3 Noethersche Moduln

Diese Strukturen wurden 1921 von Emmy Noether eingeführt und untersucht. Sie gestatten Endlichkeitsaussagen.

3.1. Definition. Ein R-Modul M heißt *noethersch*, wenn jeder Untermodul von M, also insbesondere M selbst, endlich erzeugt ist.

3.2. Beispiel. Es sei R ein noetherscher Ring. Dann ist R ein noetherscher R-Modul, denn die Untermoduln von R sind Ideale von R, also endlich erzeugt.

3.3. Satz. *Für einen R-Modul M sind äquivalent:*

(a) M ist noethersch,

(b) Jede aufsteigende Kette von Untermoduln $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots$ von M wird stationär,

(c) Jede nichtleere Menge von Untermoduln von M enthält ein "$\subseteq$"-maximales Element

Beweis. Analog zu Satz (I.6.1). □

Wir wollen nun weitere noethersche Moduln konstruieren. In diesem Zusammenhang führen wir einige Begriffe ein, die eine Formalisierung von Standardschlußweisen gestatten ("Diagramm-Kalkül").

3.4. Definition. (i) Eine Folge/Sequenz von R-Moduln und R-Modulhomomorphismen

$$\dots M_{k-1} \xrightarrow{\varphi_{k-1}} M_k \xrightarrow{\varphi_k} M_{k+1} \longrightarrow \dots$$

keißt ein *Komplex*, wenn für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt $\varphi_k \circ \varphi_{k-1} = 0$. Komplexe

Die Sequenz heißt *exakt* in M_k, wenn $\operatorname{Im}\varphi_{k-1} = \operatorname{Kern}\varphi_k$. Sie heißt *exakte Sequenz*, wenn sie in allen M_k, $k \in \mathbb{Z}$, exakt ist. exakte Sequenzen

Eine exakte Sequenz der Form

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

heißt *kurze exakte Sequenz* kurze exakte Sequenzen

(ii) Ist $\varphi : M \to N$ ein Homomorphismus von R-Moduln, so heißt $N/\operatorname{Im}\varphi$ der *Kokern* von N. Symbol $\operatorname{Cokern}\varphi$. Kokern $\operatorname{Cokern}\varphi$

3.5. Bemerkung. (i) Es gilt $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\varphi} M$ ist exakt genau dann, wenn φ injektiv ist. $M \xrightarrow{\psi} M'' \longrightarrow 0$ ist exakt genau dann, wenn ψ surjektiv ist.

(ii) Ein Homomorphismus $\varphi : M \to N$ von R-Moduln ist surjektiv genau dann, wenn $\operatorname{Cokern}\varphi = 0$.

(iii) Ist M' ein Untermodul von M, so ist die Sequenz

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\varepsilon} M \xrightarrow{\pi} M/M' \longrightarrow 0$$

exakt, wobei ε die Einbettung und π der kanonische Epimorphismus ist. Es ist $\operatorname{Cokern}\varepsilon = M/M'$. Dies ist das "Muster" *jeder* kurzen exakten Sequenz.

3.6. Lemma. *Eine Sequenz von R-Moduln (und R-Modulhomomorphismen)*

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} M'' \longrightarrow 0$$

ist exakt genau dann, wenn φ ist injektiv, ψ ist surjektiv und ψ induziert einen Isomorphismus $\operatorname{Cokern}\varphi \cong M''$.

Beweis. "$\Rightarrow$" Die ersten beiden Aussagen sind klar nach (3.5). Wegen $\mathrm{Kern}\,\psi = \mathrm{Im}\,\varphi$ gibt es nach dem Homomorphiesatz ein komm. Diagramm

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & M'' \\ & M/\mathrm{Im}\,\varphi \arrow[ur, "\alpha"'] & \end{tikzcd}$$

wobei α durch ψ induziert ist und $\mathrm{Kern}\,\alpha = \mathrm{Kern}\,\psi/\,\mathrm{Im}\,\psi = 0$. Da mit ψ auch α surjektiv ist, ist α ein Isomorphismus.

"$\Leftarrow$" Da ψ einen Isomorphismus $\alpha : M/\,\mathrm{Im}\,\varphi \longrightarrow M''$ induziert folgt nach dem Homomorphiesatz $\mathrm{Im}\,\varphi \subseteq \mathrm{Kern}\,\psi$ und $0 = \mathrm{Kern}\,\alpha = \mathrm{Kern}\,\psi/\,\mathrm{Im}\,\varphi$, also $\mathrm{Kern}\,\psi = \mathrm{Im}\,\varphi$. Der Rest ist klar. $\square$

3.7. Satz. *Es sei*

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} M'' \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von R-Moduln. Dann ist M noethersch genau dann, wenn M' und M" noethersch sind.

Beweis. "$\Rightarrow$" Ist $M_1'' \subset M_2'' \subset \dots$ eine aufsteigende Kette von Untermoduln von M'', so ist $\psi^{-1}(M_1'') \subset \psi^{-1}(M_2'') \subset \dots$ (als Urbild) eine aufsteigende Kette von Untermoduln von M. Diese wird stationär, also auch die ursprüngliche Kette, denn $\psi(\psi^{-1}(M_i'')) = M_i''$, da ψ surjektiv ist. Also ist M'' noethersch.

Analog induziert jede aufsteigende Kette von Untermoduln von M' eine aufsteigende Kette von Untermoduln von M, wird also stationär. Also ist M' noethersch.

"$\Leftarrow$" Es sei $M_1 \subset M_2 \subset \dots$ eine aufsteigende Kette von Untermoduln von M. Dann sind $\varphi^{-1}(M_1) \subset \varphi^{-1}(M_2) \subset \dots$ und $\psi(M_1) \subset \psi(M_2) \subset \dots$ aufsteigende Ketten in M' bzw. M''. Diese werden stationär. Daher wird auch die ursprüngliche Kette stationär, denn aus $\varphi^{-1}(M_i) = \varphi^{-1}(M_{i+1})$ und $\psi(M_i) = \psi(M_{i+1})$ folgt $M_i = M_{i+1}$. Sei dazu $m \in M_{i+1}$. Zu zeigen: $m \in M_i$.

Fall 1: Es sei $m \in \mathrm{Im}\,\varphi$, d.h. es gibt ein $m' \in M'$ mit $\varphi(m') = m$. Also $m' \in \varphi^{-1}(M_{i+1}) = \varphi^{-1}(M_i)$, daher $m = \varphi(m') \in M_i$.

Fall 2: Sei $m \in M_{i+1}$ beliebig. Es ist $\psi(m) \in \psi(M_{i+1}) = \psi(M_i)$, also gibt es ein $n \in M_i$ mit $\psi(n) = \psi(m)$, d.h. $m - n \in \mathrm{Kern}\,\psi = \mathrm{Im}\,\varphi$. Nach Fall 1 ist also $n - m \in M_i$, somit $m \in M_i$. $\square$

3.8. Folgerung. (i) Unter- und Faktormoduln eines noetherschen Moduls sind noethersch.

(ii) Ist M noethersch und N ein zu M isomorpher Modul, so ist auch N noethersch.

3.9. Folgerung. Sind $M_1, \dots, M_s$, $s \in \mathbb{N}$, noethersche R-Moduln, so ist auch ihre direkte Summe $\bigoplus_{i=1}^{s} M_s$ noethersch.

Beweis. Betrachte die Sequenz

$$0 \longrightarrow M_s \xrightarrow{m_s \mapsto (0,\dots,0,m_s)} \bigoplus_{i=1}^{s} M_i \xrightarrow{(m_1,\dots,m_s) \mapsto (m_1,\dots,m_{s-1})} \bigoplus_{i=1}^{s-1} M_i \longrightarrow 0.$$

Diese ist offenbar exakt, so daß die Behauptung aus (3.7) per Induktion über s folgt. $\square$

3.10. Satz. *Endlich erzeugte Moduln über noetherschen Ringen sind noethersch.*

Beweis. Es sei R ein noetherscher Ring, und es sei M ein R-Modul mit Erzeugendensystem $\{m_1, \dots, m_s\}$. Nach (2.20) ist M isomorph zu einem Faktormodul eines endlich erzeugten freien Moduls F. Hat F den Rang r, so ist $F \cong R^r$. Nach (3.9) ist F noethersch, somit auch M (nach 3.8). $\square$

3.11. Notation. Ein Diagramm kommutative Diagramme

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "\beta"] & & N \\ & P \arrow[ur, "\gamma"] & \end{tikzcd}$$

von R-Modulhomomorphismen heißt *kommutativ*, wenn $\alpha = \gamma \circ \beta$, was gelegentlich durch einen Kringel bezeichnet wird.

3.12. Bemerkung (& Notation). (i) Es sei $A \in R^{p\times q}$ eine Matrix über dem Ring R. Dann ist die Abbildung

$$\varphi_A : R^q \longrightarrow R^p \quad (r_1, \dots, r_q)^t \mapsto A(r_1, \dots, r_q)^t$$

ein R-Modulhomomorphismus. Wir setzen Kern$A$, ImA, Cokern$A$

$$\operatorname{Kern} A := \operatorname{Kern} \varphi_A, \quad \operatorname{Im} A := \operatorname{Im} \varphi_A, \quad \operatorname{Cokern} A := \operatorname{Cokern} \varphi_A.$$

(ii) Es sei $\varphi : F \longrightarrow G$ ein R-Modulhomomorphismus zwischen freien Moduln vom Rang q bzw. p. Es seien $\{f_1, \dots, f_q\}, \{g_1, \dots, g_p\}$ Basen von F bzw. G. Dann gibt es $a_{ij} \in R$ derart, daß gilt

$$\varphi(f_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{ij} g_i, \quad i = 1, \dots, q.$$

Dann heißt die Matrix $A = (a_{ij}) \in R^{p\times q}$ die *Koordinatenmatrix* von φ bezüglich der gewählten Basen. Das folgende Diagramm ist kommutativ: Koordinatenmatrix

$$\begin{tikzcd} s_1 f_1 + \dots + s_q f_q & F \arrow[r, "\varphi"] & G & r_1 g_1 + \dots + r_p g_p \\ (s_1, \dots, s_q)^t \arrow[u] & R^q \arrow[u, "\cong"] \arrow[r, "A"] & R^p \arrow[u, "\cong"] & (r_1, \dots, r_p)^t \arrow[u] \end{tikzcd}$$

3.13. Satz. *Es sei M ein endlich erzeugter Modul über dem noetherschen Ring R. dann hat M eine* Präsentationsmatrix*, d.h. es existiert eine Matrix $A \in R^{p\times q}$ derart, daß* Cokern$A \cong M$. Präsentationsmatrix

Mit anderen Worten: Es gibt eine exakte Sequenz

$$R^q \xrightarrow{A} R^p \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

Je zwei Präsentationsmatrizen von M gleichen Formats sind äquivalent, falls R ein lokaler Ring ist.

Beweis. Es sei $\{m_1, \dots, m_p\}$ ein Erzeugendensystem von M. Dann ist die Abbildung

$$\varphi : R^p \longrightarrow M, \quad (r_1, \dots, r_p)^t \longmapsto r_1 g_1 + \dots + r_p g_p$$

surjektiv. Als Untermodul von R^p ist Kern$\,\varphi$ endlich erzeugt. Folglich gibt es einen Epimorphismus $\psi : R^q \longrightarrow \operatorname{Kern}\varphi$.

Betrachte das Diagramm mit der Einbettung ε und $\alpha := \varepsilon \circ \psi$:

$$\begin{tikzcd} R^q \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "\psi"'] & & R^p \arrow[r, "\varphi"] & M \arrow[r] & 0 \\ & \operatorname{Kern}\varphi \arrow[ur, "\varepsilon"'] & & & \\ 0 \arrow[ur] & & & & \end{tikzcd}$$

Dann gilt $\operatorname{Cokern}\alpha = R^p / \operatorname{Im}\alpha = R^p / \operatorname{Kern}\varphi = \operatorname{Cokern}\varepsilon \cong M$ (3.6). Die Behauptung folgt dann also, wenn wir A als eine Koordinatenmatrix von α wählen.

Die zweite Behauptung ist Übungsaufgabe 16. □

3.14. Definition. Eine exakte Sequenz von R-Moduln

$$\ldots \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

in der $F_0, F_1, \ldots$ endlich erzeugte freie R-Moduln sind, heißt *freie Auflösung* des R-Moduls M. Sie heißt *endliche freie Auflösung*, falls es ein $v \in \mathbb{N}$ gibt mit $F_i = 0$ für $i > v$. In diesem Fall heißt v die *Länge* der Auflösung.

3.15. Satz. *Jeder endlich erzeugte Modul M über einem Noetherschen Ring R besitzt eine freie Auflösung.*

Beweis. Wir iterieren das Argument aus (3.13): Es sei $F_l \longrightarrow F_{l-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ eine schon gefundene exakte Sequenz, in der $F_0, \ldots, F_l$ freie R-Moduln sind. (Existenz für $l = 0, 1$ klar nach (3.13)) Als Untermodul des Noetherschen Moduls F_l ist $\operatorname{Kern} \varphi_l$ endlich erzeugt, also gibt es (2.20) einen Epimorphismus $\alpha : F_{l+1} \twoheadrightarrow \operatorname{Kern} \varphi_l$, in der F_{l+1} ein freier R-Modul ist. Setze $\varphi_{l+1} := \varepsilon \circ \alpha$. Dann ist die Sequenz

$$\begin{tikzcd}
F_{l+1} \arrow[rr, "\varphi_{l+1}"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & F_l \arrow[r, "\varphi_l"] & F_{l-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & F_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \\
& \operatorname{Kern} \varphi_l \arrow[ur, "\varepsilon"'] \arrow[dr] & & & & & & \\
0 \arrow[ur] & & 0 & & & & &
\end{tikzcd}$$

exakt nach Konstruktion. $\square$

3.16. Beispiel. (i) Sei $R = K[x,y]$ und $M = R/(x,y)$.

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Kern} \varphi_2 = 0 \arrow[r] & R \arrow[r, "{\varphi_2,\ (-y,x)^t}"] \arrow[d] & R^2 \arrow[r, "{\varphi_1, (x,y)}"] \arrow[d] & R \arrow[r] & R/(x,y) \arrow[r] & 0 \\
& \operatorname{Kern} \varphi_1 = R(-y,x)^t \arrow[ur] & (x,y) \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
& 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Es ist $(r_1, r_2)^t \in \operatorname{Kern} \varphi_1$ genau dann, wenn $0 = (x,y) = (r_1, r_2)^t = r_1 x + r_2 y = 0$, also $r_1 x = -r_2 y$. Folglich gibt es ein $r \in R$ mit $r_1 = r(-y)$ und nach Kürzen $r_2 = rx$, d.h. $(r_1, r_2)^t \in \operatorname{Kern} \varphi_1$ genau dann, wenn $(r_1, r_2)^t = (r(-y), rx)^t = r(-y,x)^t$.

(ii) Betrachte $M = R/(x,y)^2$

$$
\begin{tikzcd}
\operatorname{Kern}\varphi_2 = 0 \arrow[r] & R^2 \arrow[r, "{\varphi_2,\ \begin{pmatrix} -y & 0 \\ x & -y \\ 0 & x \end{pmatrix}}"] \arrow[d] & R^3 \arrow[r, "{\varphi_1, (x^2,xy,y^2)}"] \arrow[d] & R \arrow[r] & R/(x,y)^2 \longrightarrow 0 \\
& \operatorname{Kern}\varphi_1 = R\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} + R\begin{pmatrix} 0 \\ -y \\ x \end{pmatrix} \arrow[ur] & (x^2,xy,y^2) \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
& 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 &
\end{tikzcd}
$$

Ist $(r_1,r_2)^t \in \operatorname{Kern}\varphi_2$, so folgt $0 = r_1(-y) + r_2 \cdot 0 = -r_1 y$, also $r_1 = 0$ und $0 = r_1 0 + r_2 x = r_2 x$, also $r_2 = 0$, d.h. $\operatorname{Kern}\varphi_2 = \{(0,0)^t\}$.

Im allgemeinen sind freie Auflösungen nicht endlich. Über Polynomringen gilt aber folgender

3.17. Satz (Hilbertscher Syzygiensatz). *Ist M ein endlich erzeugter Modul über einem Polynomring R, so besitzt M eine freie Auflösung der Länge $\leq \dim R$.*

Ohne Beweis.

Für die Betrachtung kommutativer Diagramme ist oft nützlich:

3.18. Lemma (Schlangenlemma). *Es sei*

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\varphi'"] & M \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\varphi"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "\varphi''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "\gamma"] & N \arrow[r, "\delta"] & N'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

ein kommutatives Diagramm. Dies induziert eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \operatorname{Kern}\varphi' \longrightarrow \operatorname{Kern}\varphi \longrightarrow \operatorname{Kern}\varphi'' \xrightarrow{\sigma} \operatorname{Cokern}\varphi' \longrightarrow \operatorname{Cokern}\varphi \longrightarrow \operatorname{Cokern}\varphi'' \longrightarrow 0$$

wobei σ durch $\gamma^{-1} \circ \varphi \circ \beta^{-1}$ "induziert" wird (β^{-1} ist keine Abbildung). Die Abbildung σ heißt Verbindungshomomorphismus.

Beweis. (i) Konstruktion von σ: Es sei $m'' \in \operatorname{Kern}\varphi''$. Da β surjektiv ist, gibt es ein $m \in M$ mit $\beta(m) = m''$. Die Kommutativität liefert $\delta(\varphi(m)) = \varphi''(\beta(m)) = \varphi''(m'') = 0$, also $\varphi(m) \in \operatorname{Kern}\delta = \operatorname{Im}\gamma$. Setze $\sigma(m'') := \gamma^{-1}(\varphi(m)) + \operatorname{Im}\varphi' \in \operatorname{Cokern}\varphi'$.

(ii) Wohldefiniertheit von σ: Dazu sei $\tilde{m} \in M$ mit $\beta(\tilde{m}) = m''$. Zu zeigen: $\gamma^{-1}(\varphi(\tilde{m})) - \gamma^{-1}(\varphi(m)) \in \operatorname{Im}\varphi'$. Es ist $0 = \beta(\tilde{m}) - \beta(m) = \beta(\tilde{m} - m)$, also ist $\tilde{m} - m \in \operatorname{Kern}\beta = \operatorname{Im}\alpha$, daher $\tilde{m} - m = \alpha(m')$ für ein $m' \in M'$. Es folgt $\gamma^{-1}(\varphi(\tilde{m})) - \gamma^{-1}(\varphi(m)) = \gamma^{-1}(\varphi(\tilde{m} - m) = \gamma^{-1}(\varphi(\alpha(m'))) \overset{komm.}{=} \gamma^{-1}(\gamma(\varphi'(m'))) = \varphi'(m') \in \operatorname{Im}\varphi'$.

(iii) Die anderen Abbildungen in der Sequenz sind durch α, β, γ bzw. δ induziert. Die Exaktheit rechnet man nach.

$\square$