4 Assoziierte Primideale, Primärzerlegungen

Assoziierte Primideale eines Moduls tragen wichtige Informationen über den Modul.

4.1. Definition. Es sei M ein R-Modul.

(i) Die Menge $\operatorname{Spec}(R)$ der Primideale $\neq R$ von R heißt das *Spektrum* von R. Spektrum $\operatorname{Spec}(R)$

(ii) Ein Primideal $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ heißt *assoziiertes Primideal* von M, wenn es ein $m \in M$ gibt, so daß $\mathfrak{p} = \operatorname{Ann} m := \operatorname{Ann}_R(Rm)$. assoziierte Primideale $\operatorname{Ass}_R(M)$

Die Menge der assoziierten Primideale von M wird mit $\operatorname{Ass}_R M$ bzw. $\operatorname{Ass} M$ bezeichnet.

(iii) Ist $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal, so heißen die assoziierten Primideale in $\operatorname{Ass}_R(R/\mathfrak{a})$ die *Primteiler* von $\mathfrak{a}$. Primteiler

(iv) Ein Element $r \in R$ heißt *Nullteiler* von M, wenn es ein $m \in M \setminus \{0_M\}$ gibt mit $rm = 0$, andernfalls *Nichtnullteiler* bzw. *M-regulär*. (Nicht-)Nullteiler

(0_R ist ein Nullteiler, falls $M \neq 0$.)

4.2. Beispiel. Es sei $R = K[x,y,z]$ der Polynomring in drei Variablen, $\mathfrak{a} = (x^2y)$ und $\overline{R} = R/\mathfrak{a} = R/(x^2y)R$.

(i) Dann ist xy ein Nullteiler von $\overline{R}$, denn $\overline{x} := x + \mathfrak{a} \neq 0_{\overline{R}} = \overline{0}$, aber $xy \cdot \overline{x} = \overline{x^2y} = 0$.

(ii) Für $\overline{xy} = xy + \mathfrak{a}$ gilt $\operatorname{Ann}_R(\overline{xy}) = x \cdot R$, denn aus $f \in \operatorname{Ann}_R(\overline{xy})$ folgt $\overline{0} = f(\overline{xy}) = \overline{fxy}$, also $fxy \in \mathfrak{a} = x^2yR$. Da R faktorieller Ring und x, y Primelemente von R sind, folgt $x \big| f$, also $f \in x \cdot R$. Dies zeigt $\operatorname{Ann}_R(\overline{xy}) \subseteq xR$, aber die umgekehrte Inklusion ist klar.

(iii) Da x ein Primelement ist, ist xR ein Primideal von R, also ist $(x) = xR \in \operatorname{Ass}_R(\overline{R})$.

(iv) Analog ergibt sich $\operatorname{Ann}_R(\overline{x^2}) = yR = (y) \in \operatorname{Ass}_R(R/\mathfrak{a})$. Somit sind (x) und (y) Primteiler von $\mathfrak{a} = (x^2y) = (x^2) \cap (y)$.

(v) z ist $\overline{R}$-regulär, denn für $\overline{f} := f + \mathfrak{a} \in \overline{R}$ folgt aus $\overline{0} = z\overline{f} = \overline{zf}$, also $zf \in \mathfrak{a} = (x^2y)$, somit $x^2y \big| f$, daher $\overline{f} = 0$.

4.3. Satz. *Es sei R ein noetherscher Ring, und es sei $M \neq 0$ ein R-Modul. Dann gilt:*

(a) Jedes maximale Element der Familie von Idealen

$$\mathcal{F} := \{ \operatorname{Ann}_R(m) \mid m \in M \setminus \{0\} \}$$

ist ein assoziiertes Primideal von M. Insbesondere ist $\operatorname{Ass}_R(M) \neq 0$.

(b) Die Menge aller Nullteiler von M ist die Vereinigung aller assoziierter Primideale von M.

Beweis. (a) Es sei $\operatorname{Ann}_R(m) \in \mathcal{F}$ ein maximales Element von $\mathcal{F}$. Zu zeigen: $\operatorname{Ann}_R(m)$ ist ein Primideal.

Dazu seien $a, b \in R$ mit $a \cdot b \in \operatorname{Ann}_R(m)$ und $b \notin \operatorname{Ann}_R(m)$. D.h. $abm = 0$, aber $bm \neq 0$. Wegen $\operatorname{Ann}_R(m) \subseteq \operatorname{Ann}_R(bm)$ folgt aus der Maximalität die Gleichheit, also insbesondere $a \in \operatorname{Ann}_R(bm) = \operatorname{Ann}_R(m)$.

Da R noethersch ist, enthält $\mathcal{F}$ maximale Elemente, somit ist $\operatorname{Ass}_R(M) \neq 0$.

(b) Ist $am = 0$ für $a \in R$ und $m \in M \setminus \{0\}$, so ist $a \in \operatorname{Ann}_R(m) \in \mathcal{F}$. Nach (a) existiert ein $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R(M)$ mit $\operatorname{Ann}_R(m) \subseteq \mathfrak{p}$.

□

4.4. Lemma. *Ist M ein R-Modul und $m \in M$, so gilt für den Untermodul Rm von M:*

$$Rm \cong R/\operatorname{Ann}_R(m)$$

als Untermoduln.

Beweis. Durch $a \longmapsto am$ wird ein Epimorphismus $\varphi : R \longrightarrow Rm$ definiert. Offenbar ist $\operatorname{Kern}\varphi = \operatorname{Ann}_R(m)$. Somit liefert der Homomorphiesatz die Behauptung. □

4.5. Lemma. *Es sei $N \neq 0$ ein Untermodul des R-Moduls M. Gibt es ein Primideal $\mathfrak{p}$ von R mit $N \cong R/\mathfrak{p}$ (als R-Modul), so gilt $\operatorname{Ann}_R(n) = \mathfrak{p}$ für alle $n \in N\setminus\{0\}$ und insbesondere $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R(M)$.*

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es einen Isomorphismus $\varphi : R/\mathfrak{p} \longrightarrow N$. Es sei $m := \varphi(1_{R/\mathfrak{p}})$. Dann folgt $N = Rm$ und $\operatorname{Ann}_R(m) = \mathfrak{p}$. Zu jedem $n \in N\setminus\{0\}$ gibt es ein $a \in R$ mit $n = a \cdot m$. Somit ist $\mathfrak{p} = \operatorname{Ann}_R(m) \subseteq \operatorname{Ann}_R(n)$. Gäbe es ein $b \in \operatorname{Ann}_R(n)\setminus\mathfrak{p}$, so folgte $abm = 0$, aber $bm \neq 0$, somit wegen $ab \in \mathfrak{p}$ und $b \notin \mathfrak{p}$ aber $a \in \mathfrak{p}$, d.h. $n = am = 0$, im Widerspruch zu $n \neq 0$. □

4.6. Satz. *Es sei*

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} M'' \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz. Dann gilt

$$\operatorname{Ass} M' \subseteq \operatorname{Ass} M \subseteq \operatorname{Ass} M' \cup \operatorname{Ass} M''.$$

Beweis. Die erste Inklusion ist klar wegen Lemma (4.5). Wir zeigen nun die zweite: Es sei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} M$. Somit gibt es ein $m \in M$ mit $\mathfrak{p} = \operatorname{Ann}_R(m)$ und für $N = Rm$ gilt $N \cong R/\mathfrak{p}$ (nach (4.4)). Ist $\varphi(M') \cap N \neq 0$, so gibt es ein $m' \in M'$ mit $n := \varphi(m') \in N\setminus\{0\}$. Nach (4.5) folgt $\mathfrak{p} = \operatorname{Ann}_R(n) = \operatorname{Ann}_R(m')$, also $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} M'$

Ist $\varphi(M') \cap N = 0$, d.h. $\operatorname{Kern}\psi \cap N = 0$, so folgt aus dem Homomorphiesatz $\psi(N) \cong N/\operatorname{Kern}\psi \cap N = N \cong R/\mathfrak{p}$. Wegen (4.5) ergibt sich also $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} M''$. □

4.7. Lemma. *Es sei M ein endlich erzeugter Modul über dem noetherschen Ring R mit $M \neq 0$. Dann gibt es eine Kette von Untermoduln $0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq M_2 \subsetneq \ldots \subsetneq M_n = M$ derart, daß für $i = 1, \ldots, n$ gilt $M_i/M_{i-1} \cong R/\mathfrak{p}$ für ein $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$.*

Beweis. Wir wählen ein $\mathfrak{p}_1 \in \operatorname{Ass}_R(M)$. Dann gibt es einen Untermodul M_1 von M mit $M_1 \cong R/\mathfrak{p}_1$, denn $\mathfrak{p}_1 = \operatorname{Ann}_R(m)$, also ist $Rm \cong R/\mathfrak{p}_1$. Ist $M \neq M_1$, so wählen wir ein $\mathfrak{p}_2 \in \operatorname{Ass}_R(M/M_1)$. Dann existiert ein Untermodul M_2 von M mit $M_2/M_1 \cong R/\mathfrak{p}_2$. Auf diese Weise kann man jede Kette $0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq M_2 \subsetneq \ldots \subsetneq M_k$ mit $M_i/M_{i-1} \cong R/\mathfrak{p}_i$ durch einen Modul M_{k+1} "verlängern", falls $M_k \neq M$. Da M noethersch ist, wird jede aufsteigende Kette stationär. Daraus folgt die Behauptung. □

4.8. Satz. *Ist M ein endlich erzeugter Modul über dem noetherschen Ring R, so ist die Menge $\operatorname{Ass}_R(M)$ endlich.*

Beweis. Sei $0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq M_2 \subsetneq \ldots \subsetneq M_n = M$ eine Kette von Untermoduln mit $M_i/M_{i-1} \cong R/\mathfrak{p}_i$, $\mathfrak{p}_i \in \operatorname{Spec}(R), i = 1, \ldots, n$. Wegen $\operatorname{Ass}_R(R/\mathfrak{p}_i) = \{\mathfrak{p}_i\}$ (nach (4.5)) folgt durch Anwendung von (4.6) auf $0 \longrightarrow M_{i-1} \longrightarrow M_i \longrightarrow R/\mathfrak{p}_i \longrightarrow 0$ aber $\operatorname{Ass}_R(M_i) \subseteq \operatorname{Ass}_R(M_{i-1}) \cup \{\mathfrak{p}_i\}$, also $\operatorname{Ass}_R(M) \subseteq \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n\}$. □

4.9. Folgerung. Ist $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal des noetherschen Ringes R, so ist die Menge der Primteiler von $\mathfrak{a}$ endlich.

Beweis. $R/\mathfrak{a}$ ist als R-Modul durch $1 + \mathfrak{a}$ erzeugt. Daher ist $\operatorname{Ass}_R(R/\mathfrak{a})$ endlich. □

4.10. Definition. Es sei N ein Untermodul des R-Moduls M. Dann heißt N ein *primärer Untermodul* von M, wenn $N \neq M$ und M/N genau ein assoziiertes Primideal hat. Ist $\mathfrak{p}$ dieses Primideal, so heißt N auch $\mathfrak{p}$-*primär* oder zu $\mathfrak{p}$ gehörig.

primäre Untermoduln

$\mathfrak{p}$-primär

4.11. Lemma. *Sei R ein noetherscher Ring. Dann ist der Durchschnitt endlich vieler $\mathfrak{p}$-primärer Untermoduln eines R-Moduls M wieder $\mathfrak{p}$-primär.*

Beweis. Es genügt, dies für zwei $\mathfrak{p}$-rimäre Untermoduln $N_1, N_2 \subseteq M$ zu beweisen. Dann ist $M/N_1 \cap N_2 \neq 0$, also $\varnothing \neq \mathrm{Ass}_R(M/N_1 \cap N_2)$ nach (4.3). Wir betrachten die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow N_1/N_1 \cap N_2 \longrightarrow M/N_1 \cap N_2 \longrightarrow M/N_1 \longrightarrow 0.$$

Mit (4.6) ergibt sich dann wegen $N_1/N_1 \cap N_2 \cong (N_1 + N_2)/N_2$

$$\varnothing \neq \mathrm{Ass}_R(M/N_1 \cap N_2) \subseteq \mathrm{Ass}_R(N_1 + N_2/N_2) \cup \mathrm{Ass}_R(M/N_1) \overset{(4.6)}{\subseteq} \mathrm{Ass}_R(M/N_2) \cup \{\mathfrak{p}\} = \{\mathfrak{p}\}.$$

Also ist $\mathrm{Ass}_R(M/N_1 \cap N_2) = \{\mathfrak{p}\}$. □

4.12. Definition. Ein Untermodul N des R-Moduls M heißt *irreduzibel* (in M), wenn gilt: Ist $N = U_1 \cap U_2$ für Untermoduln U_1, U_2 von M, so folgt $N = U_1$ oder $N = U_2$.

Irreduzibilität

4.13. Lemma. *Ist R noethersch und ist $N \neq M$ ein irreduzibler Untermodul von M, so ist N primär.*

Beweis. (i) N ist irreduzibel in M genau dann, wenn der Nullmodul in M/N irreduzibel ist.

(ii) Wegen $M/N \neq 0$ ist $\mathrm{Ass}_R(M/N) \neq \varnothing$.

(iii) Antithese: Es seien $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$ verschiedene Primideale in $\mathrm{Ass}_R(M/N)$. Dann gibt es in M/N Untermoduln U_1, U_2 mit $U_1 \cong R/\mathfrak{p}_1$ und $U_2 \cong R/\mathfrak{p}_2$ nach (4.4). Für $x \in U_1 \cap U_2$ mit $x \neq 0$ folgte $\mathrm{Ann}_R(x) = \mathfrak{p}_1$ und $\mathrm{Ann}_R(x) = \mathfrak{p}_2$; Widerspruch. Somit ist $U_1 \cap U_2 = 0$. Da (0) in M/N irreduzibel ist (nach (i)) folgt $U_1 = 0$ oder $U_2 = 0$; Widerspruch.

Also hat $\mathrm{Ass}_R(M/N)$ genau ein Element.

□

4.14. Definition. Eine *Primärzerlegung* eines Untermoduls $N \subsetneq M$ ist eine Darstellung $N = Q_1 \cap \ldots \cap Q_s$, wobei $s \in \mathbb{N}$ und $Q_1, \ldots, Q_s$ primäre Untermoduln von M sind.

Primärzerlegung

Sie heißt *reduzierte* Primärzerlegung, wenn gilt

reduzierte Primärzerlegung

(i) $\bigcap_{i \neq j} Q_j \not\subset Q_i$ für $i = 1, \ldots, s$,

(ii) ist Q_i $\mathfrak{p}_i$-primär, so ist $\mathfrak{p}_i \neq \mathfrak{p}_j$ für $i \neq j$.

Die dann auftretenden Moduln $Q_1, \ldots, Q_s$ heißen *Primärkomponenten* dieser Zerlegung von N.

Primärkomponenten

4.15. Satz (Existenz einer reduzierten Primärzerlegung). *Es sei R ein noetherscher Ring und es sei M ein endlich erzeugter R-Modul. Dann besitzt jeder Untermodul $N \subsetneq M$ eine reduzierte Primärzerlegung.*

Beweis. Analog zu (I.7.17). □

4.16. Beispiel. Es sei R ein faktorieller Ring und $1 \neq a \in R$. Ist $a = \varepsilon p_1^{k_1} \cdots p_s^{k_s}$ eine Primfaktorzerlegung von a in paarweise nicht assoziierte irreduzible Elemente $p_1, \ldots, p_s$ mit $\varepsilon \in R^\times$, $k_i \in \mathbb{N}$, so ist $(a) = (p_1^{k_1}) \cap \ldots \cap (p_s^{k_s})$ eine Primärzerlegung des Hauptideals (a).

4.17. Satz (1. Eindeutigkeitssatz). *Ist R noethersch, und ist $N \subsetneq M$ ein Untermodul mit einer reduzierten Primärzerlegung $N = Q_1 \cap \ldots \cap Q_s$, wobei Q_i $\mathfrak{p}_i$-primär sei, so ist $\operatorname{Ass}_R(M/N) = \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s\}$. Die in einer reduzierten Primärzerlegung von N auftretenden Primideale sind durch M und N eindeutig bestimmt.*

Beweis. Es sei $U_i := \bigcap_{j \neq i} Q_j$, also $N = U_i \cap Q_i$ und $U_i \neq N$.

"$\supseteq$" Es folgt aus dem Isomorphiesatz $(0) \neq U_i/N = U_i/U_i \cap Q_i \cong (U_i + Q_i)/Q_i \subseteq M/Q_i$, also $\varnothing \neq \operatorname{Ass}_R(U_i/N) \subseteq \operatorname{Ass}_R(M/Q_i) = \{\mathfrak{p}_i\}$ und somit $\{\mathfrak{p}_i\} = \operatorname{Ass}_R(U_i/N) \overset{(4.6)}{\subseteq} \operatorname{Ass}_R(M/N)$, also $\{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s\} \subseteq \operatorname{Ass}_R(M/N)$

"$\subseteq$" Durch Induktion nach s: $s = 1$, klar. $s > 1$, dann $U_i = \bigcap_{j \neq i} Q_j$ ist eine reduzierte Primärzerlegung von U_i, also nach Induktionsvoraussetzung $\operatorname{Ass}_R(M/U_i) = \{\, \mathfrak{p}_j \mid j \neq i \}$. Wegen $M/U_i \cong (M/N)/(U_i/M)$ ergibt sich nach (4.6) aus $0 \longrightarrow U_i/N \longrightarrow M/N \longrightarrow M/U_i \longrightarrow 0$, daß $\operatorname{Ass}_R(M/N) \subseteq \operatorname{Ass}_R(U_i/N) \cup \operatorname{Ass}_R(M/U_i) = \{\mathfrak{p}_i\} \cup \{\, \mathfrak{p}_i \mid i \neq j\}$. □

4.18. Lemma. *Es sei M ein endlich erzeugter Modul über dem noetherschen Ring R. Dann gilt*

$$\sqrt{\operatorname{Ann} M} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} M} \mathfrak{p}.$$

Beweis. "$\subseteq$" Es sei $a \in \sqrt{\operatorname{Ann} M}$, d.h. $a^k M = 0$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Dann folgt für alle $\mathfrak{p} = \operatorname{Ann} m \in \operatorname{Ass} M$ mit $m \in M$ wegen $a^k M = 0$ aber $a^k \in \mathfrak{p}$, also $a \in \mathfrak{p}$.

"$\supseteq$" Sei $a \notin \sqrt{\operatorname{Ann} M}$ und es sei $M = Rm_1 + \ldots + Rm_s$. Gäbe es $k_i \in \mathbb{N}$ mit $a^{k_i} m_i = 0$, so wäre für $k := \max\{k_1, \ldots, k_s\}$ aber $a^k M = 0$; Widerspruch. Also gibt es ein $m \in M$ derart, daß $a^k m \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Unter allen solchen Elementen m wähle eines, etwa x, mit maximalem Annulator $\mathfrak{p} := \operatorname{Ann} x$.

(i) Per Definition von x gilt dann $a^k \notin \mathfrak{p}$ für alle $k \in \mathbb{N}$

(ii) $\mathfrak{p}$ ist ein Primideal, denn gilt $bc \in \mathfrak{p}$ für $b, c \in R$, so folgt $bcx = 0$, also $c \in \operatorname{Ann}(bx)$ ($\supseteq \operatorname{Ann} x = \mathfrak{p}$).

Fall 1: Ist $a^k bx \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so folgt aus der Maximalität von $\mathfrak{p} = \operatorname{Ann} x$ schon $\operatorname{Ann}(bx) = \operatorname{Ann} x$, also $c \in \mathfrak{p}$.

Fall 2: Es sei $a^k bx = 0$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Dann ist $b \in \operatorname{Ann}(a^k x)$. Wegen $a^j \notin \operatorname{Ann} x = \mathfrak{p}$ für alle $j \in \mathbb{N}$ folgt $a^j \notin \operatorname{Ann}(a^k x)$, daher aus der Maximalität von $\mathfrak{p} = \operatorname{Ann} x$ aber $b \in \operatorname{Ann}(a^k x) = \operatorname{Ann} x = \mathfrak{p}$.

Aus (i) und (ii) folgt $mfp \in \operatorname{Ass} M$ und $a \notin \mathfrak{p}$. □

4.19. Folgerung (Kriterium für Primärmoduln). Es sei M ein endlich erzeugter Modul über dem noetherschen Ring R. Dann gilt

(a) Ein Untermodul $N \subseteq M$ ist primär genau dann, wenn für alle $a \in R, m \in M$ gilt

(1) $\quad am \in N \wedge m \notin N \Longrightarrow \exists k \in \mathbb{N} : \ a^k M \subseteq N.$

(b) Ist N ein $\mathfrak{p}$-rimärer Untermodul von M, so ist $I := \operatorname{Ann}(M/N)$ ein $\mathfrak{p}$-primäres Ideal.

(c) Ein Ideal $\mathfrak{q} \subseteq R$ ist ein primärer Untermodul von R genau dann, wenn $\mathfrak{q}$ ein Primärideal ist.

Beweis. (a) "$\Leftarrow$" Ist $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(M/N)$, so sind alle $a \in \mathfrak{p}$ Nullteiler von M/N (4.3), also gibt es zu $a \in \mathfrak{p}$ ein $m \in M \backslash N$ mit $a(m+N) = 0$, d.h. $am \in N$. Mit (1) ergibt sich $a \in \sqrt{I} := \sqrt{\operatorname{Ann}(M/N)}$, somit $\mathfrak{p} \subseteq \sqrt{I}$. Nach (4.18) gilt $\sqrt{I} = \bigcap_{\mathfrak{p}' \in \operatorname{Ass}(M/N)} \mathfrak{p}' \subseteq \mathfrak{p}$. Also folgt $\mathfrak{p} = \sqrt{I}$ und somit $\operatorname{Ass}(M/N) = \{\mathfrak{p}\}$. Daher ist N ein primärer Untermodul.

"⇒" Ist $\operatorname{Ass}(M/N) = \{\mathfrak{p}\}$, so folgt für jeden Nullteiler $a \in R$ von M/N nach (4.3) $a \in \mathfrak{p}$, also wegen (4.18) $a^k \in I = \operatorname{Ann}(M/N)$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Somit ist (1) erfüllt.

(b) Es seien $a, b \in R$ mit $ab \in I$, aber $b \notin I$, d.h. $ab(M/N) = 0$, aber $b(M/N) \neq 0$. Somit ist a ein Nullteiler von M/N, also $a \in \mathfrak{p}$ (nach (4.3)). Aber $\mathfrak{p} = \sqrt{I}$ (4.18), d.h., I ist ein $\mathfrak{p}$-primäres Ideal.

(c) Folgt durch Vergleich von (1) mit Definition (I.7.5).

□

4.20. Bemerkung. Für ein Ideal $\mathfrak{a} \subseteq R$ stimmen die Definitionen der Primärzerlegung in (I.7.16) und (4.11) überein. Insbesondere sind die Primteiler von $\mathfrak{a}$ genau die im Sinne von Definition (I.7.21) assoziierten Primideale von $\mathfrak{a}$. Diese Definition werden wir künftig nicht mehr verwenden.

Beispiel: $R = K[X]$, $\mathfrak{q} = (X^2)$. $\operatorname{Ass}_R(R/\mathfrak{q}) = \{(x)\}$, aber $\operatorname{Ass}_R(\mathfrak{q}) = \{0\}$, da R Integritätsring.

4.21. Bemerkung. Ist M ein endlich erzeugter Modul über dem noetherschen Ring R, und ist $0_M = Q_1 \cap \ldots \cap Q_s$, wobei $\{\mathfrak{p}_i\} = \operatorname{Ass}(M/Q_i)$ die Primärzerlegung des Nullmoduls, so ist $\operatorname{Ass}_R(M) = \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s\}$.

Beweis. Dies folgt aus dem ersten Eindeutigkeitssatz (4.17). □

4.22. Definition. Es sei N ein Untermodul von M mit reduzierter Primärzerlegung $N = Q_1 \cap \ldots \cap Q_s$, $\operatorname{Ass}(M/Q_i) = \{\mathfrak{p}_i\}$. Dann heißen die minimalen Elemente in $\{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s\}$ *isolierte Primideale* von M/N und die entsprechenden Q_i *isolierte Primärkomponenten* von N. Die verbleibenden Primideale bzw. Primärkomponenten heißen *eingebettet*.

isolierte Primideale
isolierte Primärkomponenten
eingebettete Primärkomponenten

4.23. Beispiel. Im Polynomring $K[x,y]$ gilt $(x^2, xy) = (x) \cap (x^2, y) = (x) \cap (x^2, x+y)$. Dabei ist (x) ein isoliertes Primideal und (x^2, y) bzw. $(x^2, x+y)$ sind eingebettete Primärideale, die zum Primideal (x,y) gehören. Der Name "eingebettet" erklärt sich geometrisch: Es ist $V(x^2, y) \subseteq V(x)$ und $V(x^2, x+y) \subseteq V(x)$.

4.24. Satz (2. Eindeutigkeitssatz). *Es sei N ein Untermodul von M mit reduzierter Primärzerlegung $N = Q_1 \cap \ldots \cap Q_s$. Dann sind die isolierten Primärkomponeneten von N eindeutig durch M und N bestimmt (d.h. unabhängig von der gewählten Primärzerlegung von N.)*

Obacht: *Die analoge Aussage ist falsch für eingebettete Primärkomponenten.*

Beweis. Dies beweist man mit Hilfe der Lokalisierung von Moduln und soll hier nicht gezeigt werden. □

4.25. Definition. Die *Krull-Dimension* $\dim R$ eines Ringes R ist das Supremum der Längen n der Primidealketten

Krull-Dimension $\dim R$

$$\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{p}_n$$

in $\operatorname{Spec}(R)$.

Die *Höhe* $h(\mathfrak{p})$ eines Primideals $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ ist das Supremum der Längen aller Ketten mit $\mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}$.

Die *Höhe* eines beliebigen Ideals $\mathfrak{a} \subsetneq R$ ist $h(\mathfrak{a}) := \inf\{\, h(\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R,\ \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}\}$

Höhe $h(\mathfrak{a})$

4.26. Beispiel. (i) Im Polynomring $R = K[x_0, \ldots, x_n]$ hat man die Primidealkette

$$(0) \subsetneq (x_0) \subsetneq (x_0, x_1) \subsetneq \ldots \subsetneq (x_0, \ldots, x_n).$$

Daraus folgt $\dim R \geq n+1$. Es ist $\dim R = n+1$ und $h(x_0, \ldots, x_i) = i+1$. (Ohne Beweis)

(ii) Es ist $\dim \mathbb{Z} = 1$ und $h(0) = 0$, und für jede Primzahl $p \in \mathbb{Z}$ gilt $h(p) = 1$.

(iii) Ist R ein Integritätsring, so ist $\dim R = 0$ genau dann, wenn R ein Körper ist.

Beweis. Im Integritätsring ist (0) ein Primideal. $\square$

4.27. Lemma. *Es sei* $\mathfrak{a} \subseteq R$ *ein Ideal. Dann gilt*

(a) Ist R noethersch, so gelten
$$h(\mathfrak{a}) = \min\{\, h(\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(R/\mathfrak{a})\} \text{ und } \dim(R/\mathfrak{a}) = \max\{\, \dim R/\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(R/\mathfrak{a})\}.$$
Insbesondere ist $\dim R/\mathfrak{a} = \dim R/\sqrt{\mathfrak{a}}$.

(b) $\dim R/\mathfrak{a} + h(\mathfrak{a}) \leq \dim R$

Beweis. (a) Es sei $P \in \operatorname{Spec} R$ ein Primideal mit $\mathfrak{a} \subseteq P$. Wegen $\bigcap_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Ass}(R/\mathfrak{a})} \mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{a}} \subseteq \sqrt{P} = P$ gibt es ein $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(R/\mathfrak{a})$ mit $\mathfrak{p} \subseteq P$. Damit folgt $h(\mathfrak{a}) = \min\{\, h(\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(R/\mathfrak{a})\}$.

Ist $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{p}_h$ eine Primidealkette in $R/\mathfrak{a}$, so erhalten wir vermöge des kanonischen Epimorphismus $\pi : R \longrightarrow R/\mathfrak{a}$ eine Primidealkette $\mathfrak{a} \subsetneq \pi^{-1}(\mathfrak{p}_0) \subsetneq \pi^{-1}(\mathfrak{p}_1) \subsetneq \ldots \subsetneq \pi^{-1}(\mathfrak{p}_h)$ und ein $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(R/\mathfrak{a})$ mit $\mathfrak{p} \subseteq \pi^{-1}(\mathfrak{p}_0)$. Dann ist $\pi^{-1}(\mathfrak{p}_0)/\mathfrak{p} \subsetneq \pi^{-1}(\mathfrak{p}_1)/\mathfrak{p} \subsetneq \ldots \subsetneq \pi^{-1}(\mathfrak{p}_n)/\mathfrak{p}$ eine Primidealkette in $R/\mathfrak{p}$. Dies zeigt $\dim R/\mathfrak{a} \leq \dim R/\mathfrak{p}$.

Umgekehrt liefert jede Primidealkette in $R/\mathfrak{p}$, wobei $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(R/\mathfrak{a})$, eine Primidealkette in $R/\mathfrak{a}$ gleicher Länge.

Dies zeigt $\dim R/\mathfrak{p} \leq \dim R/\mathfrak{a}$.

(b) Ist mit obigen Bezeichnungen $\mathfrak{q}_0 \subsetneq \mathfrak{q}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{q}_s = \mathfrak{p} := \pi^{-1}(\mathfrak{p}_0)$ eine Primidealkette in R, so erhalten wir daraus eine Primidealkette $\mathfrak{q}_0 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{q}_s = \pi^{-1}(\mathfrak{p}_0) \subsetneq \ldots \subsetneq \pi^{-1}(\mathfrak{p}_n)$ der Länge $s+n$. Daraus folgt $\dim R \geq n + h(\mathfrak{a})$, also schließlich $\dim R \geq \dim R/\mathfrak{a} + h(\mathfrak{a})$.

$\square$

maximale Primidealketten

4.28. Definition. Eine Primidealkette $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{p}_s \subsetneq R$ heißt *maximal*, wenn sie nicht durch ein $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ verlängert werden kann, d.h., wenn für jedes $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ die Bedingungen $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{p}_0$, $\mathfrak{p}_s \subsetneq \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}_i \subsetneq \mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{p}_{i+1}$ verletzt sind.

Noethersche Ringe müssen nicht endliche Krull-Dimension haben. Ferner kann es in noetherschen Integritätsringen maximale Primidealketten verschiedener Länge geben. Im geometrischen Kontext ist die Situation besser.

4.29. Satz. *Es sei* $A = K[x_1, \ldots, x_n]/\mathfrak{a}$. *Sind* $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} A$ *Primideale mit* $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$, *so haben alle maximalen Primidealketten* $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{p}_l = \mathfrak{q}$ *die gleiche Länge l, nämlich* $\dim A/\mathfrak{p} - \dim A/\mathfrak{q}$.

Zusatz: *Ist A ein Integritätsring, so gilt für jedes Ideal I von A:* $\dim A = h(I) + \dim(A/I)$.

Beweis. Es sei $0 = \mathfrak{q}_0 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{q}_t$ eine Primidealkette in $A/\mathfrak{q}$ maximaler Länge $t = \dim A/\mathfrak{q} \leq n = \dim K[x_1, \ldots, x_n]$. Es sei $\pi : A \longrightarrow A/\mathfrak{q}$ der kanonische Epimorphismus. Dann ist $0 = \mathfrak{p}_0/\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}_1/\mathfrak{p} \subseteq \ldots \subseteq \mathfrak{p}_l/\mathfrak{p} = \mathfrak{q}/\mathfrak{p} = \pi^{-1}(\mathfrak{q}_0)/\mathfrak{p} \subseteq \pi^{-1}(\mathfrak{q}_1)/\mathfrak{p} \subseteq \ldots \subseteq \pi^{-1}(\mathfrak{q}_t)/\mathfrak{p}$ eine Primidealkette in $A/\mathfrak{p}$ der Länge $l + t = l + \dim A/\mathfrak{q}$, also $\dim A/\mathfrak{p} \geq l + \dim A/\mathfrak{q}$.

Die Umkehrung $l \geq \dim A/\mathfrak{p} - \dim A/\mathfrak{q}$ verlangt stärkere Hilfsmittel (Siehe etwa Kunz: “Einführung in die kommutative Algebra und algebraische Geometrie”)

Zusatz: Mit $\mathfrak{p} = (0)$ folgt für alle $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} A$, daß $h(\mathfrak{q}) = \dim A - \dim A/\mathfrak{q}$. Die Behauptung ergibt sich daher aus Lemma (4.27). $\square$

4.30. Bemerkung. Es ist $A/I \cong K[x_1, \ldots, x_n]/J$ für ein Ideal $J \subseteq K[x_1, \ldots, x_n] =: R$

Beweis. $J := \pi^{-1}(I)$, dann ist $I = J/\mathfrak{a}$ und somit $A/I \cong (R/\mathfrak{a})/J/\mathfrak{a} \cong R/J$ $\square$

ull-Dimension $\dim_R M$

4.31. Definition. Es sei M ein R-Modul. Dann nennt man $\dim M := \dim_R M := \dim R/\operatorname{Ann}_R(M)$ die *(Krull-)Dimension* von M.

Ist F ein freier R-Modul, so ist $\dim F = \dim R$, denn $\operatorname{Ann}_R(R) = 0$ wegen $1 \in R$.

4.32. Lemma. *Hat der R-Modul M die Präsentationsmatrix $A \in R^{p\times q}$, so ist* $\dim M = \dim R/I_p(A)$.

Beweis. Es gilt (ohne Beweis) $\sqrt{I_p(A)} = \sqrt{\operatorname{Ann} M}$. Also folgt die Behauptung aus $\dim M = \dim R/\operatorname{Ann} M \overset{4.27}{=} \dim R/\sqrt{\operatorname{Ann} M}$. □

4.33. Beispiel. Es sei $R = K[x,y,z]$. Dann gilt für $A = (x,y)^t$, $B = \begin{pmatrix} x & z \\ y & x \end{pmatrix}$ aber $\dim(\operatorname{Cokern} A) = \dim R = 3$, da $I_2(A) = 0$, und $\dim(\operatorname{Cokern} B) = \dim R/I_2(B) = \dim R/(x^2 - yz) = 2$, da $x^2 - yz$ ein homogener Nichtnullteiler von R ist.

4.34. Lemma. *Ist M ein endlich erzeugter Modul über dem noetherschen Ring R, so gilt* $\dim M = \max\{\dim R/\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R(M)\}$.

Beweis. Wegen $\operatorname{Ann}_R(M) = \bigcap_{\mathfrak{p}\in\operatorname{Ass}_R(M)} \mathfrak{p}$ folgt die Behauptung aus (4.27). □

4.35. Lemma. *Es sei* $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ *eine exakte Sequenz von R-Moduln. Dann gilt*

(a) $\dim M \geq \max\{\dim M', \dim M''\}$.

(b) Ist R noethersch, und sind M, M', M'' endlich erzeugt, so gilt $\dim M = \max\{\dim M', \dim M''\}$.

Beweis. (a) Nach Übungsaufgabe 13 ist $\operatorname{Ann} M' \supseteq \operatorname{Ann} M$, also $\dim M' \leq \dim M$, und auch $\operatorname{Ann} M \subseteq \operatorname{Ann} M''$, also $\dim M'' \leq \dim M$.

(b) Wegen $\operatorname{Ass} M \subseteq \operatorname{Ass} M' \cup \operatorname{Ass} M''$ folgt nach (4.34) $\dim M \leq \max\{\dim M', \dim M''\}$, also folgt die Behauptung mit (a).

□

4.36. Satz (Krullscher Hauptidealsatz). *Ist R ein noetherscher Ring und ist $\mathfrak{a} \subsetneq R$ ein Ideal, so gilt für jeden* minimalen *Primteiler $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{a}$*

$$h(\mathfrak{p}) \leq \mu(\mathfrak{a}),$$

also insbesondere $h(\mathfrak{a}) \leq \mu(\mathfrak{a})$.

Beweis. Für die erste Behauptung sei wieder auf Kunz, Theorem V.3.4 verwiesen. Die zweite Behauptung folgt aus der ersten wegen Lemma (4.27). □

4.37. Folgerung. Ist $a \in R\backslash R^\times$ ein Nichtnullteiler des noetherschen Ringes R, so hat jeder minimale Primteiler von $(a) = aR$ die Höhe 1.

Beweis. Nach Definition (4.36) gilt $h(\mathfrak{p}) \leq 1$. Als Nichtnullteiler ist a aber in keinem assoziierten Primideal von R enthalten. □

4.38. Bemerkung. Ist R ein noetherscher Ring, so sind für $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ äquivalent:

(i) $\mathfrak{p}$ ist ein Primideal der Höhe null,

(ii) $\mathfrak{p}$ ist ein isoliertes Primideal von (0_R),

(iii) $\mathfrak{p}$ ist ein minimales Primideal von R.

vollständige Durchschnitte

4.39. Definition. Ein Ideal $\mathfrak{a} \subsetneq R$ des noetherschen Ringes R heißt *vollständiger Durchschnitt*, wenn $h(\mathfrak{a}) = \mu(\mathfrak{a})$.

Ein Schema $S \subseteq \mathbb{A}^n$ bzw. $S \subseteq \mathbb{P}^n$ heißt *vollständiger Durchschnitt*, wenn sein Ideal I_S ein vollständiger Durchschnitt ist.

4.40. Beispiel. (i) Jeder Punkt, jede Gerade im $\mathbb{P}^n$ ist ein vollständiger Durchschnitt, denn für $\mathfrak{a} = (x_0,x_1,\dots,x_k)$ gilt $\mu(\mathfrak{a}) = k+1$ und $(0) \subsetneq (x_0) \subsetneq (x_0,x_1) \subsetneq \dots \subsetneq (x_0,\dots,x_k) = \mathfrak{a}$, also $k+1 \leq h(\mathfrak{a}) \overset{4.36}{\leq} \mu(\mathfrak{a}) \leq k+1$. Somit gilt Gleichheit.

(Alternativ: $R = K[x_0,\dots,x_n]$, $h(\mathfrak{a}) = \dim R - \dim R/\mathfrak{a} = n+1-\dim K[x_{k+1},\dots,x_n] = k+1$)

(ii) $\mathfrak{a} = (x_0^3,x_1^2)$ ist ein vollständiger Durchschnitt der Höhe 2, denn $\mu(\mathfrak{a}) \leq 2$ und $\dim R/\mathfrak{a} = \dim R/\sqrt{\mathfrak{a}} = \dim R/(x_0,x_1) = n-1$, also $h(\mathfrak{a}) = \dim R - \dim R/\mathfrak{a} = 2$.

Eine partielle Umkehrung zum Krullschen Satz liefert

4.41. Folgerung. Ist R noethersch und ist $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ ein Primideal der Höhe c, so ist $\mathfrak{p}$ minimaler Primteiler eines vollständigen Durchschnitts der Höhe c.

Beweis. Per Induktion über $0 \leq s \leq c$ konstruieren wir Ideale $(a_1,\dots,a_s) \subseteq \mathfrak{p}$ der Höhe s.

$s = 0$ ist klar. Ist $s > 0$, und hat $(a_1,\dots,a_{s-1}) \subseteq \mathfrak{p}$ die Höhe $s-1$, so ist $\mathfrak{p}$ nach (4.36) in keinem minimalen Primteiler von $(a_1,\dots,a_{s-1})$ enthalten. Nach dem “Primidealvermeidungslemma” gibt es also ein $a_s \in \mathfrak{p}$, das in keinem minimalen Primteiler von $(a_1,\dots,a_{s-1})$ enthalten ist. Es folgt $h(a_1,\dots,a_{s-1},a_s) \geq s$, also Gleichheit nach (4.36) □

4.42. Folgerung. Ist $(R,\mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Ring endlicher Dimension, und ist $a \in \mathfrak{m}$ in keinem minimalen Primideal von R enthalten, so gilt $\dim R/aR = \dim R - 1$.

Beweis. Es sei $d = \dim R$. Nach Voraussetzung ist $h(aR) \geq 1$. Wegen Krull folgt $h(aR) = 1$. Aus $d = \dim R \geq h(aR) + \dim R/aR$ folgt $\dim R/aR \leq d-1$. Da $\mathfrak{m}$ das einzige maximale Ideal ist, ist $h(\mathfrak{m}) = \dim R = d$. Wegen $a \in \mathfrak{m}$ und $h(aR) = 1$ gibt es wie im Beweis von (4.41) Elemente $a_1 := a, a_2, \dots, a_d \in \mathfrak{m}$ mit $h(a_1,\dots,a_i) = i$ für $i = 1,\dots,d$. Folglich gibt es minimale Primteiler $\mathfrak{p}_i$ von $(a_1,\dots,a_i)$, so daß wir eine Kette $aR \subset \mathfrak{p}_1 \subsetneq \mathfrak{p}_2 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_d = \mathfrak{m}$, haben. Also ist $\mathfrak{p}_1/aR \subsetneq \mathfrak{p}_2/aR \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_d/aR$ eine Primidealkette in $\operatorname{Spec}(R/aR)$, somit $\dim R/aR \geq d-1$. □

4.43. Folgerung. (i) Ohne die Voraussetzung *lokal* kann $\dim R/aR < \dim R - 1$ gelten.

(ii) Die Folgerung präzisiert die Vorstellung, daß die Hinzunahme einer Gleichung die Dimension um eins verringert.

Beispiel: Es sei $S \subseteq \mathbb{P}^3$ definiert durch $I_S = (x_0,x_1) \cap (x_1,x_2,x_3)$ (Gerade $\cup$ Punkt) und F die durch $f = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$ definierte Hyperfläche. Dann hat $S \cap F$ die Dimension null, denn mit $R = K[x_0,x_1,x_2,x_3]$ folgt mit

$$\dim[(R/I_S)/f\cdot(R/I_S)] = \dim R/I_S + f\cdot R = \dim R/I_S - 1 = 2-1 = 1,$$

daß $\dim S \cap F = \dim R/(I_S + f\cdot R)_{\text{sat}} - 1 = \dim[R/I_S + f\cdot R] - 1 = 0$.

Hyperflächenschnitt

$S \cap F$ nennt man den *Hyperflächenschnitt* von S mit F.

Es gilt auch $\dim\left[S \cap V(x_1^2 + x_2^2)\right] = 0$, denn $\sqrt{I_S + gR} = \sqrt{(x_0,x_1,g)} \cap \sqrt{(x_1,x_2,x_3,g)} = (x_0,x_1,x_2) \cap (x_1,x_2,x_3)$ und $\dim R/I_S + gR = \dim R/\sqrt{I_S + gR} = 1$.

4.44. Folgerung. Es sei $\mathfrak{a} \neq R$ ein homogenes Ideal von $R = K[x_0,\dots,x_n]$. Ferner sei $f \in \mathfrak{m} = (x_0,\dots,x_n)$ ein homogenes Ideal, das in keinem minimalen Primteiler von $\mathfrak{a}$ enthalten ist. Dann gilt

$$\dim R/\mathfrak{a} + fR = \dim R/\mathfrak{a} + 1.$$

Beweis. Setze $A := R/\mathfrak{a}$. Da A graduiert ist, gibt es eine Kette *homogener* Primideale $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{p}_d = \mathfrak{m}$ in $R/\mathfrak{a}$, wobei $d = \dim R/\mathfrak{a}$ (ohne Beweis). Es folgt $h(\mathfrak{m}) = d$. Daher ergibt sich die Behauptung wie in (4.42). □