathfrak{p}_s\}$, und es sei $I_X = \mathfrak{q}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_s$ eine Primärzerlegung mit $\sqrt{\mathfrak{q}_i} = \mathfrak{p}_i$.

Antithese: Es sei $s > 1$. Dann seien X_1, X_2 die durch $\mathfrak{q}_1$ bzw. $\mathfrak{q}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_s$ definierten Schemata. Es folgt $X = X_1 \cup X_2$, aber $X \neq X_1, X \neq X_2$. Angenommen, es wäre $X_{\text{red}} = (X_1)_{\text{red}} = (X_2)_{\text{red}}$. Dann folgte, daß $\sqrt{I_X} = \sqrt{I_{X_1}} = \mathfrak{p}_1 = \sqrt{I_{X_2}} = \mathfrak{p}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_2$, also $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_j$ für ein $j \in \{2, \ldots, s\}$, im Widerspruch zur Wahl der $\mathfrak{p}_i$.

Folglich ist X nicht irreduzibel, Widerspruch zur Voraussetzung.

"$\Leftarrow$" Sei $X = X_1 \cup X_2$. Nach Voraussetzung ist dann $\mathfrak{p} := \sqrt{I_X} = \sqrt{I_{X_1}} \cap \sqrt{I_{X_2}}$ ein Primideal. Daraus folgt O.E. $\mathfrak{p} = \sqrt{I_{X_1}}$. Fall 1: $\mathfrak{p} = \sqrt{I_{X_2}}$, d.h. $X_{\text{red}} = (X_1)_{\text{red}} = (X_2)_{\text{red}}$. Fall 2: $\mathfrak{p} \neq \sqrt{I_{X_2}} = \mathfrak{p}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_s$, also $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{p}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_s$, es folgt $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{p}_i$ für alle $i \in \{1, \ldots, s\}$.

Wegen $\mathfrak{p} = \sqrt{I_X}$ hat $I_{X_1} = \mathfrak{q} \cap \tilde{\mathfrak{q}}_1 \cap \ldots \cap \tilde{\mathfrak{q}}_t$ eine Primärzerlegung, in der $\mathfrak{q}$ die einzige isolierte Komponente ist. Folglich ist $\mathfrak{q}$ auch die einzige isolierte Komponente von $I_{X_1} \cap I_{X_2} = I_X$. Da I_X ein Primärideal ist, folgt $\mathfrak{q} = I_X$ aus der Eindeutigkeit isolierter Komponenten. Es ergibt sich $\mathfrak{q} = I_{X_1} \cap I_{X_2} \subseteq I_{X_1} \subseteq \mathfrak{q}$, also $\mathfrak{q} = I_{X_1}$, d.h. $X = X_1$.

Aus der Fallunterscheidung folgt die Irreduzibilität von X.

(b) Folgt aus (a). □

1.7. Folgerung. Jedes affine Schema ist Vereinigung endlich vieler irreduzibler Schemata.

Beweis. Folgt aus der Existenz der Primärzerlegung im Polynomring. □

Wir wollen nun die analogen Begriffe im projektiven Raum einführen. Ist $\mathfrak{m} = (x_0, \ldots, x_n) \subseteq R = K[x_0, \ldots, x_n]$, so gilt für jedes $\mathfrak{m}$-primäre Ideal $\mathfrak{q}$: $V(\mathfrak{q}) = V(\mathfrak{m}) = \emptyset$.

saturierte Schemata

1.8. Definition. Es sei $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}$ ein homogenes Ideal von R. Dann heißt $\mathfrak{a}$ *saturiert*, falls $\mathfrak{m} \notin \operatorname{Ass}(\mathfrak{a})$ gilt.

Saturierung $\mathfrak{a}_{\text{sat}}$

Das Ideal $\mathfrak{a}_{\text{sat}} := \bigcup_{j \geq 1} (\mathfrak{a} : \mathfrak{m}^j)$ heißt die *Saturierung* von $\mathfrak{a}$. $\mathfrak{a}_{\text{sat}}$ ist ein saturiertes homogenes Ideal. (Folgt aus Übungsaufgabe 2 und Lemma I.7.19.)

1.9. Beispiel. Betrachte $\mathfrak{a} = (x_0^2, x_1^2, x_0 x_1) \subseteq K[x_0, x_1, x_2]$. Es ist $\mathfrak{a} = (x_0, x_1^2) \cap (x_0^2, x_1, x_2)$ nicht saturiert, denn $\operatorname{Ass}(\mathfrak{a}) = \{(x_0, x_1), (x_0, x_1, x_2)\}$. Es ist $\mathfrak{a}_{\text{sat}} = (x_0, x_1^2)$.

Bemerkung: Ist $\mathfrak{a}$ nicht saturiert, so hat $\mathfrak{a}$ eine Primärzerlegung $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_s \cap \mathfrak{q}_T$ mit $\sqrt{\mathfrak{q}_i} \subsetneq \sqrt{\mathfrak{q}_T} = \mathfrak{m}$. Dann ist $\mathfrak{a}_{\text{sat}} = \mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_s$.

1.10. Definition. (i) Ein *projektives Unterschema* $X \subseteq \mathbb{P}^n$ ist gegeben durch einen graduierten Faktorring von $R := K[x_0, \dots, x_n]$, der einen homogenen Nichtnullteiler positiven Grades besitzt. projektive Schemata

Ist $A = R/\mathfrak{a}$, so nennt man $\mathfrak{a}$ das *homogene Ideal* von X. Schreibweise $I_X = \mathfrak{a}$. Ferner wird A als *homogener Koordinatenring* von X bezeichnet. homogenes Ideal I_X homogener Koordinatenring

(ii) Ist $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m} = (x_0, \dots, x_n)$ ein homogenes Ideal, so *definiert* $\mathfrak{a}$ *das Schema* $R/\mathfrak{a}_{\mathrm{sat}}$.

Dies ist sinnvoll nach folgendem Lemma:

1.11. Lemma. *Ist* $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}$ *ein homogenes Ideal, das nicht* $\mathfrak{m}$*-primär ist, so besitzt* $R/\mathfrak{a}$ *einen homogenen Nichtnullteiler positiven Grades genau dann, wenn* $\mathfrak{a}$ *saturiert ist.*

Beweis. "$\Rightarrow$" Es sei $f \in R$ ein Repräsentant des Nichtnullteiler von $R/\mathfrak{a}$. Dann gilt $\mathfrak{a} : f = \mathfrak{a}$, denn die Abbildung

$$\begin{aligned} \nu: \quad R/\mathfrak{a} &\longrightarrow R/\mathfrak{a} \\ r \bmod \mathfrak{a} &\longmapsto (f \cdot r) \bmod \mathfrak{a} \end{aligned}$$

ist injektiv. Es ist $\nu(r \bmod \mathfrak{a}) = 0$ genau dann, wenn $fr \in \mathfrak{a}$. Aus der Injektivität folgt aber $r \bmod \mathfrak{a} = 0$, also $r \in \mathfrak{a}$. Dies bedeutet $\mathfrak{a} : f \subseteq \mathfrak{a}$, also $\mathfrak{a} : f = \mathfrak{a}$. Wäre $\mathfrak{m} \in \mathrm{Ass}(\mathfrak{a})$, so folgte wegen $f \bmod \mathfrak{a} \in \mathfrak{m} \bmod \mathfrak{a}$, daß $f \bmod \mathfrak{a}$ ein Nullteiler von $R/\mathfrak{a}$ wäre (nach Folgerung I.7.28), Widerspruch.

"$\Leftarrow$" Es sei $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_i \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_s$ eine Primärzerlegung von $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{p}_i = \sqrt{\mathfrak{q}_i}$. Nach Voraussetzung gilt $\mathfrak{m} \subsetneq \mathfrak{p}_i$ für $i = 1 \ldots s$. Nach dem Primvermeidungslemma (IV.3.2) folgt die Existenz eines homogenen $f \in \mathfrak{m} \setminus \bigcup \mathfrak{p}_i$. Nach (I.7.28) ist $f \bmod \mathfrak{a}$ ein Nichtnullteiler von $R/\mathfrak{a}$ mit positivem Grad. □

1.12. Bemerkung. (i) Für ein homogenes Ideal $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}$ gilt: $\mathfrak{a}$ ist $\mathfrak{m}$-primär genau dann, wenn $\sqrt{\mathfrak{a}} = \mathfrak{m}$.

(ii) Aus Lemma (1.11) und Definition (1.10) folgt

{projektive Unterschemata von $\mathbb{P}^n$} $\overset{1:1}{\longleftrightarrow}$ {graduierte Fakorrringe von $K[x_0, \dots, x_n]$ mit einem homogenen Nichtnullteiler positiven Grades} $\overset{1:1}{\longleftrightarrow}$ {$K[x_0, \dots, x_n]/\mathfrak{a}$, wobei $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}$ ein homogenes saturiertes Ideal}

(iii) Ist $\mathfrak{a}$ ein homogenes, $\mathfrak{m}$-primäres Ideal, so sagen wir, daß $R/\mathfrak{a}$ die leere Menge (als Schema) definiert.

1.13. Definition. Seien $X, Y \subseteq \mathbb{P}^n$ Unterschemata. Dann ist der *Durchschnitt* definiert durch $I_X + I_Y$, also $I_{X \cap Y} = (I_X + I_Y)_{\mathrm{sat}}$. Durchschnitt

Die *Vereinigung, Irreduzibilität, Reduziertheit und Unterschemata* von X sind wie für affine Schemata definiert. Vereinigung Irreduzibilität Reduziertheit Unterschemata

X und Y heißen *isomorph*, wenn R/I_X und R/I_Y als graduierte K-Algebren isomorph sind. Isomorphie

1.14. Beispiel. $X, Y \subseteq \mathbb{P}^3$ mit $I_X = (x_0, x_1) \cap (x_2, x_3) = (x_0x_2, x_0x_3, x_1x_2, x_1x_3)$ (Paar windschiefer Geraden) und $I_Y = (x_1 + x_2)$ (Ebene). Erwartung: $X \cap Y$ besteht aus zwei Punkten.

$$I_X + I_Y = (x_0x_2, x_0x_3, x_1x_2, x_1x_3, x_1 + x_2) = (x_1, x_2, x_3) \cap (x_0, x_1, x_2) \cap \underbrace{(x_0, x_1x_2, x_1 + x_2, x_3)}_{\mathfrak{m}-\text{primär}},$$

also $(I_X + I_Y)_{\mathrm{sat}} = (x_0, x_1, x_2) \cap (x_1, x_2, x_3)$.

Hilbertfunktion h_A

1.15. Erinnerung. Es sei A eine graduierte K-Algebra, dann ist die *Hilbertfunktion* gegeben durch

$$h_A : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0, \quad h_A(j) = \dim_K [A]_j.$$

Hilbertpolynom p_A

Das *Hilbertpolynom* von A ist dasjenige Polynom $p_A \in \mathbb{Q}[T]$, so daß gilt $h_A(j) = p_A(j)$ für alle $j \gg 0$.

Ist $d = \deg p_A$, so kann man das Hilbertpolynom schreiben als

$$p_A(j) = h_0(A)\binom{j}{d} + h_1(A)\binom{j}{d-1} + \ldots + h_d(A)$$

mit $h_0(A), \ldots, h_d(A) \in \mathbb{Z}$, wobei $h_j(A) > 0$ falls $p_A \neq 0$. (Dies folgt per Induktion über d $[p_{A/lA}(j) = p_A(j) - p_A(j-1)$ für hinreichend allgemeine $l \in [A]_1])$.

Hilbertfunktion h_X

Hilbertpolynom p_X

Dimension $\dim X$

1.16. Definition. Sei $X \in \mathbb{P}^n$ ein projektives Schema mit homogenem Koordinatenring $A = R/I_X$. Dann nennt man $h_X := h_A$, $p_X := p_A$ die *Hilbertfunktion* bzw. das *Hilbertpolynom* von X und $\dim X := \dim A - 1$ die *Dimension* von X.

Ferner setzen wir

$$\deg X := \begin{cases} h_0(A) & \text{falls } p_A \neq 0, \\ \sum_{j\geq 0} h_A(j) & \text{falls } p_A = 0, \end{cases}$$

Grad $\deg X$

und nennen dies den *Grad* von X bzw. A bzw. I_X.

1.17. Beispiel. (i) Für $R = K[x_0, \ldots, x_n]$ gilt für $j \geq 0$

$$h_R(j) = \binom{n+j}{n} = \frac{(j+n)(j+n-1)\cdots(j+1)}{n!}$$
$$= \frac{j^n}{n!} + \text{kleinere Potenzen von } j,$$

also ist $\dim R = \deg p_R + 1 = n + 1$ und $\deg R = 1$.

(ii) Ist $P \in \mathbb{P}^n$ ein Punkt, so ist $A := R/I(P) \cong R/(x_1, \ldots, x_n) \cong K[x_0]$. Also folgt aus (i) $\dim A = 1$, $\dim P = 0$ und $\deg P = 1$. (Wie erwartet.)

(iii) Sei $0 \neq f \in R$ ein homogenes Polynom vom Grad d. Dann ergibt sich für $A := R/fR$: $[A]_j = [R]_j / f \cdot [R]_{j-d}$, also für $j \geq d$

$$\begin{aligned} h_A(j) &= h_R(j) - \dim_K f \cdot [R]_{j-d} = h_R(j) - h_R(j-d) \\ &= \binom{j+n}{n} - \binom{j-d+n}{n} \\ &= \frac{(j+n)\cdots(j+1) - (j-d+n)\cdots(j-d+1)}{n!} \\ &= \frac{1}{n!}\Big[j^n(1-1) + j^{n-1}\big(n + (n-1) + \ldots + 1 + (d-n) + (d-n+1) + \ldots \\ &\qquad \ldots + (d-1)\big) + \text{kleinere Potenzen von } j\Big], \end{aligned}$$

denn $\varphi : [R]_{j-d} \to f \cdot [R]_{j-d}$, $r \mapsto f \cdot r$ ist ein Isomorphismus und damit ist $\dim_K f \cdot [R]_{j-d} = \dim_K [R]_{j-d}$.

Hyperfläche

Also $h_A(j) = \frac{1}{n!} j^{n-1} \cdot n \cdot d + \ldots = d\frac{j^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots$. Folglich ist $\dim A = n$ (d.h. die Dimension von $\dim R/fR = \dim R - 1$) und $\deg A = d$. Ist $n \geq 1$, so definiert $(f) = fR$ eine *Hyperfläche* in $\mathbb{P}^n$ der Dimension $n-1$ und des Grades d. Der Grad der Hyperfläche ist also gleich dem Grad des definierenden Polynoms (wie erwartet).

(iv) $\deg(x^a, y^b, z^c) = a \cdot b \cdot c$. (Übungsaufgabe 8).